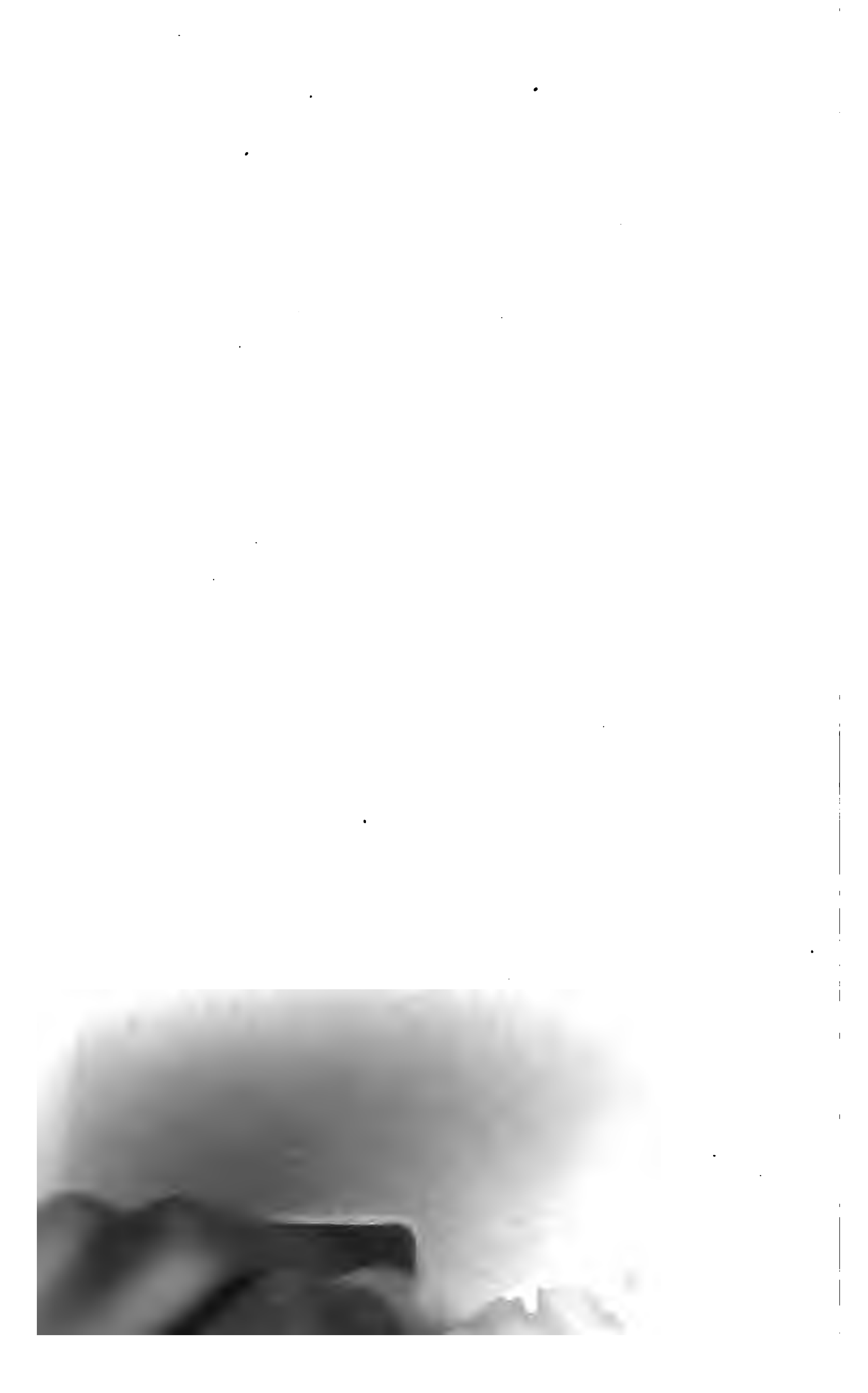


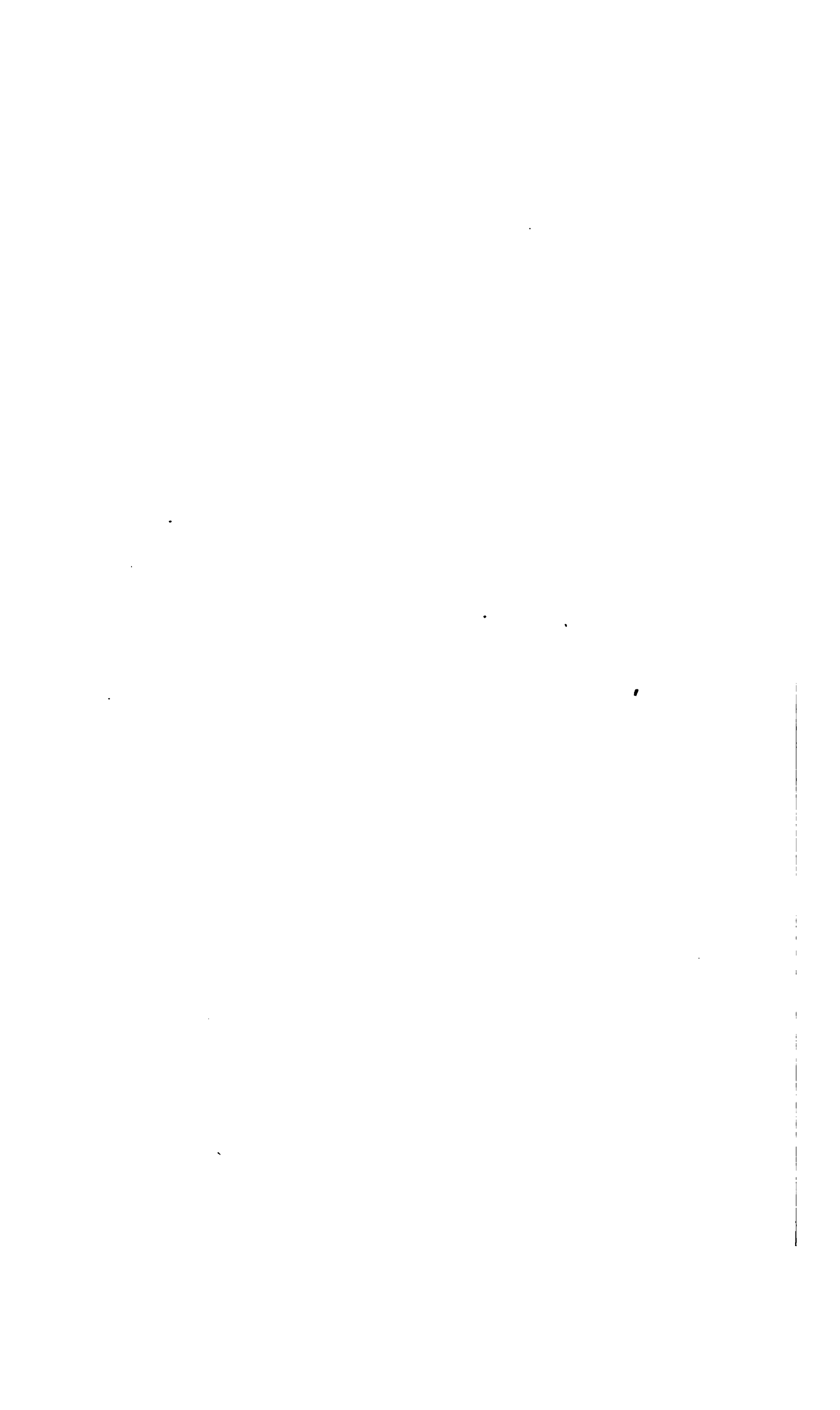
YPL RESEARCH LIBRARIES
433 06907453 6











INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

DR. HEINRICH SCHOTTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Börner, Dr. H., Oberlehrer an der Realschule I. O. zu Ruhrort, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie für höhere Schulen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVIII u. 93 S.] gr. 8. 1879. geh. ℳ 1.60.

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten im Text.] 2. Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1880. geh. ℳ 1.60.

——— Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 3.60.

Einzeln:

I. Teil. Die Planimetrie. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. 3. verbesserte Aufl. [IX u. 201 S.] 1887. ℳ 2.—

II. — Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 128 S.] 1875. ℳ 1.60.

——— Materialien zu Dreiecks-Konstruktionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh. ℳ 1.20.

——— planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1889. geh. ℳ 1.50.

——— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. [VI u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. ℳ 1.50.

Conradt, Dr. F., Oberlehrer am Gymnasium in Belgard, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie in stufenmäßiger Anordnung für den Schulgebrauch, nebst einer sich eng an dasselbe anschließenden Sammlung von Übungsaufgaben. [VIII u. 176 S.] gr. 8. 1889. geh. ℳ 2.—

Dronke, Dr. A., Direktor der Realschule I. O. zu Trier, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text. [IV u. 75 S.] gr. 8. 1881. geh. ℳ 2.—

Erler, Dr., Professor und I. Oberlehrer am Kgl. Pädagogium bei Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima. Mit einer lithographierten Figurentafel. 3. verb. Aufl. [45 S.] gr. 8. 1887. kart. ℳ 1.20.

Frischauf, Dr. J., Professor an der Universität zu Graz, Elemente der Geometrie. 2. Auflage. [VIII u. 164 S. mit eingedr. Holzschnitten.] gr. 8. 1877. geh. ℳ 2.—

Heinze, Dr. Karl, weiland Professor in Köthen, genetische Stereometrie. Bearbeitet von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst. Mit lithographierten Tafeln. [XII u. 194 S.] gr. 8. 1886. geh. ℳ 6.—

Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. ℳ 7.60.

Einzeln:

I. Teil. Gleichheit der planimetrischen Gröfsen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] 1881. ℳ 2.—

II. — Perspektivische Abbildung und Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum für Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. [VIII u. 242 S.] 1882. ℳ 2.80.

III. — Lage und Gröfse der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für Prima. Mit 134 Figuren in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] 1883. ℳ 2.80.

[Fortsetzung folgt auf Seite 3 des Umschlags.]

INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

Dr. HEINRICH SCHOTTEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1890.

Vorrede.

Wenn man die reiche Literatur über Planimetrie aufmerksam verfolgt, so scheint es gar oft an ausreichenden Gründen für eine neue Erscheinung auf diesem Gebiete zu mangeln. Was die Verfasser veranlaſst hat, über all die früheren Lehrbücher hinwegzugehen und ein neues an deren Stelle setzen zu wollen, ist sicherlich wohl immer der Gedanke gewesen, Besseres zu bieten als das Vorhandene — obwohl bei einer groſsen Anzahl von Lehrbüchern dieser Gedanke sich nur deshalb dem Verfasser hat aufdrängen können, weil er offenbar mit seinen Vorgängern nicht hinreichend vertraut gewesen ist. Oft finden wir auch wirklich Gutes, aber im Ganzen doch nur so vereinzelt, daſs eine Berechtigung für ein ganz neues Buch nicht völlig vorhanden zu sein scheint.[1]) Dieser Mangel resultiert meiner Meinung nach daraus, daſs die Verfasser stets nur das fertige Produkt ihrer Arbeit darbieten, während eine Einsicht in die Entstehung des Textes und der Methode, eine kritische Besprechung und Übersicht der verschiedenen entgegenstehenden Meinungen und eine Begründung der eigenen Ansicht viel nützlicher gewesen wäre, wahrscheinlich aber auch sehr oft dahin geführt haben würde, das vorhandene Gute anzuerkennen und bestehen zu lassen.

Aus diesem Gedanken heraus ist das vorliegende Buch entstanden.

Es soll dazu dienen, rasch und sicher über die einschlägige Literatur sich orientieren und selbst nach den ausführlich gegebenen Zitaten aus den verschiedenartigsten Werken über einen bestimmten Gegenstand ein Urteil sich bilden zu können. Der Verfasser setzt dadurch den Leser in den Stand,

---

[1]) Derartige Verbesserungsvorschläge für einzelne Teile des Unterrichtsstoffes werden wohl am passendsten in Programmabhandlungen niedergelegt werden oder in Hoffmanns Zeitschrift, die ja gerade a diesem Gebiete auch schon unendlich viel Gutes gewirkt hat.

den vorgetragenen Text selbst an der Hand des angeführten und kritisch beleuchteten Materials prüfen und für oder gegen denselben sich entscheiden zu können. Der Verfasser ist bemüht gewesen, das vorhandene Material möglichst vollständig herbeizuschaffen; dafs jedoch noch Lücken genug sich finden, kann nicht geleugnet werden, ist aber kaum zu vermeiden, besonders wenn man bedenkt, wie schwierig besonders die Programmabhandlungen früherer Jahrzehnte zu beschaffen sind. Ein sorgfältiges Namen- und Sachregister wird die Brauchbarkeit dieses Handbuches erhöhen und es zu einem Nachschlagebuch für alle Fragen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts machen.

Als Einleitung schickt Verfasser eine Studie über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts voraus, die ebenfalls in zahlreichen Zitaten das Material bietet, das für die angeregten Fragen in Betracht kommt; die am Schlusse dieser Einleitung aufgestellten Thesen kennzeichnen den Standpunkt des Verfassers gegenüber diesen Reformbestrebungen. Vielleicht giebt diese Studie Veranlassung zu einer Arbeit über die Geschichte des planimetrischen Unterrichts in unserem Jahrhundert incl. dem letzten Drittel des vorigen. Jedenfalls würde die Darstellung der historischen Entwicklung nicht ohne Interesse sein und mehr als dies bisher möglich ist, den Zusammenhang zwischen den Fortschritten der Wissenschaften und denjenigen des Unterrichts erkennen lassen; ein Zusammenhang, der allerdings nicht überall zu Tage tritt, sondern nur in mittelbaren und deshalb auch nur schwer zu erkennenden Wirkungen sich äufsert.

Der vorliegende erste Band wird die Grundbegriffe behandeln und also vorwiegend auf dem mathematisch-philosophischen Grenzgebiete sich bewegen. Es leuchtet ein, dafs hier gerade bei der Feststellung der Grundbegriffe ganz besonders sorgfältig vorgegangen werden mufste und dafs das Zitaten-Material hier ein besonders reichhaltiges sein mufste. Übrigens wird die Diskussion der Grundbegriffe in diesem Bande noch nicht zu Ende gebracht werden. Eine Reihe von Fragen, die sich direkt an die vorliegenden Betrachtungen anschliessen, wird erst im folgenden Bande erörtert werden, der voraussichtlich bis zur Behandlung des Dreiecks sich erstrecken wird.

Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts.

(Die am Rand fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Zitate am Schlufs dieser Studie.

Der Gegenstand, der hier behandelt werden soll, hat zwar teils in besonderen Werken, teils in den Fachzeitschriften und zahlreichen Programmen schon eine grofse Reihe von Bearbeitungen gefunden, es erscheint mir aber nicht unwesentlich, ehe ich an den speziellen Teil herangehe, meinen Standpunkt im allgemeinen — besonders gegenüber den Reformbestrebungen — klarzulegen.

Seit die Mathematik durch die Revision der Lehrpläne der höheren Lehranstalten eine gesicherte Stellung auch auf dem Gymnasium gewonnen,[1-6]) waren die früheren Klagen **36** über ihre Zurücksetzung im grofsen und ganzen verstummt,[7]) erst in neuerer Zeit tauchten die vergessen geglaubten wieder auf. Im allgemeinen kann als feststehend angenommen werden, dafs es sich dabei nur zum kleinsten Teile um den Umfang **130** des mathematischen Lehrstoffes handelt,[8, 9]) im wesentlichen **75**

---

[1]) Vgl. auch H. Z. [= Hoffmanns Zeitschr. für mathem. u. naturw. Unterr.] I p. 248 f.

[2]) Vgl. auch H. Z. II p. 46—57. — H. Z. II p. 138—146.

[3]) H. Z. II p. 74—81.

[4]) H. Z. VIII p. 459—474.

[5]) H. Z. XIII p. 148.

[6]) H. Z. XIII p. 410—416; p. 484—488.

[7]) Vgl. H. Z. I p. 1 ff.; 10 ff.; 68 ff.!

[8]) H. Z. I p. 173.

[9]) H. Z. III p. 551 in der Besprechung der Zieglerschen Geometrie durch Scherling.

35 betreffen die Klagen die Sicherheit des Besitzes;[1]) selbst die An-
128 kläger, die den höheren Lehranstalten in Universitätskreisen
33 erwachsen, verlangen keine Erweiterung der auf den Schulen
zu betreibenden Disziplinen.[2]) Ja, wenn ein solches Verlangen
an die Schule gestellt würde, so müfste meiner Meinung nach
demselben auf das ernsteste widerstanden werden, da im Auge
101 behalten werden mufs,[3]) dafs wir nicht zukünftige Mathema-
tiker heranbilden wollen und sollen — so wenig, wie die
höheren Schulen überhaupt zu einem bestimmten Berufe die
Grundlage legen sollen —, sondern dafs wir die uns anver-
traute Jugend geschickt machen, mit Erfolg ihrem selbst-
gewählten Berufe sich zu widmem, dafs wir ihr gleichsam
einen Teil des Rüstzeuges für den grofsen Kampf des Lebens
— im idealen Sinne des Wortes — liefern.

1 Die Zeiten, in denen das Märchen von einer besonderen
186 mathematischen Begabung eine grofse Rolle spielte, gehören
85 glücklicherweise zu den guten alten. Es ist das sicherlich die
93 Folge davon, dafs man sich von dem ehernen Hemmschuh,
86 der früher der mathematischen Methode anhing, frei zu machen
92 gewufst hat, dafs ein freierer Geist waltet. Wohl mag früher
198 diese Behauptung einer besonderen Begabung den Schein ihrer
126 Berechtigung gehabt haben, als die Mathematik in einer wenig
141 ansprechenden Weise vorgetragen wurde. Dafs aber gerade

---

[1]) Resolution der math.-naturw. Sektion der 33. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Gera: „Die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion ist der Ansicht, dafs die Lehre von den Kegelschnitten auch auf Gymnasien und zwar in synthetischer Behandlung aufzunehmen sei — eine Methode, welche auch auf Realschulen mehr als bisher Berücksichtigung verdient.“ H. Z. X p. 76.

[2]) Man vergleiche weiter unten p. 31 und Anmerkungen dazu. Reidt, Anleitung § 19.

[3]) Vergl. hierzu Reidts Anleitung § 3, der mit den Worten schliefst: Es wird also als der wesentliche Zweck auch des mathematischen Schulunterrichts die Teilnahme an der allgemeinen Ausbildung der geistigen Kräfte des Schülers ohne besondere Rücksicht auf dessen künftige Berufswahl hingestellt werden müssen. —

Da an dieser Stelle Reidts Anleitung zuerst zitiert wird, so möge auch hier auf die Besprechung dieses Werkes in Rethwischs Jahresbericht II. B. p. 220 f. durch A. Thaer und in Hoffmanns Zeitschrift XIX p. 191—202 hingewiesen werden.

diese Art der Methode auch ihre begeisterten Anhänger gefunden, beweist der Ausspruch Kästners, dafs die Mathematik um so unverständlicher werde[1]), je weiter sich ihre Methoden von derjenigen Euklids entfernten. Jetzt hat man eingesehen, dafs der mathematische Stoff, wie er auf der höheren Schule geboten wird, gleichmäfsig dem Verständnis aller nahe gebracht werden kann, danach aber auch die Forderungen entsprechend geregelt. Ein Gebiet, das besonders dem erwähnten Ausspruch Recht zu geben schien, war dasjenige der geometrischen Konstruktionsaufgabe. Wie mancher, der sich vergeblich gemüht, die Lösung zu finden, hat sich dabei beruhigt, dafs er eben für dieses Fach nicht begabt sei. Gerade hier ist aber auch ein bedeutender Fortschritt zu verzeichnen. Nagel sagt in der Vorrede zu seiner geometrischen Analysis: „Zugleich lag es in meiner Absicht, auch dem angehenden Lehrer zu zeigen, dafs das Auffinden von Lösungen nicht, wie manche meinen, eine blofse Sache des Zufalls oder einer eigentümlichen, nicht jedem gegebenen Geschicklichkeit sei, sondern dafs auch diesen Übungen bestimmte allgemeine Regeln zu grunde liegen.“ Erst in neuerer Zeit aber dürfte dieser Ausspruch sich allgemeiner Anerkennung zu erfreuen haben, da durch das rastlose Streben der Lehrer der Mathematik gezeigt ist, dafs jeder Schüler,[2]) der für andere Unterrichtsfächer veranlagt ist, auch den von den Gymnasien gestellten Anforderungen in der Mathematik genügen kann. Ohne Überhebung kann wohl gesagt werden, dafs die Didaktik und Methodik in keiner der auf den höheren Schulen gelehrten Disziplinen in der letzten Zeit so bedeutende Fortschritte gemacht hat, wie gerade in der Mathematik.

Die gesetzliche Festsetzung des mathematischen Unterrichtsstoffes erfolgte wohl auch deshalb, weil man erkannte, von welch hohem erzieherischen Werte der mathematische

[1]) Vergl. weiter unten.

[2]) Von neuen Aufgabensammlungen resp. Anweisungen zur Lösung seien nur erwähnt: Petersen, Hoffmann, Fischer, Lieber und Lühmann. Man vergl. die Rezension zu dem letzten der genannten in H. Z. I. p. 341. — Gandtner und Junghans rezensiert in H. Z. III. p. 389.

Unterricht nach den verschiedensten Seiten hin ist. Abgesehen von dem Vorteil, den er den mit ihm eng verknüpften und verwandten Lehrfächern gewährt, zeigt sich sein Einfluſs auch noch in manchem Punkte, wo man ihn vielleicht nicht vermutet.[1]) Und doch würden z. B. die Lehrer des Deutschen alle Veranlassung haben[2-4]), dankbare Freunde der Mathematik zu sein, denn sie ist es, die sie zum Teil vor dem gefürchteten, überschwenglichen Phrasentum im Aufsatz schützt: und noch mehr würden sie ihr zu verdanken haben, wenn alle Lehrer der Mathematik das Wort beherzigen, jede Stunde soll auch zugleich eine deutsche Stunde sein,[5, 6]) denn gerade im mathematischen Unterricht läſst sich eine Vollkommenheit der Sprache in Hinsicht der Korrektheit und Folgerichtigkeit erreichen,[7-9]) die von dem heilsamsten Einfluſs auf das Denken und die Sprache überhaupt sein muſs. Ich will mich bescheiden, nur diesen äuſseren Punkt berührt zu haben, ich muſste es aber thun, da er ein Teil dessen ist, was ich für das Ziel des mathematischen Unterrichts halte. Ich habe schon oben gesagt und wiederhole es noch einmal, die Schule soll nicht eine Vorbereitung für künftige Mathematiker geben, sondern nicht weniger, wie durch ihren Inhalt, auch durch ihre Methode auf den Schüler einwirken, sie soll ihn nicht nur Mathematik

---

[1]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung zu § 4 und § 9.

[2]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 5.

[3]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 17.

[4]) Oppel, Über den Einfluſs des mathematischen Unterrichts auf sprachliche Bildung. H. Z. I. p. 394—417. — p. 443—468.

[5]) Vergl. Sturm, Über einige Inkorrektheiten, die sich in die Sprache besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben. H. Z. I. p. 272 f.

[6]) Vergl. J. C. Becker, Zu dem Kapitel von den Inkorrektheiten, die sich in die Sprache der Mathematik eingeschlichen haben. H. Z. II. p. 89—97. — Ferner: H. Z. II. p. 209.

[7]) Hier muſs auch der Aufsatz erwähnt werden: Sickenberger, Mathematische Orthographie. H. Z. IV. p. 379—391, der sehr viel Beherzigenswertes enthält und zu zeigen geeignet ist, daſs eine sorgfältige Behandlung auch der Form der Mathematik (sit venia verbo) von der gröſsten Bedeutung ist.

[8]) Vergl. auch H. Z. XVIII. p. 113—118.

[9]) Vergl. H. Z. IX. p. 481. — 485—86.

lehren, sondern auch Anschauung, bewuſstes richtiges Sehen, logisches Denken, genaues Sprechen und Schreiben. Schrader 9 geht sogar noch weiter, wenn er sagt,[1]) die Aufgabe ist nicht 99 Mathematik zu lehren, sondern durch Mathematik den Geist 84 zu bilden.

Es wird vielleicht befremden,[2]) wenn ich behaupte, die Mathematik oder genauer die Geometrie solle Anschauung lehren, man wird mir entgegenhalten, daſs vielmehr umgekehrt die Anschauung die Grundlage der Geometrie sei — und derselbe Gedanke wird einen vorwiegenden Platz in meinen späteren Ausführungen einnehmen; ich füge daher, um nicht mit mir selbst im Widerspruch zu scheinen, erklärend hinzu, die Schulung der Sinnesthätigkeit, durch Zeichnen und Naturbetrachtung begonnen, wird durch die Geometrie weitergeführt. Es besteht eine Wechselwirkung zwischen Geometrie und Anschauung. Diese geht vorher, aber sie wird durch die Geometrie geregelt. Anfänglich im propädeutischen Unterricht dienen die Figuren als erstes Mittel zur Weckung der inneren Anschauung, im wissenschaftlichen Unterricht dagegen nur zur Kontrolle oder zur Sicherung der inneren Anschauung. 43

Mit den erwähnten Vorzügen ist aber selbstverständlich die Bedeutung der Mathematik nicht erschöpft;[3]) es würde zu

---

[1]) Erziehungs- und Unterrichtslehre von Dr. W. Schrader. — [p. 524.]

[2]) Vergl. hierzu Reidt, Anleitung § 7.

[3]) Handbuch der praktischen Pädagogik von Dr. H. Schiller.

Schiller, p. 190. Nach einer Würdigung der Bedeutung der Mathematik für Naturwissenschaft, Geographie, physische Geographie und Astronomie fährt Schiller fort: „Die Bildung, welche die Mathematik selbst verleiht, bezieht sich zwar nicht ausschlieſslich, aber doch vorwiegend auf die Verbindung der Vorstellungen durch das Denken . . . — Man hat die Mathematik mit Recht „einen für sich fortentwickelten Zweig" der Logik genannt; dadurch ist sie ganz besonders befähigt, dem Schüler das Wesen der verschiedenen Methoden formaler Untersuchung und logischen Denkens zuzuführen. Wenn sich dieselbe so vielfach mit dem Denkprozesse berührt, den auch die sprachliche Bildung in Bewegung setzt, so unterscheidet sie sich von diesem durch die streng logische Form, bei der es Ausnahmen, welche dem Gesetze sich nicht fügen, nicht geben kann, und die dadurch herbeigeführte Klarheit und Sicherheit." — Vergl. auch: Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien.

weit führen und mit dem eigentlichen Thema zu sehr auseinander liegen,[1]) wenn sie alle aufgezählt werden sollten. Aber eine Äufserung eines bekannten Mathematikers soll noch erwähnt werden. Er sagt, die Bedeutung der Mathematik als formalen Bildungsmittels ist überall anerkannt. Das Charakteristische des mathematischen Unterrichts ist aber nicht vorzugsweise die Wichtigkeit für die Verstandesbildung, vielmehr das Eigentümliche, dafs er früher und vielleicht auch intensiver die freie Selbstthätigkeit der Jugend zu fördern geeignet ist, als die meisten anderen Lehrgegenstände; darin liegt seine pädagogische Bedeutung.

Es wird dann hinzugefügt, dafs dies allerdings vorzugsweise von der Geometrie gelte — und so werden wir hinübergeführt zu der Frage: Sind die beiden Hauptzweige der Mathematik, Arithmetik und Geometrie, von gleichem pädagogischen Werte oder überwiegend einer derselben und in letzterem Falle welcher?

Ich habe ausdrücklich gesagt, von pädagogischem Werte, denn an und für sich dürfte diese Untersuchung müssig sein und es wird wohl niemand auch im Ernste daran denken, den Wert dieser beiden Disziplinen gegen einander abzuwägen. Aber etwas anderes ist es, wenn wir das Ziel ins Auge fassen, das dem mathematischen Unterrichte gesteckt ist, und die beiden Zweige darauf hin prüfen.

Unbestritten wird man vom pädagogischen Standpunkte der Geometrie den Vorzug geben müssen,[2, 3]) denn neben den Vorteilen formaler Verstandesbildung, die sie gleicherweise mit der Arithmetik gemein hat, zeichnet sie sich aus durch ihre Einwirkung auf das Anschauungsvermögen.

46 Geometrie übt den Schüler in der für die Wissenschaft

---

[1]) Vergl. die Anmerkungen zu Seite 4 u. 5.

[2]) Vergl. H. Z. XX. p. 388 (letzte Zeile).

[3]) Vergl. Reidt, Soll beim trigonometrischen Unterrichte das geometrische oder das arithmetische Prinzip vorherrschen? H. Z. VII. p. 1—12. Ferner: Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. H. Z. VII. p. 179. Erler, Das geometrische und das arithmetische Prinzip beim trigonometrischen Unterrichte. H. Z. VII. p. 435—439.

und das Leben äufserst wichtigen Anschauung der Raumverhältnisse, bietet also zugleich etwas bildendes und praktisches.

Ein gewichtiges Zeugnis für unsere Ansicht liegt vor von der „Sektion für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, die im Jahre 1885 zu Dessau abgehalten wurde.[1,2]) Direktor Dr. Gerhardt aus Eisleben sagte in seinem Vortrage, dafs die Geometrie einen höheren Bildungswert als die Arithmetik besitze, werde allgemein anerkannt. Werde sie der Hauptteil des mathematischen Unterrichtes, so erhalte der Schüler ein Bild von dem Zusammenhange einer Wissenschaft. Der Vortrag gipfelt in der These: „auf den Gymnasien ist vorzugsweise Geometrie zu lehren und nur so viel von Arithmetik und Algebra, als zum Verständnis jener notwendig ist.“

Auch Reidt äufsert sich ähnlich in H. Z. VII „über Trig. Unterricht“. „Der Gebrauch analytischer Methoden ist, auch für den Lehrenden, sehr bequem. Die anscheinende Eleganz, die Leichtigkeit und Sicherheit ihrer Anwendung haben etwas Bestechendes, namentlich für jüngere Lehrer, die zudem oft durch ihre akademischen Studien zu einer Bevorzugung jener Methoden auch auf der Schule verleitet werden. Dem gegenüber mufs immer wieder ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dafs der Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts, der ja keine praktischen Mathematiker bilden soll, in der anschaulicheren und die selbständige geistige Thätigkeit jüngerer Leute mehr anregenden Geometrie liegt. Die einseitige Herrschaft der Algebra, welche sich in den oberen Klassen unserer Schulen, wie es scheint, mehr und mehr einnistet, enthält eine grofse Gefahr für die pädagogischen Ziele und die Zukunft unseres Unterrichtsfaches.“

Zugleich mufs hervorgehoben werden, dafs beim geometrischen Unterricht die Gefahr geringer ist, dafs er ausartet in eine die technischen Operationen in den Vordergrund stellende Fachdressur, obwohl hier auch nicht geleugnet werden soll, dafs

---

[1]) Reidt p. 22.
[2]) Vergl. H. Z. XVI. p. 68—69.

58 durch eine allzugroſse Betonung der geometrischen Konstruktionsaufgabe eine ähnliche Gefahr wirklich heraufbeschworen werden kann; eine Gefahr, die allerdings bedeutend abgeschwächt ist durch die gerade auf diesem Gebiete gemachten Fortschritte, wie sie in verschiedenen geradezu hervorragenden Anleitungen zur Lösung planimetrischer Aufgaben zu erkennen sind.

Wird aber die gröſsere Bedeutung des geometrischen 131 Unterrichts anerkannt, so müssen auch Mittel und Wege geschaffen werden, demselben einen vorwiegenden Platz im Gebiete des Lehrplans zuzuweisen. In Süddeutschland hat man, so weit mir bekannt ist, dieser Anschauung Rechnung getragen, dadurch daſs der arithmetische Unterricht erst in der Sekunda beginnt.

112 Auch für uns wäre eine derartige Verschiebung des mathematischen Unterrichtsstoffes durchaus wünschenswert:[1]) wir

---

[1]) Deinhardt scheint in seinem Gymnasialunterricht dieselbe Ansicht zu vertreten. Es heiſst (p. 141): „Der mathematische Unterricht gewinnt aber hierdurch auf dem Gymnasium drei Stufen, denn mit Geometrie muſs angefangen, mit der Arithmetik fortgefahren und mit der Trigonometrie geschlossen werden. Der Gegenstand der Geometrie fällt in die Anschauung und ist daher für den Anfang das Verständlichste. Die Arithmetik erfordert, da sie hier nicht mehr gewöhnliches Rechnen ist, sondern die allgemeinen Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, einen viel höheren Grad von Abstraktion. Dieses Abstraktionsvermögen, das zur Auffassung der allgemeinen Zahl, ihrer Verbindungen und Eigenschaften nötig ist, wird durch das Studium der anschaulicheren Geometrie gewonnen."

„So wird man auch sonst aus den anschaulichen Lehren der Geometrie in die abstrakten Lehren der Arithmetik hinübergewiesen und der mathematische Unterricht ist nur dann gut und verständlich, wenn er aus der Anschauung der Raumgröſse in die Abstraktion der Zahlengröſse überführt."

„Er (der mathematische Unterricht) hat aber, wie aus dem bisher Gesagten hervorgeht, drei Stufen, die geometrische, die arithmetische und trigonometrische Stufe, und also auch drei Klassen, insofern jede Stufe durch eine besondere Klasse äuſserlich dargestellt ist."

Es würde sich dies meiner Meinung nach, also mit meinem Vorschlag insofern decken, als die erste, die geometrische Stufe der Tertia, die zweite, die arithmetische Stufe der Sekunda zukommen würde, während in Prima durch die Vereinigung der beiden Zweige Vertiefung und

würden mehr Raum gewinnen für den geometrischen Unterricht und könnten denselben in Folge dessen intensiver erteilen,[1]) während andererseits das Mißverhältnis zwischen Kapazität und gebotenem Lernstoff beseitigt werden würde, das offenbar besteht und das in erster Linie dazu beigetragen hat, das Interesse für Mathematik im späteren Leben schwinden zu machen und so dem früheren Schüler einer höheren Lehranstalt einen Gegenstand überflüssig, ja abschreckend erscheinen zu lassen, der ihm vom rein praktischen Gesichtspunkt allein schon vom größten Werte war, oder besser, gewesen sein sollte. Wer die Schwierigkeiten kennt, zu jugendliche Köpfe abstraktes Rechnen zu lehren, der wird wahrlich zustimmen müssen.[2])

Außerdem — und das müssen auch die begeisterten Freunde der Arithmetik zugeben — die Arithmetik ist, auch bei dem jetzigen Stande der Frage, in ihren Zielen beschränkt, es wird immer nur ein Teil derselben, ein sehr geringer Teil gelehrt werden können, während die Geometrie, wenn man ihr mehr Luft und Licht gewährt, zu einem vollkommenen Abschluß gebracht werden kann. Es wird wohl auch nicht bestritten werden, daß ganze Teile der Arithmetik rein handwerksmäßig betrieben werden können, ohne daß darunter das Ansehen der Arithmetik oder das Ziel des Unterrichts leidet. Als Beispiel möchte ich die Rechnung mit Logarithmen nennen.

---

wissenschaftliche Verknüpfung und Begründung den Inhalt des mathematischen Unterrichts ausmachen würden. Es heißt dann weiter: „Auf der geometrischen Stufe ist die Geometrie das überwiegende und den Charakter des Unterrichts bestimmende Element und die Arithmetik gehört nur insoweit herein, als sie sich unmittelbar an die geometrische Anschauung anknüpfen läßt.“

Man vergleiche hierzu Reidt Anleitung § 20.

[1]) Man vergl. J. Kober, Über den Beginn des geometrischen Unterrichts. H. Z. XV. p. 105/6.

[2]) Dazu kommt noch ein hervorragender Grund, der sich infolge der neuen Schulordnung ergiebt. Da in Tertia jetzt das Griechische beginnt, würden wir in dieser Klasse mit zwei so schweren Gegenständen beginnen, wie es der Anfang der griechischen Sprache und die abstrakte Arithmetik für jugendliche Köpfe sind. Eins muß weichen und das wird passend die Arithmetik sein, deren Anfang wir nach Sekunda verschieben.

Anderes wieder wird ganz unberücksichtigt bleiben können, wie das Ausziehen der Kubikwurzel etc. —

Gelingt es, der Überzeugung, dafs die Geometrie einen höheren Bildungswert als die Arithmetik besitzt, Geltung zu verschaffen, sei es durch späteren Anfang der Arithmetik überhaupt oder dadurch, dafs man die Geometrie durch Zuweisung einer gröfseren Stundenzahl — selbstverständlich von den jetzt zur Verfügung stehenden — bevorzugt,[1]) so wächst noch die Verpflichtung der mathematischen Lehrer, daran zu arbeiten,[2]) dafs der geometrische Unterricht immer mehr zu einem fruchtbringenden sich gestalte,[3]) dafs er nach Inhalt und Methode seiner hohen Bedeutung gemäfs ausgestaltet werde.

Mit einem gewissen Mitleid sind wir gewöhnt auf England zu sehen, das noch immer im Elementarunterricht nach den Elementen Euklids selbst unterrichtet, die doch gewifs nach Euklids eigener Ansicht kein Lehrbuch sein sollten: aber, wenn wir genauer nachsehen, so haben wir keine Berechtigung dazu, denn es ist bei uns nicht viel anders mit dem Unterricht in der Geometrie bestellt. Die grofsen Errungenschaften des letzten Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie sind an unseren Schulen fast spurlos vorübergegangen, der Unterricht an den höheren Lehranstalten ist von den Fortschritten genau genommen unberührt geblieben.[4]) Zwar wir unterrichten nicht mehr nach Euklid selbst, aber

[1]) Die Erweiterung der drei Lehrstunden in Unter- und Obertertia auf vier wöchentliche Stunden dürfte allerdings als höchst wünschenswert, ja notwendig bezeichnet werden. Der mathematische Unterricht würde aufserordentlich dadurch gewinnen.

Vergl. „Die Stellung der Mathematik und der Naturwissenschaften an unsern Gymnasien" H. Z. XX. p. 241 ff., ferner H. Z. XX. p. 417 ff.

[2]) Vergl. Hoffmann, Zur Didaktik, 2) Wie ist eine regere Beteiligung der (math.-naturw.) Lehrer an didaktischen Fragen zu erreichen? H. Z. IX. p. 276—278.

[3]) E. Müller, Lehrzweck, Lehrbuch und Lehrmethode des geometrischen Unterrichts. — H. Z. II. p. 192—201.

[4]) v. Fischer-Benzon sagt in einer Besprechung von Diekmanns Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie: „Euklidische Geometrie im strengen Sinne des Wortes wird auf

was wir unterrichten, ist im wesentlichen Euklidsche Geometrie,[1,2]) insbesondere was die Methode betrifft.

Die Reihenfolge der Sätze war von Euklid allein nach dem Gesichtspunkte gemacht,[3]) dafs jeder Satz sich aus dem früheren mittelst streng-logischer Schlüsse ableiten lasse. Dabei war der Inhalt der Sätze so unbeachtet, dafs die wunderlichste Zusammenstellung erstanden ist. Daher wurde neuerdings [Mitte dieses Jahrhunderts ungefähr] mit Recht ein Anfang gemacht, die Sätze so zu ordnen, dafs der Inhalt das Prinzip der Einteilung bildete. Wenn behauptet wird, dafs in Folge davon schon jetzt ein übersichtliches, systematisches Ganze entstanden, so ist das wohl zu optimistisch geurteilt. Es bleibt auch ferner die Aufgabe der Verfasser geometrischer Lehrbücher,[4]) nicht nur an äufserer Ausbildung und innerer Befestigung eines feststehenden Ganzen zu arbeiten, sondern vielmehr ein systematisches Prinzip erst zu schaffen.[5])

---

deutschen Schulen schon lange nicht mehr getrieben, gehört auch gar nicht dahin, sondern auf die Universität. Denn reine Wissenschaft, namentlich so abstrakte Wissenschaft wie die in den Elementen Euklids enthaltene gehört nicht in eine Anstalt, die auf wissenschaftliche Studien vorbereiten soll." — H. Z. XVIII. p. 365.

[1]) H. Z: I. p. 216. — Hoffmann, Über schriftliche mathematische und naturwissenschaftliche Schülerarbeiten in höheren Lehranstalten.

[2]) Der Ausdruck Euklidsche Geometrie wird hier nicht in dem Sinne gebraucht, der die Bezeichnung Nicht-Euklidsche Geometrie veranlafst hat.

[3]) Man findet eine Besprechung der Euklidschen Geometrie auch in folgendem Werke: Dr. Carl Heinze, Kritische Beleuchtung der Euklidschen Geometrie. — Berlin 1876, das als Einleitung einer Elementargeometrie vorausgeht.

[4]) Man vergl. die Äufserung von Fischer-Benzon: „Für die Behandlung der Geometrie in der Schule ist in den letzten Jahren viel geschehen und es wird sicher noch einige Zeit darüber hingehen, bevor auch nur die wichtigsten methodischen Vorschläge und Verbesserungen verdaut und von der Mehrzahl angenommen sein werden. Es würde also wünschenswert sein, wenn in der Herausgabe von Lehrbüchern eine kleine Stockung eintreten möchte." H. Z. XV. in einer Kritik der Borthschen Aufgabensammlung.

[5]) Man vergleiche dazu die folgende Äufserung Beckers in seiner Reform des geometrischen Unterrichts: „Und wenn ich nun zurückblicke auf die ganze Danaidenarbeit und sehe, wie wenig die bahnbrechenden

Eine Würdigung der Bedeutung Euklids, wie seiner Schwächen findet sich bei Drobisch (Logik):

„Man hat dem Euklid häufig Mangel an systematischer Ordnung zum Vorwurf gemacht. Dies ist insofern begründet, als bei ihm selbst eine Zusammenstellung der gleichartigen Objekte der geometrischen Betrachtung, vielmehr noch eine nach logischen Einteilungen geordnete Folge derselben vermifst wird, und in dieser Hinsicht seine Elemente keine Muster von logischer Anordnung der Begriffe sind, sondern diese sehr oft durcheinander geworfen erscheinen.“ Dagegen:

„Hinsichtlich der Strenge der Begründung ist die Euklidische Geometrie ein Muster von systematischer Anordnung. Dagegen vernachlässigt sie in auffallender Weise die übersichtliche Aneinanderreihung der Materien, die sie, um der ersteren Forderung zu genügen, oft zerstückelt, so dafs, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, das Ganze einen ziemlich buntscheckigen Anblick gewährt, ja von einer Zusammenschliefsung der Teile zu einem auch äufserlich geordneten Ganzen kaum die Rede sein kann.“

Ähnlich äufsert sich Becker, wenn er sagt, bei Euklid finde sich nur der Nachweis der Richtigkeit jeder Thesis, ohne Darlegung des inneren Zusammenhangs der geometrischen Wahrheiten.

Bekannt ist die Ansicht Schopenhauers über Euklid und seine Methode.[1])

Dem gegenüber ist der Ausspruch Kästners[2]) nicht zu

Leistungen eines Steiner und anderer Erweiterer der Wissenschaft und die deutlichen Winke einiger derselben von denjenigen begriffen und benutzt werden, deren Aufgabe die systematische Neubearbeitung des Lehrstoffes ist, so ......

[1]) Hoffmann, Schopenhauer, der Philosoph, über die Euklidsche Methode und die Mausefallenbeweise. H. Z. XVI. p. 105—107. — Ferner: Märtens, Schopenhauer über den „Mausefallenbeweis“. H. Z. XVI. p. 181—185.

[2]) Wie viel oder wie wenig man auf Kästners Ausspruch geben dürfe, hängt davon ab, wie viel oder wie wenig uns folgende Stelle aus Hankels akademischer Antrittsrede berechtigt erscheint:

..... bis sie von den fast noch dürftigeren Schriften eines Mannes abgelöst werden, der den Litteraturhistorikern als Epigrammendichter

unterdrücken: „Die neueren Werke der Geometrie verlieren umsomehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie sich von Euklid entfernen" und nicht minder wichtig ist das Zu- 180 geständnis eines so bedeutenden Pädagogen, wie Siegmund Günther,[1]) dafs die spanischen Stiefel Euklidischer Methode ihre nicht zu unterschätzenden Vorteile beim Unterricht hätten. Aber es mögen auch noch andere wichtige Stimmen vernommen werden.[2])

Erler sagt bei der Besprechung der Behandlung der Elementargeometrie: Hier sind zwei Punkte ins Auge zu fassen,[3]) einmal die Auffindung und die Anordnung der geometrischen Wahrheiten, zweitens die Begründung oder die Beweise derselben. Man hat durch die Jahrhunderte hindurch nach dem Vorgang des Euklid über das Auffinden der Sätze selbst kein Wort verloren, sondern sie als gegeben angesehen und die Methode der Beweisführung beschränkt: dabei sind die einen synthetisch, die andern analytisch verfahren: wesentlich aber heuristisch. Auf diese Zeit folgte ein Rückschlag und neuer- 200 dings (1860) die genetische Methode, die nicht ganz ohne Berechtigung beansprucht, die allein naturgemäfse zu sein. 116

Trotzdem ist Erler aus verschiedenen Gründen gegen diese Methode, die aber im Laufe ihrer Entwicklung Euklid immer mehr in den Hintergrund gedrängt hat.

In der Vorrede zu seiner Planimetrie äufsert sich Spiecker:

---

wohl bekannt ist, von dem der Geschichtsschreiber der Mathematik aber kaum mehr zu sagen weifs, als dafs er Nichts geleistet hat. Ich spreche von Kästner, der seiner Zeit nicht nur als vorzüglicher Lehrer, sondern auch als Wunder eines Mathematikers galt und dessen überall verbreitete Lehrbücher trotz ihrer Gehaltlosigkeit und geschmacklosen Weitschweifigkeit von dienstbeflissenen Schülern noch mit Kommentaren versehen wurden, die fast einen bornierten Leser vorauszusetzen scheinen.

[1]) Günther in einer Besprechung der Schröderschen Planimetrie. H. Z. XIII. 300. „Man hat an der dogmatischen Darstellung und an ihrem vielleicht etwas schwerfälligen Rüstzeug von Lehrsatz, Zusatz, Aufgabe etc. mancherlei auszustellen gewufst und gewifs nicht ohne allen Grund; allein, je länger wir selbst im Lehrfach thätig sind, umsomehr haben wir uns überzeugt, dafs diese „spanischen Stiefel" einen sehr hohen mnemotechnischen Wert besitzen."

[2]) Man vergl. auch H. Z. XIV. p. 460 ff. und p. 510 ff.

[3]) Schmidts Encyklopädie II. p. 733.

„Den Anforderungen, welche an den geometrischen Unterricht gestellt werden,[1]) genügt ein synthetischer Vortrag der Euklidschen Geometrie weder hinsichts der Methode, noch dem Umfange der Kenntnisse nach. Dieser Unterricht soll sich intensiv zu einer Gymnastik des Geistes gestalten, welche die Denkkraft weckt und übt, und vorzüglich das Produktionsvermögen stärkt, indem er die Fruchtbarkeit eines streng methodischen Verfahrens zum Bewufstsein bringt (neben der Mitteilung von Anschauungen und Kenntnissen)."

Die mathematische Sektion der Schulmännerversammlung zu Leipzig (1872?) fafste den einstimmigen Beschlufs:[2]) „dafs der Weg des Euklid absolut zu verlassen ist und dafs dem Unterricht in der Geometrie vorausgehen mufs ein propädeutischer Unterricht, der von der Stereometrie ausgehend die Anschauung mittelst des Zeichnens übt." Vergl. dazu Herbarts ABC der Anschauung.

J. C. V. Hoffmanns Ansichten gehen aus folgenden Worten hervor:[3]) „Alle erfahrenen Lehrer der Mathematik werden mit mir wohl darin übereinstimmen, dafs die alte von Euklid ererbte dogmatische Methode des geometrischen Unterrichts, verbunden mit dem Umstande,[4]) dafs in unseren Schulen die

---

[1]) Spiecker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Potsdam, Stein. — Rezension desselben in H. Z. III. p. 173 f. und p. 499. „ganz besonders durch die Einflechtung der neueren Geometrie, welche hier mehr als in den meisten Lehrbüchern hervortritt, zeichnet sich dieses Werk vor vielen anderen aus und ist wegen dieser Vorzüge sehr zu empfehlen."

[2]) H. Z. III. p. 406—408.

[3]) H. Z. XI. p. 343—44 in dem Aufsatze: „Determinanten oder nicht? Eine Gefahr!"

[4]) Vergl. auch Hoffmann, Zur Reform des math. und naturwiss. Gymnasialunterrichts in Preufsen. H. Z. X. p. 184—190. — H. Z. X. p. 317—332. — H. Z. X. p. 401—406. — Besonders wichtig p. 330: „In der Mathematik sollte besonders die genetische (für die Schüler die heuristische) Methode empfohlen und angewandt werden, nicht aber die dogmatische; doch mache man die Schüler auch mit der letzteren bekannt und lasse sie den Unterschied und die Vorzüge und Nachteile beider Methoden selbst herausfühlen und finden. Vor Allem werde die Anschauung in den Dienst genommen; die Geometrie verlangt dies schon von selbst, während die Arithmetik vermöge ihrer abstrakten Natur die Anschauung viel nötiger bedarf, aber leider zu wenig in ihren Dienst nimmt."

wissenschaftliche Geometrie nicht durch einen propädeutischen Kursus vorbereitet wird, dafs vielmehr, selbst in Volksschulen, verkehrter Weise die abstraktere Arithmetik der weit anschaulicheren Geometrie vorangeht — für den mathematischen Unterricht verhängnisvoll geworden ist: denn diese Methode hat den früheren trostlosen Zustand dieses Unterrichtszweiges hervorgerufen. Namentlich aber hat sie den weit verbreiteten jetzt noch nicht ganz ausgerotteten Aberglauben erzeugt und genährt, dafs zur Mathematik besondere Anlagen gehörten. —

Hoffmann spricht sich dann ebenfalls für die genetische Methode aus.[1]

Zum Beweise dafür, dafs trotz so wohlbegründeter und klar ausgesprochener Ansichten Euklids Methode noch vorherrsche, brauche ich nur auf die gangbarsten Lehrbücher der Planimetrie hinzuweisen. Im besten Falle ist den bunt zusammengewürfelten, ohne inneren Zusammenhang neben einander gestellten Lehrsätzen ein Anhang hinzugefügt, der über die wichtigsten Resultate der neueren Geometrie einen kurzen Überblick gewährt. In diesem Sinne spricht sich auch Rausenberger in der Einleitung zu seiner bemerkenswerten Elementargeometrie aus, auf die ich mit ganz besonderem Nachdruck hinweisen möchte.[2]) Dieses Buch will kein Schulbuch sein, es giebt vielmehr eine wissenschaftliche Bearbeitung der Elementarmathematik, wie sie bis jetzt durchaus fehlte, so dafs hauptsächlich dieser Vernachlässigung der Elemente es zuzuschreiben ist, dafs die Fortschritte der Wissenschaft den elementaren Lehrbüchern überhaupt nur sehr wenig zugute gekommen sind.

Unter anderem sagt Rausenberger: „Die Elementargeometrie ist seit den Zeiten Euklids beträchtlich erweitert und vermehrt worden, und viele der neuen Sätze sind selbst in

---

[1]) Auch Trendelenburg verlangt in den Logischen Untersuchungen (1840) im zweiten Bande Seite 290 ff. die genetische Darstellung für die Mathematik und giebt im Pythagoräischen Lehrsatz eine Probe davon.

[2]) Besprochen von Schumacher in H. Z. XX. p. 517—521. Vollständiger Titel: Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. Leipzig, Teubner.

Schulbücher übergegangen; allein sie erscheinen hier meistens nicht mit den alten Gegenständen zu einem einheitlichen Ganzen verbunden, sondern mehr äufserlich angefügt. Findet man doch nicht selten die Ansicht verbreitet, dafs die neuere Geometrie etwas Grundverschiedenes von der alten Eukli-dischen sei. Namentlich wird die sogenannte Geometrie der Lage in direkten Gegensatz zur alten Geometrie des Mafses gebracht. Und doch ist es an sich klar, dass es nur eine einzige Geometrie geben kann, deren Teile sich zu einem grofsen Ganzen zusammenfügen.

Ist aber unsere Elementargeometrie ein einheitliches Ganzes? Ist sie nicht vielmehr ein Konglomerat einzelner Sätze und Sätzchen, von denen sich wohl manche zu Gruppen vereinigen, die aber zum Teil auch recht äufserlich zusammengestellt sind?“

Und an einer anderen Stelle derselben Einleitung wird gesagt: „Die Darstellung hat ihre Richtung zu sehr auf spezielle Eigenschaften und Figuren von besonderem Charakter genommen und verliert hierdurch die Allgemeinheit vielfach aus den Augen.“

Denselben Gedanken finden wir auch in einer Rede Han-106 kels,[1]) die er beim Eintritt in den akademischen Senat zu Tübingen über die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten gehalten hat, wie in der Vorrede zu seiner projektivischen Geometrie.

Reidt, der diese Stelle auch in seiner Anleitung zum mathematischen Unterricht mitteilt,[2]) fügt hinzu: „Diese Worte kennzeichnen vortrefflich den Gegensatz zwischen der alten und neuen Methode, und es ist sehr leicht zu verstehen, wenn die Kenner der letzteren in Begeisterung für dieselbe den Wunsch hegen, die gewaltigen und unbestrittenen wissenschaftlichen Vorzüge derselben auch dem Schulunterricht zu teil werden zu lassen.“

Dafs trotzdem eine plötzliche Änderung der Methode nicht

---

[1]) Dr. H. Hankel, die Entwicklung der Mathematik in den let[illegible]n Jahrhunderten. — Tübingen, Fucs.

[2]) Dr. Fr. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht. — Berlin, Grote. — [p. 178.]

am Platze,[1]) ist von vielen Seiten ausgesprochen. In jugendlicher Begeisterung für die geistreiche Auffassung fühlt man sich versucht,[2]) das Alte völlig über Bord zu werfen und den geometrischen Unterricht in der Schule ganz nach Steiners Art zu betreiben. Aber die neue Methode hat sich nirgends erhalten, selbst die bezüglichen, zum Teil vorzüglichen Schulbücher haben wenig Glück gehabt: ein wenig pädagogisches Studium oder Erfahrung genügte, die schwache Seite zu erkennen. Wenn auch nicht so schroff, urteilen doch viele in 140 gleicher Weise.

„Es möchte sich also empfehlen,[3]) ohne gerade das System der neueren Geometrie als solches aufzunehmen,[4]) doch im Geiste derselben zu unterrichten," sagt Kober.

„Im Unterrichte der Elementargeometrie bleibt die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen,[5]) wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert. Die Sektion begrüfst mit grofser Freude die von Dr. Hubert Müller in dieser Hinsicht eingeleiteten Schritte."

Auch Reidt verschweigt a. a. O. nicht, dafs der gewünschten Neuerung gewichtige Bedenken entgegenstehen, ebenso wie Rausenberger a. a. O. die Schwierigkeiten hervorhebt, die in der Benutzung zweier Fundamentallinien, der Geraden und des Kreises, der als solcher für sich und nicht als Kegelschnitt in die Schulgeometrie gehöre, entständen. Rausenberger erklärt ausdrücklich, dafs er eine Geometrie, aus der der Kreis verbannt ist, als gänzlich ungeeignet für den Unterricht in den mittleren Klassen höherer Lehranstalten ansieht. Dieser letztere Umstand scheint ihm neben der schon

---

[1]) A. Ziegler, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. H. Z. III. p. 184—196.

[2]) Vergl. auch: Schwering, Aufgabe und Anschauung. — Progr. Coesfeld, 1889.

[3]) Vergl. die Rezension von: Hartmann, Genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie durch J. Kober; H. Z. IV. p. 286—291.

[4]) J. Kober, Über das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. II. p. 249—264.

[5]) Resolution der mathematischen Sektion der 31. Philologen-Versammlung.

erwähnten der Einheitlichkeit der Elementargeometrie sich hindernd in den Weg zu stellen.

Das Buch Rausenbergers selbst bedeutet aber einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete der systematischen Elementargeometrie, obwohl es direkt zur Benutzung als Schulbuch allerdings nicht geeignet erscheint, so z. B. § 9, der sich mit dem Parallelentheorem beschäftigt.

Eine Anregung zur Erörterung der Frage nach der Einführung der Anschauungsweisen und der Methoden der sogenannten neueren Geometrie gab unter anderm eine 1872 in Zarnckes Lit. Zentralblatt veröffentlichte Rezension eines geometrischen Lehrbuches durch die Bemerkung:[1, 2]) „und doch dürfte nur eine wesentlich von der bisherigen abweichende und dieselbe verbessernde Darstellung der Elementargeometrie es rechtfertigen, dafs zu der grofsen Zahl geometrischer Elementarbücher, welche die deutsche Literatur aufzuweisen hat, noch ein neues hinzukommt. Das Bedürfnis einer solchen Umgestaltung der Elemente hat sich schon längst fühlbar gemacht. Es ist eine systematische Verarbeitung dieser Lehren nötig, es genügt nicht, nach Art unseres Verfassers und anderer Schriftsteller vor ihm, anhangsweise die Lehre von der harmonischen Teilung etc. mit aufzunehmen.“

Im Anschlufs hieran sagt z. B. V. Schlegel: „Es könnte in Verwunderung setzen, dafs die gewaltigen Reformen Steiners so ganz spurlos an dem auf der Schule behandelten geometrischen Stoffe vorübergegangen sind,[3]) wenn man sich nicht vergegenwärtigen müfste, dafs eben bisher kaum etwas geschehen ist, um den grofsen Grundgedanken Steiners: die Einordnung aller geometrischen Wahrheiten in ein den Verstand befriedigendes System, auch für die Elemente der Geometrie fruchtbar zu machen.“

---

[1]) Man vergleiche hierzu die ersten Bände der Hoffmannschen Zeitschrift (aus den Jahren 1870 u. 71), deren bezügliche Artikel aus andern Stellen der vorliegenden Arbeit zitiert sind.

Ferner: H. Z. III. p. 93 (Briefkasten).

[2]) Zarnckes „Literarisches Zentralblatt“ Jahrgang 1872. Nr. 3 Besprechung eines Lehrbuches der Geometrie durch E. Müller.

[3]) Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. — H. Z. VII p. 179—84.

An einer anderen Stelle sagt er:[1]) „So sehen wir denn die Geometrie der Schule wesentlich zurückgeblieben hinter den Anforderungen der Zeit. Während die Lehrbücher nach wie vor das alte Thema der Kongruenzsätze variieren, finden die Lehren der neueren Geometrie, weil sie eben dem veralteten Rahmen unmöglich eingepafst werden können, höchstens in Anhängen eine Stelle.“

Der ganze Aufsatz,[2]) aus dem die vorliegende Stelle entnommen ist, ist für die behandelte Frage so wichtig und enthält so viel Gutes, dafs er eigentlich vollständig hier reproduziert werden müfste. Wir müssen uns genügen lassen, mit Nachdruck auf denselben hingewiesen zu haben. —

Der Vorwurf Schlegels, dafs für die neuere Geometrie im Elementarunterricht wenig oder nichts geleistet worden, trifft in erster Linie die Gelehrten, die ganz in Anspruch genommen durch die höhere Mathematik nicht Zeit und Lust haben, sich mit Elementarmathematik zu beschäftigen.

Es würde kein gutes Licht auf die Lehrer der Mathematik an höheren Schulen werfen, wenn auch sie dieser Vorwurf träfe, wenn dieser Satz auch noch jetzt seine Gültigkeit hätte.

Von den verschiedensten Seiten ist der Versuch gemacht worden, — es liegen bereits eine stattliche Anzahl von Lehrbüchern vor — die Elemente in dem geforderten Sinne umzuarbeiten, unter denen diejenigen von Schlegel selbst, von H. Müller, Kruse, J. K. Becker, Worpitzky, Henrici und Treutlein besonderer Erwähnung wert erscheinen, denen sich das schon genannte von Rausenberger anschliefst. 10

Auch der Versuch des Professor Fresenius in Frankfurt a. M.,[3]) die ‚Kongruenzsätze im Zusammenhang durch

---

[1]) H. Z. VII p. 182 vergl. auch p. 183: „Dagegen wird eine auf neuen Grundlagen beruhende Darstellung der Geometrie den Unterricht voraussichtlich in dem Grade erleichtern, dafs er auch die einfacheren Lehren der neueren Geometrie in gebührender Weise wird berücksichtigen können, ohne mehr Zeit in Anspruch zu nehmen als bisher.“

[2]) Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schulgeometrie. — H. Z. VII. p. 179—184.

[3]) J. K. Becker bemerkt allerdings in einer Anmerkung seiner Reform des geometrischen Unterrichts: „Ist es auch schwer, besonders

49 symmetrische Lage zu lehren, mufs hier genannt und als besonders gelungen bezeichnet werden. Solche,[1, 2]) einzelne Gebiete der Elementargeometrie behandelnde Arbeiten werden am besten eine einheitliche Gestaltung des Ganzen vorbereiten.[3]) Denselben Gegenstand behandelt auch ein Aufsatz von Dr. H. Müller in Hoffmanns Zeitschrift,[4]) betitelt „Schulgemäfse Behandlung der Symmetrielehre“, der aufserordentlich viel Beherzigenswertes enthält und keinem Lehrer der Mathematik unbekannt sein sollte.

119 Aber die Abfassung von Lehrbüchern scheint im grofsen und ganzen der Gipfel der Erfolge gewesen zu sein,[5]) denn die Einführung in den Unterricht hat sich, soweit mir be-

---

in einem Schulbuche für Tertianer seinen (v. Staudt) Anforderungen ganz gerecht zu werden, so mufs man doch darüber stutzig werden, auch seinen Hinweis auf die Alles durchdringenden Gesetze der Symmetrie so ganz unbeachtet zu sehen, dafs noch nach 24 Jahren ein Frankfurter Pädagoge (Fresenius) die Verwertung derselben für die Geometrie als etwas Neues empfehlen konnte.“ — Das Urteil erscheint etwas scharf: denn, wenn auch die Anregung von v. Staudt ausging, so war es doch Fresenius, der sie benutzte und der Schule dadurch einen wichtigen Dienst leistete. — Wer kennt denn jetzt nach 18 Jahren die Arbeit Fresenius'? Das Prinzip der Symmetrie ist doch wohl auch älter, als hier angenommen.

[1]) Fresenius, die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke und Zugehöriges in eine neue Fassung gebracht. — H. Z. II. p. 1—14.

Ferner: H. Z. II. p. 210. — Ferner: Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur, besprochen in H. Z. VII. p. 64—67 durch Sickenberger.

[2]) Vergl. F. Meyer, Über die Behandlung planimetrischer Aufgaben durch Schüler. H. Z. XVI. p. 91—104.

[3]) Auch Schlegels Bemühungen um die Grassmannsche Ausdehnungslehre seien hier erwähnt. — Vergl. Schlegel, Proben aus einer neuen auf der Grassmannschen Ausdehnungslehre fufsenden Bearbeitung der Elementar-Mathematik. — H. Z. II. p. 308f. Schlegel, System der Raumlehre. Leipzig 1872.

[4]) Vergl.: H. Müller, Schulgemäfse Behandlung der Symmetrielehre. H. Z. VII. p. 169—178. p. 257—265.

[5]) Hubert Müller sagt also ganz richtig in der Einleitung zu seinen Elementen der Planimetrie, „dafs er sein Buch auf die Gefahr hin verfafst hat, dafs die Abweichungen von dem Üblichen dem Buche den Weg in die Schulen versperren sollten.“

Zitiert nach H. Z. XVII. p. 608.

kannt, noch nicht vollzogen, und Kambly und Koppe beherrschen nach wie vor den geometrischen Markt,[1-3]) obwohl gerade in diesen Lehrbüchern die erwähnten Nachteile sich in hervorragendem Maſse geltend machen, besonders da sie allzusehr Schulbücher sind. In Bezug auf die Korrektheit der Sprache z. B. können sie als Muster gelten, wie es nicht sein soll.[4])

---

[1]) Selbst das vortreffliche Lehrbuch von Dr. Hub. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen, hat erst 1889, also 15 Jahre nach seinem Erscheinen die dritte Auflage erlebt; in der Rezension der 1. Auflage von Scherling heiſst es: „Die Auswahl aus dem groſsen Schatze der neueren Geometrie für den Schulunterricht ist keine kleine Arbeit. Der Verf. scheint uns überall das Rechte getroffen zu haben, um bei aufgeweckten und strebsamen Schülern das Interesse an der Geometrie zu wecken und zu heben, und indem wir das vorliegende Werk nochmals der Beachtung der Lehrer der Mathematik auf das Wärmste empfehlen, schlieſsen wir uns dem Urteile des sel. Prof. Clebsch über das Manuskript desselben an, der eine Umbildung vieler Teile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der Hand der neueren Geometrie für ein Bedürfnis der Zeit erklärte, und den vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachtete . . . .“ — Vergl. H. Z. V. p. 449—474. — Dieses eine Beispiel möge genügen. Wie viel Auflagen hat in gleicher Zeit Kamblys Planimetrie erlebt, die 1884 in 74. Auflage erschien? — Vergl. auch: H. Z. VI. p. 232—236. — H. Z. VII. p. 70—73. — H. Z. IX. p. 447—452.

[2]) Schlegel giebt in H. Z. XI p. 185 eine vergleichende Tabelle der eingeführten Lehrbücher, der wir folgendes entnehmen: Kamblys mathematische Lehrbücher sind an 217 Anstalten eingeführt, dann folgt Koppe an 51 Anstalten, Mehler an 44, Reidt an 29, während es 55 mathematische Lehrbücher giebt, die nur an je 1 Anstalt in Gebrauch sind. — Schlegel fügt hinzu: „Daſs die Qualität der meistverbreiteten Bücher einen Schluſs auf die im allgemeinen erreichte wissenschaftliche Höhe des Unterrichts in dem betr. Fache gestatten wird.“

[3]) H. Z. XI. p. 2.

[4]) Beispiele hierzu auch in H. Z. V. p. 276 von Reidt angegeben. Vergl. Dr. Ohrtmanns Kritik der Kamblyschen Elementarmathematik und des Verfassers Entgegnung in H. Z. VII. p. 449 und die sich daran anschlieſsenden günstigen Beurteilungen. — Vergl. ferner Kolbes scharfe Rezension in der neuen österr. Zeitschrift für Realschulen. — Desgl. Dr. H. Bolze in H. Z. IX. 190, der Kambly Leichtfertigkeit und mangelnde Logik vorwirft. § 27 wird als sensationelles Beispiel erwähnt, der Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel als unmathematisch zurückgewiesen. — H. Z. IX. 319 findet sich noch folgende Anmerkung: Zu

Verfolgt man die Bestrebungen aufmerksam, so ist aber deutlich, daſs das Alte sich überlebt hat,[1, 2]) daſs dessen Unzulänglichkeit, ja Schädlichkeit erkannt ist und daſs etwas Neues an seine Stelle treten muſs.

188 Nun ist die groſse Frage,[3, 4]) Reform oder neuere Geo-190 metrie? Es scheint aus all den angeführten Äuſserungen und 122 Thatsachen hervorzugehen,[5]) daſs eine Revolution zu gunsten 203 der neueren Geometrie ohne Erfolg verlaufen würde. — Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, daſs Versuche mit neuerer Geometrie teilweise schon angestellt sind,[6]) besonders in Österreich, wo auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie Ausgezeichnetes geleistet wird. —

Dagegen muſs entschieden eine Reform des geometrischen Elementarunterichts gefordert werden in dem Sinne,[7]) daſs die neueren Methoden, insofern sie das Verständnis und die Einsicht nicht erschweren, sondern erleichtern, und insofern als sie gröſsere Anschaulichkeit und natürlichere Beweisführung gewähren, dem geometrischen Elementarunterrichte dienstbar gemacht werden.

„Nachdem die Methodik zur Erleichterung wesentlich beigetragen,[8]) den Stoff zusammengezogen hat, ist es möglich, auch aus der neueren Geometrie einzelne Partieen aufzunehmen, was sich ebensowohl wegen der Eigentümlichkeit und All-

---

den Rezensionen von Kambly. Auch in den Blättern für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen ist in Bd. XIII. Heft 3 eine abfällige Rezension des obengenannten Buches enthalten.

[1]) Vergl. hierzu Reidt Anleitung § 43 und § 44.

[2]) Vergl. die Rezension von: Stoll, Anfangsgründe der neueren Geometrie für die oberen Klassen etc. — in H. Z. III. p. 488—495.

[3]) Vergl. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule.

H. Z. I. p. 474—490. — Ferner: H. Z. II. p. 391—409. — H. Z. II. p. 494 ff. H. Z. III. p. 11 f. — p. 249—264. — 265.

[4]) Vergl. H. Z. XIV. p. 73.

[5]) Vergl. H. Z. XVIII. p. 58.

[6]) Vergl. auch: H. Z. II. p. 228—239.

[7]) Vergl. die Rezension der Recknagelschen Geometrie (München 1871) in H. Z. III. p. 282 und ebenda p. 285 die Besprechung des Brockmannschen Lehrbuches.

[8]) Schmidts Encyclopädie II. (?) p. 734.

gemeinheit der Methoden, als wegen der weitgreifenden Anwendbarkeit der gefundenen Wahrheiten empfiehlt."

Und Prof. Günther sagte in seinem Vortrage „Die pädagogisch verwertbaren Errungenschaften der Neuzeit" auf der 32. Versammlung der Philologen und Schulmänner zu Wiesbaden:[1] .... „Es kann im besondern uns Gymnasiallehrern .... meiner Meinung nach zunächst nur darauf ankommen, dem projektivischen Grundgedanken gleich vom ersten Anfang an zum Durchbruch zu verhelfen;[2, 3]) dies thun wir, indem wir sofort den wichtigen Begriff des Parallelismus ein- 181

---

[1]) Denselben Gegenstand behandelt ein Vortrag von Prof. Hauck (Tübingen) „Über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidischen Geometrie und über die Aufnahme der ersteren in den Lehrplan der 10klassigen Realschulen und Realgymnasien" gehalten in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Tübingen vom 25. bis 28. September 1876. — Siehe H. Z. VII. p. 510—514. Hier seien die drei Sätze wiedergegeben, in die Prof. Hauck seinen Vortrag zusammenfafst:

1. Es ist mit Rücksicht auf den gegenwärtigen Stand sowohl der Mathematik als der technischen Wissenschaften dringendes Bedürfnis, dafs die neuere Geometrie in den Lehrplan der 10klassigen Realschulen und Realgymnasien aufgenommen werde.

2. Die Herübernahme von einzelnen Sätzen der neueren Geometrie als Anhängsel an die Euklidische Geometrie kann dieses Bedürfnis nicht befriedigen. Andrerseits müssen die in jüngster Zeit gemachten Versuche einer Verschmelzung der Geometrie der Lage und der Geometrie des Mafses teils als ihren Zweck nicht erreichend, teils als verunglückt bezeichnet werden. Dagegen ist die Reformirung der Euklidischen Geometrie im Sinne der neueren Geometrie ein dringendes Bedürfnis.

3. Die naturgemäfseste Stelle für die Einschaltung der neueren Geometrie in den Lehrplan der höheren Lehranstalten ist im Anschlufs an die deskriptive Geometrie, und zwar zwischen dem I. und II. Teil derselben nach der landläufigen Einteilung.

Die Resolutionen der Versammlung, die sich hieran anschlossen, sind weiter oben im Text angeführt.

Vergl. hierzu: Ausführlichere Mitteilungen eines Passus aus dem Vortrag über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidschen von Hauck. H. Z. VIII. p. 91—95.

[2]) Günther, Die pädagogisch verwertbaren Errungenschaften der Neuzeit, Vortrag etc. siehe H. Z. IX. p. 80—88. Seite 84.

[3]) Vergl. Buchbinder, Über die synthetische Behandlung der Kegelschnitte auf Gymnasien. H. Z. X. p. 70—76.

führen, die Grundgebilde der Geometrie der Lage, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel, gebührend betonen und soviel als möglich die prinzipielle Scheidung zwischen Ebene und Raum als unnatürlich fortfallen lassen.[1]) — Es werden dann die Arbeiten von Wolf, Frischauf, Hankel, H. Müller erwähnt und gewürdigt. . . . . Bei dieser Art der Auffassung . . . . werden wir fürs erste bestehen und auch mit der Euklidischen Geometrie, welche aus unzähligen Gründen doch auch Manches für sich hat, einen leidlichen modus vivendi herstellen können." Es folgt dann noch ein Lob der Konstruktionsaufgaben.

Bei der Betrachtung der neueren Methoden scheint mir von ganz besonderem Werte die Äufserung, dafs das Ideal der geometrischen Beweisführung die Evidenz der Notwendigkeit sei; dafs aber Beweis und Lehrsatz nicht als glücklicher Einfall eines besonderen Gelehrten oder als zufällig gefundener Kunstgriff erscheinen dürften. Nur möchte ich diese Wahrheit auf das ganze System der Elementargeometrie ausgedehnt wissen, auch die Reihenfolge der Sätze und ihr Zusammenhang darf nicht als etwas zufälliges erscheinen, die Entwicklung der Geometrie mufs durchaus nach genetischen Grundsätzen erfolgen.

In vielen Aussprüchen finden wir diesen Grundsatz aufgestellt[2]), von denen nur einige hier angeführt werden sollen: „Am wenigsten sind die nach breiter dogmatischer Methode, nach dem Muster Euklids bearbeiteten, eine genetische Anordnung gänzlich verschmähenden Lehrbücher für die Schule brauchbar", oder: „Eine Lehrweise, welche schriftlich und mündlich lediglich die dogmatische Methode in der alten von Euklid ererbten starren Form befolgt, ist schonungslos zu verurteilen", und ferner ein Ausspruch, der uns, die Lehrer der Mathematik, besonders nah angeht:[3])

170 Gerade diese Methode (die dogmatische) hat dem mathe-

---

[1]) Man vergl. hierzu das mehrfach zitierte Programm von Schwering. Coesfeld 1889.

[2]) Vergl. E. Müller, Offener Brief an den Herausgeber. — H. Z. III. p. 370—75.

[3]) H. Z. I. p. 246—47.

matischen Unterricht empfindlich geschadet, da sie das Dogma 171
von der Unbegreiflichkeit der Mathematik mit befestigen half.“ 73
Einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete des elemen- 196
taren geometrischen Unterrichts bedeutete die Einführung des 50
sogenannten propädeutischen Unterrichts.[1-5]) In der richtigen 178
Weise erteilt macht derselbe nicht nur den Schüler mit den 209
Gebilden der ebenen Geometrie vertraut,[6-8]) er nützt auch da- 117
durch, dafs der Schüler unter Aufsicht sich an den Gebrauch 65
von Lineal und Zirkel gewöhnt. Die durch eigene Anschauung 94
und eigene Ausführung mit Lineal und Zirkel erworbene ver- 61
traute Kenntnis geometrischer Formen mufs auf dieser Stufe
den Ersatz bilden für die mangelnde Fähigkeit folgerichtigen 89
Schliefsens. Der vorbereitende Unterricht beschränkt sich auf 174
die Übung der Anschauung; die Übungen im Schliefsen müssen 14
der wissenschaftlichen Geometrie vorbehalten bleiben; ja viel- 164
leicht kann sogar in den letzteren anfänglich von strengeren 195
Beweisen abgesehen werden, da ein geübteres Schlufsvermögen 175
bei den Schülern vorausgesetzt wird, als der betreffenden Alters- 176
klasse zugemutet werden kann. Über die zuletzt erwähnte 177
Schwierigkeit aber würde man leicht hinwegkommen, wenn
man die Arithmetik erst in Sekunda begönne. Dann könnte
der propädeutische Unterricht in der Geometrie noch durch 21

---

[1]) Man vergleiche hierzu: Reidt, Anleitung. § 40 u. § 41.

[2]) Vergl. Hoffmann, Proben aus einer „Vorschule der Geometrie“. H. Z. IV. p. 23—35.

[3]) Vergl. die geometrische Formenlehre vor einem Vereine Leipziger Lehrer. H. Z. XX. p. 468—473.

[4]) Erler, Ein propädeutischer Unterricht in der Geometrie ist notwendig, H. Z. X. p. 76—77. These: „In der Geometrie ist ein besonderer propädeutischer Unterricht nötig, welcher jedoch dem Inhalte des geometrischen Lehrgangs nicht vorgreifen darf.“

[5]) Vergl. die Rezension von: J. C. V. Hoffmann, die Vorschule der Geometrie. H. Z. V. p. 237—43.

[6]) Vergl. H. Kiefsling, das geometr. Zeichnen als Vorschule für den math. Unterricht. — H. Z. I. p. 47—59.

[7]) Vergl. O. Meyer, der geometrische Zeichenunterricht in Quinta. Schwetz, Progymnasium. Progr. Nr. 38 besprochen in H. Z. XVI. p. 520.

[8]) Vergl. Diekmann, Der (erste) geometrische Unterricht, eine Naturgeschichte des Raumes. H. Z. XX. p. 381—382.

die ganze Quarta hindurch fortgesetzt werden und würde so erst in seiner vollen Bedeutung zu Tage treten.

Freilich müfste er sich dann nicht auf einfaches Figurenzeichnen beschränken, sondern gewissermafsen die Anfangsgründe der Geometrie der Lage umfassen, jedenfalls müfste er so erteilt werden, dafs er die Bewegung der Figuren oder vielmehr die Entstehung derselben durch Bewegung verdeutlichte.

So würde durch die blofse sinnliche Anschauung,[1]) ohne dafs irgend ein Anspruch an abstrakte Vorstellung gemacht zu werden brauchte, der Schüler mit den Gebilden der Planimetrie vertraut werden. Der Grundsatz vom besondern zum allgemeinen ist nirgends mehr als gerade hier anzuwenden. Nicht minder soll der Schüler schon in der Propädeutik einen Vorgeschmack der genetischen Methode bekommen, nach welcher die räumlichen Gesetze naturgemäfs (ungekünstelt) aus- und aufeinander folgen und sich entwickeln. Es sind hier ebenso wie in der wissenschaftlichen Geometrie die Aufgaben nach dem genetischen Prinzip zu ordnen.[2]) Erst im eigentlichen wissenschaftlichen Unterricht, der also mit Tertia erst beginnen würde, müfste man davon absehen, nur zur sinnlichen Anschauung und zur bildlichen Darstellung konkreter Gröfsen durch Zeichnung anzuhalten, sondern die Schüler auch schon zur reinen Vorstellung der abstrakten Gröfsen und Gebilde hinleiten, was durch die Vorübungen und bei dem gereiften Verstande der Schüler ohne grofse Schwierigkeiten geschehen könnte. Das, woran wir jetzt leiden, ist im grofsen und ganzen eine mangelhafte Ausbildung der Grundvorstellungen, denn infolge davon tritt allzu leicht im Verlauf des mathematischen Unterrichts ein gelegentliches Versagen ein, ein Übel, das auf dem natürlichsten Wege geheilt wird, wenn wir auf die ersten

[1]) Vergl. hierzu: Reidt Anleitung, § 18.

[2]) Vergleiche: Falke, Über eine neue Behandlung der Ähnlichkeits- und Kongruenzsätze. — Arnstadt 1875. — Progr.

Ferner: Hoffmann, Vom Allgemeinen zum Besonderen oder vom Besonderen zum Allgemeinen? — H. Z. III. p. 366—367.

J. C. Becker, Ein Brief an den Herausgeber. IV. p. 129—131 nebst Entgegnung. p. 131—133.

Anfänge recht viele Sorgfalt verwenden, zuerst der Anschauung und der Erziehung der Vorstellungskraft recht breiten Raum gewähren, dagegen die abstrakte, rein logische Betrachtungsweise möglichst lange bei Seite halten. Wird diese dann im Unterrichte eingeführt,[1]) dann tritt jene oben erwähnte Wechselwirkung ein; die durch Anschauung gewonnene Geometrie regelt nun die Anschauung.

Bei dieser Betonung des propädeutischen Unterrichtes mufs aber vorausgesetzt werden,[2]) dafs derselbe in den Händen eines ausgebildeten Mathematikers liegt oder dafs wenigstens der erste Mathematikus der Anstalt eine sorgfältige Oberaufsicht darüber hat;[3]) denn wie auf der einen Seite der Nutzen ein erheblicher sein würde, könnte ein falsch geleiteter propädeutischer Unterricht einen nicht oder nur schwer wieder gut zu machenden Schaden anrichten.

Wenden wir uns nun zu dem wissenschaftlichen geometrischen Unterricht,[4]) so stöfst uns gleich zuerst wieder ein Übelstand auf, der ein Erbteil Euklidscher Methode, leider noch in fast allen Lehrbüchern, mit wenigen rühmlichen Ausnahmen zu finden ist, ich meine die Sucht zu definieren.[5]) Wie oft ist auch hierüber schon geklagt worden und doch haben wir uns davon noch nicht befreien können. Noch immer wird der Schüler mit Definitionen völlig unbekannter Raumanschauungen überschüttet und die Speise dann durch dogmatischen Vortrag Euklidscher Beweise vollständig ungeniefsbar gemacht:[6–8]) oder im Gegenteil eine völlig bekannte

---

[1]) Vergl. Der Gymnasialunterricht von J. H. Deinhardt. — Hamburg, Perthes. — [p. 182 ff.]

[2]) Vergl. H. Z. II. p. 108.

[3]) Vergl. H. Z. XVIII. p. 620.

[4]) Vergl. hierzu: Reidt Anleitung § 42.

[5]) Vergl. H. Schotten, Zur Definition des Winkels. H. Z. XX. p. 481—501.

[6]) Vergl. J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 228.

[7]) Vergl. Ciala, Zu dem Aufsatze von J. Kober: Geometrische Grundbegriffe. H. Z. II. p. 42—44. — Ferner: H. Z. II. p. 211.

[8]) Hoffmann, Studien über geometrische Grundbegriffe. — H. Z. III. p. 443—452. — p. 523—534. — IV. p. 102—119.

Raumanschauung wird durch eine möglichst verzwickte Definition möglichst verdunkelt.[1])

Man lasse doch einfach die Definitionen weg und knüpfe anfänglich an die sinnliche Anschauung und den damit unbewufst verknüpften Begriff an, man wird unendlich viel weiter kommen.

Um nur ein Beispiel zu erwähnen;[2]) wie müht man sich ab, dem Schüler eine Definition der Geraden einzuprägen, anstatt einfach diesen Begriff als einen a priori vorhandenen zu betrachten und davon auszugehen. Nebenbei gesagt haben diese Definitionen gewöhnlich auch an und für sich geringen Wert und es scheint mir sehr wahr zu sein, wenn Tyndall sagt: „Es erhielt niemals jemand einen Begriff von einer geraden Linie nach der Definition, die Euklid von ihr gab.“

Ähnlich äufsert sich van Swinden:[3]) „Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erklärung durch Worte fähig wären, — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel.“

Auch Ulrich in seinem Lehrbuche der reinen Mathematik (1836) sagt:[4]) „Die gerade Linie ist eine so einfache räumliche Gröfse und ursprüngliche Vorstellung des Verstandes, dafs es schwer hält, deren Begriff auf andere einfachere oder mehr bekannte Begriffe zurückzuführen.

Kunze in seinem Lehrbuche der Planimetrie erklärt:[5]) Eine Linie heifst gerade, wenn sie in allen ihren Punkten einerlei Richtung hat — und fügt in einer Anmerkung, in der er die Definition Euklids anführt, naiver Weise hinzu: Man hat noch verschiedene andere Erklärungen der geraden

---

[1]) Hoffmann, Die Prinzipien des ersten Buches von Euklids Elementen. H. Z. III. p. 114—143.

[2]) Es sei auch an dieser Stelle noch einmal besonders auf § 42 in Reidts Anleitung hingewiesen.

[3]) J. H. van Swindens, Elemente der Geometrie herausgegeben von C. F. A. Jacobi. — Jena, Frommann.

[4]) Lehrbuch der reinen Mathematik von G. C. J. Ulrich. — Göttingen, Vandenhöck u. Ruprecht.

[5]) Lehrbuch der Geometrie von Dr. C. L. A. Kunze. — Jena, Frommann.

Linie, alle aber setzen im Grunde voraus, dafs man bereits wisse, was eine gerade Linie sei.

Auch Ed. Müller tadelt die unhaltbaren Definitionen, während Rausenberger a. a. O. auf alle derartigen Definitionen verzichtet und die Fundamentalgebilde einfach als durch die Anschauung gegeben annimmt, so Punkt, wie Gerade resp. Linie überhaupt, Ebene, Fläche und Körper und noch öfter im Verlaufe der Arbeit auch ganze Lehrsätze[1]), die man früher zu beweisen beflissen war.

Auf der andern Seite darf man aber hierin auch wieder 194 nicht zu weit gehen, denn wenn auch zugegeben werden mufs, dafs diese Begriffe in der menschlichen Anschauung begründet sind,[2]) so müssen dieselben doch zum Bewufstsein gebracht werden.[3])

Ähnlich verhält es sich mit den Grundsätzen. Hier sollte 192 man nicht zu sparsam sein. Allerdings verstehen sich alle 193 diese Sätze von selbst, sonst wären es keine Grundsätze, aber 68 dennoch fordert es die wissenschaftliche Strenge, damit man sich dessen bewufst werde und bleibe, dafs sie auch ausdrücklich ausgesprochen werden. Solcher Grundsätze müssen eine viel gröfsere Anzahl aufgestellt werden, als Euklid giebt. Bei E. Müller finden wir z. B. 24, darunter auch zugleich 52 stereometrische.[4]) 191

Ebenso wie die Sucht nach Definitionen verwerflich ist, 156 ist es diejenige nach Beweisen. So wird z. B., abgesehen von 48

---

[1]) „In der Rezension einer Abhandlung von Drobisch über den Begriff des Stetigen schreibt Schnuse: 'Was ferner die fast sprichwörtlich gewordene Evidenz an Strenge der mathematischen Begriffe betrifft, so mufs Referent offen bekennen, dafs sie leider sehr oft nicht vorhanden ist, selbst bei den besten Autoren, und es kann wohl kaum in einer anderen Wissenschaft mehr willkürliche Begriffsbestimmungen, illusorische Beweise und überhaupt Verkehrtheiten geben wie in der Mathematik.'"

Vergl. H. Z. VI. p. 266–67.

[2]) H. Z. I. p. 323. Ausführliche Besprechung des E. Müllerschen Werkes „Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt" durch Buchbinder — Schulpforta.

[3]) Vergl. H. Z. III. p. 347—365.

[4]) Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt von Dr. E. Müller. I. Grundvorstellungen der Geometrie. — Braunschweig, Vieweg.

182 Euklid und vielen anderen, auch von Legendre und Kunze 208 der Lehrsatz aufgestellt: „Alle rechten Winkel sind einander gleich“ und bewiesen. Kober sagt hierzu:[1] „Man möchte sich wundern, dafs noch kein Mathematiker bewiesen hat,[2] dafs alle Viertelstunden einander gleich sind“.[3] In solchen Bemühungen gipfelt in der That die Beweismanie vieler Mathe- 26 matiker. Ein schlagendes Beispiel, das noch hierher gehört, 165 ist, dafs in einem Lehrbuche der Planimetrie der Lehrsatz 166 aufgestellt wird:[4] „Jeder Kreis hat nur einen Mittelpunkt.“ Dieser geistreiche Lehrsatz wird dann ausführlich bewiesen.

Durch diese Bemerkungen soll die Wissenschaftlichkeit des Unterrichts durchaus nicht getroffen werden, im Gegen- 110 teil wenige, aber gute Definitionen, nur notwendige Beweise werden wissenschaftlicher sein und mehr Nutzen bringen, als bisher dieser Zweig der Mathematik gebracht. Es erhöht sich aber noch die Bedeutung des Verfahrens, wenn wir bedenken, dafs auf diese Weise der planimetrische Elementarunterricht ein viel extensiverer werden kann, so dafs die Lücke wegfällt, die zwischen den höheren Lehranstalten und der Universität weit klafft. „Den gründlichen, streng wissenschaftlichen Unterricht in den Elementen der Mathematik erklärt die Schule, namentlich in den unteren Klassen, für zu schwer: 111 die Universität aber betrachtet die Elemente als zu leicht und 153 setzt sie ohne weiteres als hinlänglich bekannt voraus und baut auf dem Fundamente fort, unbekümmert, ob dasselbe fest und sicher ist.[5]

---

[1] J. Kober, Besprechung des Lehrbuches von A. Ziegler. H. Z. I. p. 239—242.

[2] Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie.

[3] H. Z. III. p. 136.

[4] Vergl. Hoffmann, Zur Didaktik. 1) Auch eine Mahnung an die Mathematiker. H. Z. IX. p. 275. — Ferner Hoffmann, Zu den unnötigen Beweisen. — H. Z. X. p. 414—15. — Ferner Reidt, Kleine Bemerkungen zum Unterricht in der Planimetrie. H. Z. XIV. p. 18—21 und Entgegnung Hoffmanns, Die Fanatiker des Beweisens. H. Z. XIV. p. 22—25.

[5] Hankel (Antrittsrede) nimmt wohl auch diesen Standpunkt ein, wenn er sagt: „Hat der Schüler den Unterbau in seinen grofsen Grund-

Ein anderer schon oben erwähnter Übelstand ist die oft nur äufserliche Aneinanderreihung der Lehrsätze, so dafs sie in ihrer Aufeinanderfolge einen ähnlichen Eindruck machen werden, wie der dogmatische Beweis des einzelnen Satzes, als das allerdings anzustaunende Werk eines Gelehrten, der Glück beim Erfinden gehabt hat. Um auch hier nur ein bemerkenswertes Beispiel zu geben, so werden die Kongruenzsätze nicht einem einheitlichen Prinzipe untergeordnet, ja sie folgen nicht einmal unmittelbar aufeinander,[1]) sondern sind meist durch die Sätze über das gleichschenklige Dreieck unterbrochen.[2])

Ein anderes Beispiel ist der berühmte, beinahe hätte ich gesagt berüchtigte Pythagoräische Lehrsatz oder vielmehr der Beweis desselben mittelst Flächenvergleichung, der den Schrecken der Schüler bildet und noch oft später als etwas Schreckliches erwähnt wird, wenn nur noch der Name Pythagoras, aber längst nicht mehr sein Satz, geschweige dessen Beweis bekannt ist. Rausenberger a. a. O. verweist ihn an die einzige ihm gebührende Stelle — in die Proportionslehre, wo er sich auf das leichteste und natürlichste ergiebt, dadurch, dafs dies die einzige Stelle ist, wo er ihn behandelt.

Auch die Lehre von den Proportionen am Kreise bedarf

---

zügen verstanden, dann hinauf in die Höhe! Von oben erst kann man den Bau der Fundamente und ihren Zweck recht erkennen. Wer zu lange da unten bleibt, verliert die Lust und die Kraft, den Gang in die Höhe zu wagen. Where is a will there is a way."

„Man liebt es, uns Mathematikern vorzuwerfen, dafs wir nicht genug Rücksicht nehmen auf die Kräfte der Anfänger." . . . . „Man mache höhere Ansprüche und sie werden erfüllt werden."

Dagegen machte Günther (Wiesbaden 1877) auf die sich immer mehr vergröfsernde Kluft zwischen den höheren Lehranstalten und der Universität aufmerksam, schlug vor, dieser drohenden Gefahr durch eine Erweiterung des Pensums zu begegnen und „das unheilvolle Ereignis einer völligen Lösung des nothwendigen inneren Zusammenhangs in dem Unterrichtswesen" dadurch hintanzuhalten.

Man vergl. ferner: Müller, Mahnung an die Mathematiker. H. Z. VI. p. 268 ff. — Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie; H. Z. VII. p. 179—184.

[1]) Vergl. Reidt, Kleine Bemerkungen zum Unterricht in der Planimetrie. H. Z. XII. p. 8—17.

[2]) Vergl. Rausenberger p. 34, 3 u. 4.

durchaus einer Umgestaltung im Sinne der neueren Geometrie, hier ist meines Erachtens eine Gelegenheit, die Anschauungen und Methoden der neueren Geometrie ungezwungen in den Rahmen des Schulunterrichts hineinzubringen, so dafs Aussprüche wie der folgende nicht nur fromme Wünsche enthalten:[1] „Eine auf neuen Grundlagen beruhende Darstellung der Geometrie wird den Unterricht voraussichtlich in dem Grade erleichtern, dafs er auch die einfacheren Lehren der neueren Geometrie in gebührender Weise wird berücksichtigen können, ohne mehr Zeit in Anspruch zu nehmen als bisher."

Die Betrachtungen der vorliegenden Abhandlungen sollen sich auf das Gebiet der Planimetrie beschränken; sie spielt als das Anfangsglied ja auch die wichtigste Rolle, einer Umgestaltung des Unterrichts in der Planimetrie müfste notwendig diejenige der Stereometrie folgen. In Bezug auf die letztere machen sich ja auch schon bedeutende Stimmen bemerkbar, die eine Änderung der gewöhnlichen Methode anstreben, die Frage wird aber wohl über kurz oder lang ihrer Entscheidung entgegen gehen.

Meinen Ausführungen über den planimetrischen Unterricht möchte ich noch eins hinzufügen.[2] Nach meiner Ansicht müsste der Zeichenunterricht mit dem geometrischen von Anfang an systematisch verknüpft werden, ja ein rein geometrisches Zeichnen müfste der einzige Gegenstand dieses Unterrichtszweiges auf der Schule sein. Durch einen so geleiteten Unterricht würde der Schüler mit der Handhabung von Lineal und Zirkel vertraut werden, ja bei der reichlichen Zeit würden die Schüler es zu einer gewissen Vollendung bringen können, die äufserst befruchtend auf den wissenschaftlichen Unterricht in der Geometrie einwirken würde. Das obligatorische Zeichnen müfste aber auch noch in Sekunda und Prima eingeführt werden und sich als Ziel das perspek-

---

[1] Vergl. Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. H. Z. VII. p. 183.

[2] Vergl. Kiessling, Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. — H. Z. II. p. 47.

tivische resp. projektivische Zeichnen stecken.[1]) Würde das erreicht, so würde ein großer Teil der Vorwürfe gegen das Gymnasium schwinden. 98

Es sei mir gestattet meine Ansichten hierüber durch eine Vergleichung klar zu stellen. Das Ziel gleichmäßiger Ausbildung für alle und einer harmonischen Ausbildung des einzelnen muß für das Zeichnen ebenso gelten, wie für alle anderen Fächer. Das Gymnasium soll nicht für einen bestimmten Beruf vorbereiten, sondern für alle. Wie nun der Mathematiker nicht Mathematiker heranzieht, der Gesanglehrer keine Solosänger, der Turnlehrer keine Turner heranbildet, sondern der erste durch die Mathematik auf den Geist einwirkt, der letzte auf einen kräftigen, gewandten Körper hinarbeitet, so soll und darf auch im Zeichenunterricht nicht auf künstlerische Ausbildung der Wert gelegt werden. Das Ziel braucht nicht zu sein, eine Landschaft oder einen Kopf künstlerisch zeichnen zu können, — derartige Leistungen müssen für den, der sich dazu berufen fühlt, ebensogut in Privatstunden gefördert werden, wie etwa die Ausbildung der stimmlichen oder sonstiger musikalischen Anlagen — sondern das Zeichnen muß einzig und allein in systematischer Verbindung mit der Mathematik stehen, deren dienende Schwester sein. Für meine Ansicht spricht meiner Meinung nach auch das jetzt im Turnunterricht zur Geltung gekommene Prinzip: früher vorzugsweise Gerätturnen, Einübung besonderer Kunststücke, Ausbildung besonders kräftiger Schüler, jetzt Reigen und Turnspiele der Gesamtheit, an denen auch der weniger Kräftige sich beteiligen kann, um so auch des Nutzens teilhaftig zu werden.

Zum Schlusse möchte ich noch einmal meine Ansichten kurz zusammenfassen und der besseren Beurteilung wegen in Thesen aussprechen:

1) D e r g e o m e t r i s c h e U n t e r r i c h t m u ß v o r d e m a r i t h m e t i s c h e n e n t s c h i e d e n b e v o r z u g t w e r d e n, w e i l e r d i e G r u n d l a g e b i l d e t, w e i l e r i n d e n u n t e r e n K l a s s e n v e r s t ä n d l i c h e r i s t.

[1]) Vergl. Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Leipzig, Teubner. — Besprochen in H. Z. XVIII. p. 515—520.

2) Der arithmetische Unterricht beginnt erst in Sekunda. Einzelne Teile erfordern nur mechanische Einübung.

3) Die Methode des geometrischen Unterrichts ist im Sinne der neueren Geometrie umzuformen, ohne jedoch die Zwecke der Schule zu verläugnen.

4) Der Zeichenunterricht mufs für alle Klassen obligatorisch gemacht werden, ist jedoch im systematischen Zusammenhange mit der Geometrie zu erteilen, also ein rein geometrisches Zeichnen.

Zitate.

1 Je einmütiger alle Mathematiker und fast alle anderen, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, hierin sind, um so gröfsere Verwunderung mufs es hervorrufen, wenn wir in der neuesten Pädagogik, dem vielgerühmten und vielgelesenen Handbuch des Hrn. Prof. Schiller die entgegengesetzte Ansicht vertreten finden. Seite 552 a. a. O. heifst es: „Es ist eine viel erörterte Frage, ob die Mathematik für alle Schüler bis zu einem gewissen Umfange erfafsbar sei, und theoretisch wird man sehr leicht damit fertig,[1]) indem man sagt, dieselbe sei eine reine Verstandeswissenschaft, und wer überhaupt denken könne, müsse auch Mathematik im schulmäfsigen Umfange lernen können. Dieser Theorie entsprechen indessen die Thatsachen nicht. . . . ., so wird doch bezüglich des inneren Sehens . . . . sich immer ein recht bedeutender Unterschied unter den Schülern bemerkbar machen.“

Das letztere wird gewifs Niemand leugnen wollen; das ist aber keine besondere Eigentümlichkeit der Mathematik. Wenn wir nicht auf allen Gebieten des Unterrichts mit den „sehr bedeutenden Unterschieden der Schüler“ zu kämpfen hätten, so würde wohl die pädagogische Kunst auf

[1]) Der versteckt hierin liegende Vorwurf der oberflächlichen Behandlung der Frage dürfte nach den folgenden Ausführungen für Prof. Schiller ein zurückfliegender Pfeil sein.

einer ungleich höheren Stufe stehen, als jetzt, ja sie würde längst ihrer Vollendung unendlich nahe haben gebracht werden können. Diese Worte Schillers können also nicht im Ernst als ein Beweis für die besondere Veranlagung, die die Mathematik erfordert, angesehen werden. Aber prüfen wir die Schillersche Ansicht etwas näher. Bei den Worten „viel erörterte Frage" zitiert Schiller drei Aufsätze aus J. J. f. P. — darunter einen betitelt „adversus mathematicos" — je einen Aufsatz aus Dittes' Pädagog. und aus Z. R. W., ferner Wittstein Methode d. math. Unterrichts. Ich bin weit entfernt zu glauben, dafs Schiller alle seine Quellen angegeben, aber niemand wird es einem Mathematiker verdenken können, wenn er bei einer so wichtigen Frage wie die vorliegende das Verlangen stellt, Reidts Anleitung zum math. Unterricht und Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht als Hauptquellen angegeben zu finden:[1]) und dafs er, wenn diese fehlen, mit einigem Mifstrauen auf die Zuverlässigkeit der vorgetragenen Ansicht an diese herangeht. Wenn der philologische Verfasser einer Pädagogik es nicht für nötig findet, sich mit derjenigen der Mathematik eingehend zu beschäftigen,[2]) so mag er doch dieses Kapitel auslassen und auf spezielle Werke wie Reidts Anleitung — ja selbst Wittsteins Methode hinweisen.[3, 4]) Das würde sicher-

---

[1]) Dann würde allerdings bei der Beantwortung der Frage genau das entgegengesetzte Resultat sich ergeben haben, als zu dem Schiller gekommen ist.

[2]) Dafs Schiller die Mathematik hoch schätzt als Bildungsmittel, geht aus einer weiter unten angeführten Stelle hervor.

[3]) Es ist gemeint: Wittstein, die Methode des mathematischen Unterrichts. — Man vergl. die Rezension dieser Schrift in H. Z. XI. p. 291.

[4]) Roth widmet z. B. in seiner Gymnasialpädagogik der Mathematik gar keinen Abschnitt. Aus welchen Gründen, das leuchtet überall da ein, wo er der Mathematik Erwähnung thut. Er will dieselbe überhaupt aus der höheren Schule verbannt wissen, wenigstens als ein obligatorisches Fach; dabei zeigt er dieselben Ansichten über besondere Veranlagung für Mathematik wie Schiller. Er sagt auch p. 114 (ich zitiere nach der 2. Auflage 1874): „die allgemeine Verpflichtung zu diesem Lernen (Mathematik) wird durch die Erfahrung als ein Fehlgriff derjenigen erwiesen, welche unsere Schulordnung gemacht haben!" er-

lich empfehlenswerter sein, als eine Behandlung, die sich schon aus folgender Äufserlichkeit ergiebt: 1) Religionsunterricht: 17 Seiten; 2) Deutsch: **91** Seiten; 3) Alte Sprachen (inkl. Hebräisch): **114** Seiten; 4) Neuere Sprachen: **29** Seiten; 5) Geschichte: 43 Seiten; 6) Geographie: 17 Seiten; 7) Mathe-

---

wähnt dann einen Ausspruch von Dr. Eilers: „Dazu kommt, dafs Talente für Sprachen, Geschichte, Geographie viel allgemeiner sind, als Talente für Mathematik.“ Auch der Konflikt zwischen Philologie und Mathematik wird als Grund erwähnt für Abschaffung der letzteren. — Bei Bielmeyer in seinem an anderer Stelle zitierten Programm findet sich bei Besprechung dieser Verhältnisse auch noch folgendes Zitat: „Dafs es bestimmt geartete Naturen giebt, welche bei sonst hohen Talenten eine dezidierte Unfähigkeit für die Mathematik besitzen, so dafs sie auch bei pflichtmäfsig treuer Anstrengung nicht vorwärts kommen.“ (Aus „Das bairische Gymnasialwesen sonst und jetzt. Erlangen 1869.“)

Man vergleiche hiermit folgende Worte aus einer Besprechung der Rothschen Pädagogik von Dr. Elsperger: „Wenn Roth auch der Mathematik einen Platz unter den fakultativen Lehrgegenständen anweist, so möchten ihm nur wenige beipflichten. Allerdings scheinen die Sprachen eine andere Art der Begabung zu fordern als die Mathematik und es kann vorkommen, dafs Schüler in beiden sehr ungleiche Fortschritte machen. Aber nach den Erfahrungen des Referenten liegt der Grund, weshalb einzelne sonst begabte Schüler in der Mathematik wenig leisten, fast nur in der Übereilung des ersten Unterrichtes und in einer dadurch bei ihnen hervorgerufenen Verzagtheit und in der vorgefafsten Meinung, für diese Wissenschaft kein Talent zu haben.“

Hoffmann sagt in H. Z. I. p. 3 — nachdem er dargelegt, dafs die Mathematik sich ihre Stelle erst habe erkämpfen müssen, weil sie von der Mehrzahl der Gymnasialpädagogen nicht als vollberechtigt im Gymnasialunterricht angesehen worden sei —: „Wie hätten auch sonst die exakten Unterrichtsfächer Beurteilungen erfahren können, wie die eines Niemeier, Nägelsbach, Roth, Bäumlein, Gockel, Mühlmann* und der drei anonymen Verfasser von: „Wert und Unwert der Mathematik“ (Kassel 1836), „adversus mathematicos“ (Mas. päd. Jahrb. Bd. 94. S. 205) und „Das bairische Gymnasialwesen sonst und jetzt“ (Erlangen 1869)!“

*Niemeier, Grundsätze d. Erz. II. S. 173—174. — Nägelsbach, Gym. Päd. S. 156—60. — Bäumlein, die Bedeutung der klass. Studien etc. Heilbronn 1849. S. 49. — Gockel, die Gelehrtenschule gegenüber den Zeitforderungen. Karlsruhe 1862. S. 23—25. — Roth, Gymnasialpädagogik. Stuttgart 1865. S. 18, 97, 99 u. 288 ff. — Mühlmann, Beiträge zur Gymnasialfrage. Leipzig 1868. S. 36—38.

matik in Gymnasien und in Realanstalten: 18 Seiten.[1]) Paulsen widmete der Mathematik in seinem pädagogischen Kolleg eine ganze Stunde.

Progr. d. Rprg. z. Strausberg. 1884. — Schulze: Bemerkungen etc.

Verhandlungen der elsafs-lothringischen Direktoren-Konferenz. 1871. Strafsburg.

„Dafs keine andere Art der Schulkenntnisse mit dem Austritt aus der Schule so schnell spurlos verloren geht oder gar so gleichgiltig weggeworfen wird, wie die mathematischen, hat unstreitig zum grofsen Teil darin seinen Grund, dafs der Schüler sie nicht auf Probleme des wirklichen Lebens anwenden gelernt hat.“[2])

Progr. d. R. I. Ord. z. Magdeburg. 1882. — Dr. Jenrich: Beiträge zur Methodik etc.

Man vergleiche zu der vorliegenden Frage das Vorwort in H. Z. I. vollständig.

Cfr. Buchbinder, der math.-naturwiss. Unterricht auf deutschen Gymnasien. H. Z. I. p. 10, ferner: H. Z. II. p. 153—154. — Vergl. ferner: H. Z. X. p. 315, ferner: Eine Wertschätzung des Schulmathematikers an einer höheren Schule seitens eines Schulphilologen. H. Z. XVI. p. 467—473.

Ferner: Eine Stimme gegen den Weissenfelsschen Angriff auf die Mathematik und die Mathematiker. H. Z. XVII. p. 73—76.

Ferner: Hoffmann, Einige wichtige pädagogische Tagesfragen mit besonderer Berücksichtigung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. H. Z. XVIII. p. 237—249.

[1]) Also Sprachen zusammen 234 Seiten, Mathematik auf Gymnasien und Realanstalten 18 Seiten. Sapienti sat!

[2]) Diese Anwendung der Probleme der Mathematik auf das praktische Leben ist aber sicherlich in der Geometrie eher möglich als in der Arithmetik, wenn die Geometrie in der richtigen Weise gelehrt wird, d. h. so, dafs in dem Schüler wirklich Anschauung geweckt wird, dafs der Unterricht ihn fähig macht, das Angeschaute richtig zu beurteilen, sich in die Wirklichkeit der ihn umgebenden räumlichen Verhältnisse zu finden. Die Beispiele oder Anwendungen, die geeignet sind zur Verknüpfung der wissenschaftlichen Lehre mit der Praxis zu dienen, ergeben sich hier weit ungezwungener, als es in der Arithmetik möglich ist, wo diese Verknüpfung mehr oder weniger eine äufserliche bleibt, da Inhalt und Form sich fremd sind.

3 Neue Jahrbücher für Phil. u. Päd. B. 123; 3. Heft; p. 116. Zitat.

Die Mathematik ist deswegen allgemein in den Ruf einer schwierigen Wissenschaft gekommen, man meint, sie fordere ganz besondere Anlagen, eine individuelle Organisation des Geistes, eigentümliche Stimmung des Nervensystems. Sollte nicht der Grund davon darin zu suchen sein, dafs den Schülern in den unteren Klassen zu viel zugemutet wird? .... Der Schüler soll die abstrakten Sätze der Mathematik nicht äufserlich aufnehmen und nachsprechen, sondern sie sollen lebendiges Eigentum geworden sein.[1]) Kommt aber der Schüler nicht zu einer klaren Einsicht, so kann er dem Gegenstande kein Interesse abgewinnen, die Rechnungen und Konstruktionen ekeln ihn an, die Lust zur Mathematik ist ihm benommen und das Vorurteil gegen dieselbe hat sich seiner bemeistert.

4 So kommt es, dafs bei dieser synthetischen Methode Sätze aufeinanderfolgen, die einen ganz verschiedenartigen Inhalt und Charakter und keine Verwandtschaft mit einander haben,[2]) denn ihre Reihenfolge wird durch den Beweis und

---

[1]) Auch diese Bemerkungen sprechen dafür, dafs man der anschaulichen Geometrie zeitlich, aber auch räumlich den Vorzug gebe. Der durch die anschaulichen Vorstellungen der Geometrie Vorgebildete wird die abstrakten Vorstellungen der Geometrie erfassen können und dann auch fähig sein die Abstraktionen der Arithmetik aufzufassen, aber — und dies sei noch einmal betont — erst nachher, daher also ein Nacheinander der beiden Disziplinen dem Nebeneinander im Anfangsunterrichte entschieden vorzuziehen ist. Wird der geometrische Unterricht anfänglich derartig betont, dann werden dem Schüler die gewonnenen und richtig verarbeiteten Vorstellungen ein lebendiges Eigentum geworden sein, auf dem er, als auf einem festen Grunde, mit Lust weiter bauen kann und wird.

[2]) Ich kann es mir nicht versagen einige besonders prägnante Beispiele aus einem der bekanntesten Lehrbücher der Planimetrie — Kambly — hier anzuführen: die Behandlung des gleichschenkligen Dreiecks mitten zwischen den Kongruenzsätzen; die Sätze vom rechtwinkligen Dreieck in § 66 u. 67, die daher, da sie gar nicht dahin gehören, auch in naturwidriger Reihenfolge gegeben werden; die Sätze in § 68 und 69, die wie die vorigen ganz aufser allem Zusammenhange stehen; § 114; § 116; — hierbei möge es bewenden.

die geometrische Hülfskonstruktion bestimmt. Dies ist die Achillesferse der Methode.[1])

In dem Naturell der Engländer mag es auch begründet sein, dafs sie am zähesten an der konsequent durchgeführten Euklidischen Methode bis in die neuere Zeit festgehalten haben. Die Ausdauer im Schwierigen und die oft auf eine harte Probe gestellte Geduld im Denken scheint sie besonders anzuheimeln, da eine gewisse „Zähigkeit“ eine ihrer Charaktereigentümlichkeiten unstreitig ist.

Nichtsdestoweniger war Euklid fest davon überzeugt, dafs es nur einen zur Geometrie führenden Weg gäbe, den er selbst „Königen“ nicht zu ebnen vermöchte.[2]) Nach seiner Methode ist eben jede Abweichung von der Ordnung, in welcher die Sätze aufeinanderfolgen, ungerechtfertigt, vielmehr der Weg, auf welchem man vorzuschreiten hat, aufs strengste vorgeschrieben, und dieses Zwanges wegen pflegt man von „Euklidscher Strenge“ und „Starrheit seiner Methode“ zu reden.

Verfasser fährt dann fort: Es scheint uns aber keinem Zweifel zu unterliegen, dafs Euklid vermöge seines eminenten Scharfsinns im grofsen und ganzen das Richtige getroffen hat; nur mufs seine Methode in dem Sinne verbessert werden, dafs neuere Anschauungen zu Hülfe genommen und die Sätze in anderer Weise gruppiert werden, auch dem vorwärts Schreitenden eine öftere Rast gewährt werde, ... — Ein Vorzug der Methode besteht in der Kürze, mit welcher die mathematischen Erkenntnisse erschlossen werden, und in einer ge-

---

[1]) Vergl. 154.

[2]) Hankel, die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten p. 24:

„Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemäus, der, wie wir begreifen, das mühsame Studium der „Elemente“ abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: 'Es giebt keinen Königsweg zur Mathematik.' Wir aber können hinzufügen: die neuere Geometrie ist dieser Königsweg, sie hat 'den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind', und hat, wie wir ohne Übertreibung sagen können, das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht.“ Vergl. auch Hankel, die Elemente der projekt. Geometrie. p. 33.

wissen Leichtigkeit des Vorwärtsschreitens..... Ein Mangel der Methode besteht darin, daſs sie den Zusammenhang zwischen den einzelnen Sätzen zu wenig andeutet, wenigstens kein hervorragendes Gewicht darauf legt; sie zwingt zwar durch passende Hülfskonstruktionen und ausreichende Gründe zur Anerkennung der Sätze, bringt aber nicht zum deutlichen Bewuſstsein, warum man so und nicht anders zur Wahrheit des Satzes gelangt; sie stellt durch Aneinanderreihung von Sätzen die Wissenschaft selbst als ein abgeschlossenes Ganzes dar, während sie unerschöpflich und einer unbegrenzten Ausdehnung fähig ist. Daher die heftigen Angriffe auf diese Methode!

7 Unter anderem sagt Schopenhauer:[1]) Man hat (bei dieser Art des Beweises) die unangenehme Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der That sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise täuschend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hinterthür herein, indem sie sich per accidens aus irgend einem Nebenumstande ergiebt. Oft schlieſst ein apagogischer Beweis alle Thüren eine nach der andern zu und läſst nur die eine offen, in die man nun bloſs deswegen hineinmuſs. Dagegen sagt Schopenhauer auch: Indessen verdient die Art und Weise, wie Euklid dies durchgesetzt hat, alle Bewunderung, die ihm so viele Jahrhunderte hindurch geworden ist. — Oft würden, wie im Pythagoräischen Lehrsatze, Linien gezogen, ohne daſs man wisse, warum. Hinterher zeige es sich, daſs es Schlingen seien, die sich unerwartet zuziehen und den assensus der Lernenden gefangen nehmen. Diese eigentlich empirische und unwissenschaftliche Erkenntnis gleiche der des Arztes,[2]) welcher Krankheiten und Mittel dagegen, aber nicht den Zusammenhang beider kenne.

8 Die genetische Methode .... stellt uns auf einen höheren Standpunkt und macht neue Gesichtspunkte geltend, um die mathematischen Sätze mit einander zu verknüpfen und die Selbstthätigkeit des Schülers anzuregen. Ihr Wesen besteht

---

[1]) Die Welt als Wille und Vorstellung. I. S. 84 u. 86.
[2]) Vergl. das folgende Zitat.

in Kürze darin, dafs die mathematische Wahrheit aufs innigste mit ihrem Beweise verbunden wird, so dafs der Schüler gleichsam ihre γένεσις, ihre Entstehung, ihren Ursprung Schritt für Schritt mit geistigem Auge beobachtet. Mit der Genesis des Satzes soll der Schüler zugleich den inneren Zusammenhang desselben und seine Stellung zu den übrigen anschaulich erkennen.

Verfasser fügt dann eine Kritik der Wittsteinschen Ansicht, der die genetische Methode als die einzige wahre Unterrichtsmethode preist, hinzu.

Der Geist der Mathematik ist der Geist der Ordnung und Gründlichkeit; Mathematik ist Zucht des Geistes überhaupt! .... Darum erfüllt uns das εὕρηκα eines Satzes mit reiner Freude und inniger Genugthuung. 9

Wie soll nun eine Methode sein, die allen berechtigten Anforderungen entspricht? Welche Verbesserungen mufs sie gegen die alten zum Teil unbrauchbaren aufweisen? Auch die Mathematik ist auf höheren Schulen nicht blofs Fachwissenschaft..... 10

Wie wir aus dem Wesen der Methode im allgemeinen erkannt haben,[1, 2]) wird es nicht sowohl auf den ausschliefslichen Gebrauch einer, als auf eine passende Verschmelzung der brauchbaren und praktisch bewährten Methoden ankommen.....

Unsere intellektuelle Thätigkeit beruht in der Mathematik auf Anschauungen, aus diesen werden die Begriffe gebildet.[3]) Die Prinzipien des sinnlichen Erkennens sind uns a priori gegeben..... Mathematik keine Erfahrungswissenschaft, daher Raum reine Anschauung a priori.... 11

---

[1]) Eine derartige Verschmelzung würde z. B. sein: Auffinden der Lehrsätze genetisch, Beweisführung heuristisch; dann synthetische Rekonstruktion. Das letzte Verfahren besonders bei der Repetition, damit zugleich verbunden eine nach bestimmten Gesichtspunkten geordnete Zusammenstellung einzelner Abschnitte. Man vergleiche hierzu Reidt Anleitung § 10 bis § 15 inklusive.

[2]) Vergl. 24. 74. 142.

[3]) Man vergleiche hierzu Waitz, Lehrbuch der Psychologie, § 46 Über den falschen und wahren Unterschied empirischer und reiner (apriorischer) Begriffe oder Erkenntnis, und § 48, die Abstraktion.

Daraus geht hervor, dafs es vor allen Dingen beim Beginn des mathematischen Unterrichts notwendig ist, durch Anschauung richtige Begriffe zu schaffen, denn alle Definitionen und Deduktionen schweben in der Luft, sobald sie „ohne Anschauung“ leer bleiben. Propädeutisch mufs die .... Methode von der sinnlichen Betrachtung konkreter Gegenstände ausgehen, die *Anschauung* des Schülers unterstützen und dadurch zugleich der Fassungskraft der jugendlichen Geister entgegenkommen..... Keine Abstraktionen..... Der jugendliche Geist mufs beim Beginn des mathematischen Unterrichts schon so beeinflufst sein, dafs der Anschauungssinn bereits angeregt und entwickelt ist. Das „nihil est in intellectu quod non antea fuerit in sensu“ gilt hier in ausgezeichneter Weise.

12 Der Erfindungsgeist des Knaben mufs durch passende Übungen subjektiv für die Anschauungssphäre empfänglich gemacht werden. Hat man aber die „Formen der Anschauung“, die sich dem Vorstellungsvermögen einprägen, gewonnen, so geht man nun auf die erkennbaren Eigenschaften und Beziehungen dieser Körper zu einander über und so findet der Knabe .... geometrische Wahrheiten, die ihm *ohne Beweis* augenscheinlich klar sind. Ist diese Basis durch den propädeutischen Unterricht gewonnen, so kann man ohne Bedenken mit der eigentlichen Wissenschaft einsetzen und dabei auch gewisse Begriffe aus der neueren Geometrie in den Anfang des geometrischen Unterrichts hinübernehmen, ohne fürchten zu müssen, dafs der Schüler Definitionen, die *er nicht begreift, sinnlos auswendig lernt.*[1])

13 Direktoren-Konferenzen des preuss. Staates v. Dr. *Erler.* p. 165. § 115. „Es sei geraten, mit der Geometrie, statt mit

---

[1]) Wie an anderer Stelle ausgeführt ist, liegt hierin mit ein Hauptgrund für den Widerwillen, den so viele Schüler gegen die Mathematik haben und infolgedessen für den mangelnden Erfolg. Die Grundvorstellungen müssen so befestigt werden, dafs der Schüler aus ihrer Erkenntnis alle Definitionen herzuleiten vermag. Dafs nur definiert wird, was einer Definition bedarf: und dafs auf die Definitionen inhaltlich und sprachlich ein ganz besonderer Wert zu legen ist, sei auch hier noch einmal ausdrücklich hervorgehoben.

der Arithmetik den eigentlich mathematischen Unterricht zu beginnen.

14 Was nun den Lehrgang selbst betrifft, so sind die Ausgangspunkte, mit denen der Unterricht beginnt, verschieden.[1]) Zeller beginnt mit der Pyramide, Graser mit dem Modell eines Wohnhauses, Tobler mit dem Lineal, Wedemann mit dem Buche, Scherr mit der Wandtafel, v. Raumer mit den Krystallen, Pestalozzi mit der Zeichnung der geraden Linie, Zerenner mit dem Punkte, Wittstein mit dem Dreieck und Kreise, andre mit dem Würfel und den Dimensionen des Raumes, andre mit der Erklärung und Einteilung der Wissenschaft u. s. w. Hier gilt, wie wir sehen, das Sprüchwort: tot capita, tot sensus. — Fortgang vom Konkreten zum Abstrakten, vom physischen zum mathematischen Körper.

15 Man frage nicht, was ist eine Linie? was eine Fläche? etc., sondern wie entsteht hier dieselbe,[2]) damit man dem Schüler zuerst die Entstehung der geometrischen Grundbegriffe: Punkt, Linie, Fläche, Körper anschaulich macht. Genaue Definitionen dieser Grundbegriffe zu geben, ist, wie wir gleich zeigen werden, sehr schwierig,[3]) nach unserer Ansicht unmög-

[1]) Der Ausgangspunkt mufs jedenfalls ein sinnlich Wahrnehmbares, also ein physischer Körper sein oder besser physische Körper — welche man nun wählt, ist wohl weniger wichtig; ich selbst würde empfehlen von Würfel, Kugel und Walze (resp. eiförmigem Körper) auszugehen, um gleich von Anfang an auf die Einheit der ebenen Fläche, auf die Vielheit der krummen Flächen hinweisen zu können.

[2]) Dieser Ansicht kann ich durchaus nicht beipflichten: nach meiner Meinung sollen diese Begriffe einzig und allein aus der Grenzbetrachtung gewonnnen werden; also auch nicht vom Punkt zum Körper, sondern umgekehrt.

[3]) Genaue Definitionen dieser Grundbegriffe sind allerdings möglich, nämlich aus der Vorstellung der Grenze; etwas anders ist es bei Definitionen von Vorstellungen a priori, wie diejenige der Ebene, der Geraden etc. Hier sollte man auf jede Definition verzichten. Aber in welche jammervolle Lage wäre der Lehrer versetzt, der „durch geschicktes Umgehen oder taktvolles Verschweigen" sich durchlavieren wollte. Jeden Augenblick mufs er eine Frage eines gescheiten Jungen fürchten, es würde ihm gehen, wie dem Dieb, keinen Augenblick sicher — wie könnte er da seines Unterrichtes froh werden und welche Erfolge könnte ein solcher Unterricht haben.

lich, es müssen daher die hier eintretenden Schwierigkeiten durch geschicktes Umgehen derselben und taktvolles Verschweigen aus dem Grunde beseitigt werden, daſs nicht in dem Verstande des Schülers der geringste Zweifel an der Richtigkeit irgend einer mathematischen Definition aufzukommen vermag. Dieses tritt ein, sobald der Schüler sich bewuſst wird, daſs idem per idem erklärt wird[1]) oder eine einzige Eigenschaft einer Raumgröſse als das Wesen derselben hingestellt oder ein Begriff auf einen anderen, der seinerseits eine Erklärung verlangt, zurückgeführt wird etc., kurz: daſs die gegebene Erklärung einen Mangel in sich schlieſst. Wie leicht kann beim Beginn dieser neuen Wissenschaft der auftauchende Zweifel das Interesse des Schülers für dieselbe vollständig vernichten![2]) Zweifel bewirkt leicht Antipathie. — Es wird dann ebenfalls genauer gerade auf das Beispiel der Definition für gerade Linie eingegangen. Es heiſst darin: Diese aufgestellten Definitionen (11) mögen genügen,[3]) um uns zu zeigen, daſs die Erfahrungen von Jahrtausenden nicht hingereicht haben, um dies Problem in irgend einer Weise zu fördern.

---

[1]) Zu solchen idem per idem Definitionen gehört z. B. auch diejenige der Geraden, als einer Linie von einerlei Richtung. Auch der andere hier gerügte Fehler findet sich leider sehr häufig. Der Unterschied zwischen Definition und den aus dem Wesen entspringenden Eigenschaften muſs scharf beobachtet werden. Ein Beispiel, bei dem man gelegentlich den Schüler auf diesen Unterschied aufmerksam machen kann, ist das Parallelogramm. Zur Definition gehört nur das Parallelsein der Seiten: daraus ergeben sich dann als Eigenschaften Gleichheit der Gegenwinkel und Gegenseiten etc.

[2]) Dies deckt sich mit den an anderer Stelle gebrachten Ermahnungen, die Grundvorstellungen ganz besonders zu berücksichtigen, sie zu evidenter Klarheit zu bringen, da gerade ein Mangel an dieser Stelle seinen schädlichen Einfluſs dauernd zeige: infolge von ihm gerade jenes so oft zu beobachtende Versagen im Verlaufe des weiteren Unterrichts einträte.

[3]) Hier sollte man doch auch fragen, warum keine Definition gefunden werden kann. Doch wohl deshalb, weil es für Begriffe, die a priori im Geiste liegen, keine Definition giebt, sondern nur Erklärungen; Erklärungen, die geeignet sind, die a priori im menschlichen Geiste vorhandenen Begriffe zum deutlichen Bewuſstsein zu bringen.

Progr. der städt. h. Ksch. Schwerin. 1878. Ziegel: Methode etc. 1878. Nr. 138.

Erschwerend für den mathematischen Unterricht ist, dafs derselbe vorwiegend den Verstand der Schüler in Anspruch nimmt, so dafs die anderen Geisteskräfte,[1]) Einbildungskraft und Gedächtnis, selbst wenn sie in ziemlicher Fülle vorhanden sein sollten, einen Mangel an ersterem nicht zu ersetzen vermögen. Wenn es daher auch falsch ist, wie Schrader so überzeugend dargethan hat,[2]) dafs zur Mathematik ganz besondre Begabung notwendig ist, so erklärt sich doch aus dieser Eigenschaft das geringe Interesse, welches häufig der Mathematik, namentlich im Anfange, entgegen gebracht wird. Davon ist aber die Folge eine vollständige Unsicherheit in den Elementen, an der schliefslich jeder Erfolg scheitert. 16

Dafs man auf die eigentümliche Idee eines besonderen mathematischen Verstandes gekommen ist, liegt jedenfalls an der in früherer Zeit oft beobachteten Erfahrung,[3]) dafs in der That von einem unverhältnismäfsig grofsen Teile der Schüler 17

---

[1]) Die Mathematik mufs sich daher im Anfang nicht an den Verstand allein wenden, sondern Einbildungskraft und Phantasie oder besser Anschauung und Vorstellungskraft ganz besonders in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen. Nach hinlänglicher Übung dieser Kräfte wird der Verstand leicht den abstrakten Stoff verarbeiten. Ein gänzlicher Mangel an Verstand wird allerdings durch nichts anders ersetzt werden können, einem Schüler ohne Verstand wird die Mathematik unverständlich bleiben — aber selbstredend auch jede andere Wissenschaft.

[2]) Erziehungs- und Unterrichtslehre von Dr. W. Schrader. — [p. 521—523.]

[3]) Es wird eine offene Frage bleiben müssen, wie viel Schuld an diesem Übelstande der früheren Einrichtung der Schulen und der sehr offen zur Schau getragenen Verachtung der Mathematik durch die Philologen beizumessen ist. So lange ein Fach als sog. Nebenfach auf dem Lehrplan figuriert, ist die Schuld des Mifserfolges nicht einzig im Fache selbst und seinen Vertretern zu suchen. Vielleicht giebt aber auch Herbarts Wort, „dafs Mathematiker selten aufgelegt sind, sich mit Kindern gehörig zu beschäftigen, ist natürlich“ einen Beitrag zu unserer Frage. Nur müfste man sich klar werden, was Herbart mit „aufgelegt sein“ verstanden wissen will, ob einen Defekt des Wollens oder des Könnens.

auf den Gymnasien in den mathematischen Fächern so gut wie nichts geleistet wurde, und dafs gerade die für die Sprachen am meisten Befähigten oft in der Mathematik nur sehr mäfsige oder gar durchaus ungenügende Kenntnisse besassen. Daran können aber offenbar nur untüchtige und ungeschickte Lehrer sowie unzweckmäfsiger, unmethodischer Unterricht die Schuld tragen.

18 Eine alte Forderung für jeden Unterricht ist, dafs er naturgemäfs sei. Dazu gehört aber erstens, dafs er auf Anschauung beruhe[1]. .... Erst nachdem die Anschauung zum Hauptprinzipe des Unterrichts gemacht worden, sei in der Mathematik allgemein etwas geleistet worden.

19 Namentlich die Anfangsgründe sind ohne Gegenstände oder deren Bilder fast unmöglich zur Klarheit zu bringen. Später, wenn die äufsere Anschauung zur inneren geworden ist, ist allmählich zur Stufe des reinen Denkens überzugehen, aber auch dann ist oft dasselbe Mittel zu Hülfe zu nehmen.

20 Anstatt in stufenweiser Folge stets vom Leichteren zum Schwereren vorzugehen, schlofs man sich eng an Euklids Elemente an,[2,3] die ja für ihren Zweck unübertroffen bleiben werden, aber nicht als Schulbuch geeignet sind, da sie nicht Knaben, sondern jungen Männern zum Studium in die Hände gegeben werden sollten.

21 Dagegen lassen sich meiner Meinung nach sehr gute Resultate erzielen, wenn in Quarta der sogenannte wissenschaftliche Unterricht in der Planimetrie ganz gestrichen und da-

---

[1] Dafs dieser Gedanke mit den Ansichten des Verfassers in Übereinstimmung ist, geht aus vielen Stellen der vorliegenden Arbeit hervor.

[2] Vergl. 115.

[3] Hierin liegt, wie auch an anderer Stelle betont ist, der Kern der Frage, ob die Euklidsche Methode für den Schulunterricht zu verwenden sei. Die Euklidschen Elemente entsprechen gar nicht der ersten, der geometrischen Stufe, auch nicht der zweiten, der arithmetischen, sondern wir haben es hier schon mit einer ausgeprägten Verbindung dieser beiden, also der dritten Stufe zu thun. Die Elemente eignen sich daher gar nicht für den Anfangsunterricht — für den sie ja auch von Euklid nicht bestimmt waren — sondern für den Unterricht in Prima etwa.

für ein propädeutischer zur Einführung ni die gesamte Geometrie an deren Stelle gesetzt wird.

Der Lehrer befleifsige sich selbst der gröfsten Klarheit 22 und Präzision des Ausdrucks und halte auch streng darauf bei den Schülern.[1])

Mit der Geometrie ist der Rechen- und Zeichenunterricht 23 in stete Verbindung zu setzen. — Allerdings: Natürlich verfolgen diese beiden Disziplinen noch ganz andere Zwecke, und darf namentlich nicht der Zeichenunterricht nur ein rein geometrischer werden.

Viel ist darüber gestritten worden,[2]) ob die analytische, 24 synthetische oder heuristisch-genetische Methode vorzuziehen sei. Meiner Ansicht nach haben alle ihre Vorzüge und ihre Mängel, und es darf nicht einseitig eine derselben ausschliefslich,[3]) sondern es sind in geeigneter Weise am rechten Orte alle anzuwenden.

Vortrefflich dient demselben Zwecke das Zeichnen, das 25 den geometrischen Unterricht zuerst einleiten und dann stetig begleiten mufs.

Man versuche nichts zu beweisen, was aus unmittelbarer 26 Anschauung folgt.[4])

1887. Progr. Nr. 278. Rprg. Oldesloe. Lichtenberg: Aus der Praxis etc.

---

[1]) Diese berechtigte Forderung wird, wie es scheint, leider noch allzu oft vernachlässigt. Als Beispiel möchte ich nur die folgenden anführen:

Schurig, Elem. d. Geometr. pag. 7: Die äufseren Schenkel der Nebenwinkel bilden einen gestreckten Winkel, sind also gleich 2R = 180°.

Und ebenda: Die Summe aller Winkel .... betragen zusammen 2R.

pag. 10: Ecke und Seite verbinden; Seite und Seite verbinden.

Fenkner, Lehrb. d. Geometr. I. (1888): pag. 69: Wenn in einem Viereck die Summe der gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechte beträgt, so ....

[2]) Vergl. 30. 71. 76.

[3]) Vergl. 39. 60. 63.

[4]) Wie sehr gerade gegen diese Forderung verstofsen wird, davon liefern fast ausnahmslos alle Lehrbücher Beweise. Eine angenehme Ausnahme bildet das öfter zitierte Werk Rausenbergers.

27 Wenn in den letzten Jahren von Pädagogen auch immer häufiger die Überzeugung — wenigstens ausgesprochen wird, dafs für die Aneignung mathematischer Kenntnisse eine besondere Begabung des Lernenden für die Mathematik nicht vorauszusetzen sei, so ist doch der alte Aberglaube noch nicht völlig ausgerottet.....[1]) — Man hat die Erfolge in der Mathematik oft mit denen im Raten von Rätseln verglichen. Wie es Leute giebt, welche ohne besonders beanlagt zu sein, jedes Rätsel schnell raten, jeden Rebus leicht entziffern können, während andere geistig begabtere dies nicht vermögen, so, glaubte man, seien es auch nur gewisse Auserwählte, die sofort die Lösung der schwierigsten mathematischen Aufgaben finden könnten. Wenn dem so wäre, so müfste man freilich bedauern, dafs die Mathematik eine Stelle in unserem Unterrichtssystem gefunden,[2]) ja es wäre unverantwortlich, dafs .... von den vorgesetzten Behörden ein bestimmtes Mafs mathematischer Kenntnisse gefordert wird.

28 Am bedenklichsten ist jedenfalls der Mangel an Kenntnissen, welcher darauf zurückzuführen ist, dafs der Schüler dem Unterricht nicht mit Erfolg hat folgen können, und von allen, welche nicht eine eigentümliche mathematische Begabung voraussetzen, wird allgemein anerkannt, dafs die späteren mangelhaften Leistungen der Schüler ihren Grund haben in der ungenügenden Vorbereitung in den ersten Jahren des Unterrichts.[3]) Daher ist es ein wichtiges Erfordernis, dafs der Anfangsunterricht vor allen Dingen sorgfältig erteilt werde und in den Händen dazu befähigter und bewährter Lehrer liege.

29 Damit dieser propädeutische Unterricht im engen Zusammenhange mit dem geometrischen Unterrichte der Quarta stehe, ist es zweckmäfsig,[4]) dafs der Lehrer der Mathematik

---

[1]) Vergleiche das Zitat aus Schillers Pädagogik.

[2]) Sehr richtig!

[3]) Sehr richtig!

[4]) Dafs diese Forderung durchaus zu erfüllen ist, darin werden nicht nur die Fachlehrer der Mathematik übereinstimmen; es finden sich überall die gleichen Forderungen selbst bei vielen praktischen Übungen, wie z. B. bei Reiten und Fechten. Der Fechtlehrer nimmt viel lieber einen

in der Quarta auch den propädeutischen Unterricht in der Quinta erteile, da er am besten beurteilen kann, welche Vorübungen für seinen späteren wissenschaftlichen Unterricht als die angemessensten zu erachten sind.

30 Über eine Methode, welche bei dem in Quarta beginnenden wissenschaftlichen Unterricht notwendig anzuwenden wäre, scheinen die streitenden Parteien wohl nie einig werden zu können.[1]) Daher kann man vermuten, daſs eine bestimmte Methode wohl nicht die allein richtige ist. Es kommt beim Unterrichten eben viel zu sehr auf die Persönlichkeit des Lehrers und auf die des Schülers an. Wenn auch im allgemeinen bei der ersten Durchnahme des zu Erlernenden die heuristische resp. analytische Methode für die geistige Entwickelung der Schüler die wirksamste ist, so kann es doch bisweilen für das Verständnis der Schüler zweckmäſsiger sein, sich der dozierenden resp. synthetischen zu bedienen .... — Jede Methode kann zu guten Erfolgen führen, wenn sie der Fassungskraft der Schüler angepaſst ist, und wenn sich der Lehrer stets davon überzeugt,[2]) ob der Schüler das zu Erlernende begriffen habe.

31 Es kann nicht die Aufgabe des Unterrichts sein, alle

---

in Unterricht, der noch nie einen Speer in der Hand gehabt, als solche, die schon für sich d. h. mit Geübteren, aber immerhin keinen Lehrern gefochten haben. Aus dem gleichen Grunde sind auch die Exerzierschulen meistens wieder vom Schauplatz verschwunden.

[1]) Auch auf dieser Stufe schon wird ein Nebeneinander der verschiedenen Methoden, wie an anderer Stelle angedeutet, wohl am empfehlenswertesten sein. [Entgegen der jetzt durchaus gestellten Forderung der Individualisierung des Unterrichts möchte ich betonen, daſs diese nie so weit gehen darf, daſs der Unterricht das individuelle Gepräge des Lehrenden verliere; der Lehrer muſs meiner Meinung nach ebensosehr, wie durch den Inhalt des Lehrstoffes, durch seine Person auf den Schüler einwirken, dem Unterrichte sein eigenes individuelles Gepräge geben. Die Einwirkung auf den Schüler wird dann eine viel unmittelbarere, lebendigere sein.] Dagegen muſs auf dieser Stufe des Unterrichts die dozierende Methode nur in den allerbescheidensten Grenzen bleiben, ja womöglich ganz vermieden werden.

Vergl. 108.

[2]) Das ist ganz sicher richtig! Es ist aber wohl überhaupt zweifelhaft, ob der Unterricht mit solchem Erfolge möglich wäre.

Schüler so weit zu bringen, dafs sie jede nur mögliche geometrische Aufgabe lösen können.[1]) Die zu lösenden Aufgaben müssen einem bestimmten begrenzten Kreise angehören. .... — Die Aufgaben werden .... in bestimmte Gruppen geteilt .... —

32 Eine weitere Folge des nicht sorgfältig erteilten Unterrichtes ist die ungenaue Ausdrucksweise der Schüler, welche einem der Ziele des mathematischen Unterrichts, der logischen Verstandesbildung, entgegen arbeitet. — Der genaue sprachliche Ausdruck aber — auch hier gilt mens sana in corpore sano — hängt eng zusammen mit der äufserlich sorgfältigen Ausführung der schriftlichen Arbeiten.

1887. Progr. 363. G. Frankfurt a. M. Dr. **Schütz**: Die gegenwärtige etc. —

33 Schliefslich darf nicht unerwähnt bleiben, dafs Professoren der Mathematik an den Universitäten und technischen Hochschulen weniger eine Erweiterung des mathematischen Lehrprogramms an den Gymnasien verlangten als sicheres Wissen des schon seither üblich gewesenen Lehrstoffs und Gewandtheit in der Anwendung desselben.[2]) So erklärt es sich, dafs die Abänderungen im Lehrprogramme sich weniger auf den Inhalt als auf die Methodik beziehen.

34 11 Hauptmomente. 1) Die Übung im logischen Schliefsen, wie sie bei Beweisen stattfindet; dieser Nutzen, der vielfach als in einziger Linie für Gymnasien in Betracht kommend hingestellt wurde, möge auch hier zuerst angeführt werden.

35 Wie schon erwähnt wurde, beruhen die Vorzüge des revidierten Lehrprogramms weniger auf Erweiterung des Lehr-

[1]) Die Einteilung der Aufgaben in Gruppen, geordnet nach bestimmten Prinzipien, dürfte sich wohl jetzt in jeder besseren Aufgabensammlung finden, so z. B. bei **Petersen**, **Hoffmann**, **Lieber** und **Lühmann**. **Reidt** giebt in seiner Aufgabensammlung zwei Teile, den einen nach dem Unterrichtsstoff geordnet, den andern nach Auflösungsmethoden.

[2]) Um ein modernes pädagogisches Schlagwort zu gebrauchen, es handelt sich darum, das Wissen in ein Können umzusetzen.

stoffes als auf Sicherstellung der Erreichung des Lehrziels durch Maſsnahmen von groſsem pädagogischen Wert.

Betonung der Wichtigkeit des mathematischen Unter- 36 richts in den unteren und mittleren Klassen,[1]) indem gewissenhafte Strenge bei der Versetzung in die oberen Klassen gerade bezüglich der Mathematik zur dringenden Pflicht gemacht wird.

Aus dieser Bestimmung geht deutlich hervor, daſs die Regierung den Wert der Mathematik durchaus nicht nach der knappen dafür verfügbaren Stundenzahl bemiſst. Diese echt pädagogische Auffassung wird treffend veranschaulicht durch den von andrer Seite gethanen Ausspruch: „Ein Gymnasium ist keine Fachschule; was gelehrt wird, ist alles gleich wichtig, wenn auch in verschiedenen Portionen zugemessen. Was würde man von dem Apotheker sagen, der da meint, in dem Rezepte des Arztes sei das Volumen oder Gewicht der einzelnen Ingredienzien der Maſsstab ihrer Bedeutung?“ (Siehe Wuttig, Thomas Arnold, der Rektor von Rugby p. 63.)

Besonders wichtig ist in dem revidierten Lehrprogramm 37 die ausdrückliche Betonung der Thatsache, daſs bei richtiger Unterweisung weder zum Verständnis der Elementar-Mathematik, noch zur Erwerbung einer befriedigenden Gewandtheit in der Anwendung des erlangten mathematischen Wissens besondere mathematische Veranlagung, sondern nur gewissenhafter Fleiſs gehört.

In erster Hinsicht ist namentlich auf den Umstand Ge- 38 wicht zu legen,[2]) der schon auf der Berliner Oktoberkonferenz im Jahre 1873 von Bonitz betont wurde, daſs die Schwierig-

---

[1]) Deshalb müſste aber auch die vierte Stunde in Tertia wieder eingeführt werden. Mit drei Stunden wöchentlich kommt man bei den jetzigen Anforderungen nur schwer oder nicht aus.

[2]) Reidt in seiner Anleitung p. 8 führt dies ebenfalls an: „Die an den Schülern der oberen Klassen hier und da beobachtete vollständige Unfähigkeit, dem mathematischen Unterrichte zu folgen, zu deren Erklärung man früher die Hypothese des Mangels an einer vermeintlichen speziell mathematischen Begabung erfunden hat, läſst sich ‘erfahrungsmäſsig fast ausnahmslos auf mangelnde Sicherheit in den Elementen als ihren wahren Grund zurück führen.’“ (Nach Bonitz, in dessen Referat auf der Oktoberkonferenz des Berliner Unterrichtsministeriums.)

keit, welche der Mathematikunterricht in den oberen Klassen zuweilen macht, erfahrungsgemäſs fast ausnahmslos auf elementaren Lücken beruht. Diese Thatsache hängt mit einer Eigentümlichkeit der mathematischen Grundbegriffe sehr wesentlich zusammen. . . . . —

39 Die oft ventilierte Frage, welche Lehrmethoden am geeignetsten seien für den mathematischen (physikalischen) Unterricht an Gymnasien, könnte man sich versucht fühlen, mit dem Voltaire'schen Ausspruch zu erledigen: „Tous les genres sont bons, hors le genre ennuyeux“. . . . .

Die Schwierigkeiten, welche sich bei der sog. sokratischen Lehrmethode im Klassenunterrichte ergeben, wenn dieselbe ausschlieſslich angewandt wird, hat 1845 Prof. Weierstraſs, als er noch Lehrer am Progymnasium zu Deutsch-Krone war, in einem Programm „über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterricht“ sehr anschaulich geschildert.[1]) Die Forderung dieses ausgezeichneten Mathematikers, daſs der Lehrer die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen soll, verdient von allen Fachgenossen wohl beherzigt zu werden.

1887. Progr. Nr. 640. Rg. Braunschweig. — Dr. Dahl: Lehrplan für etc. . . . .

40 Die Frage nach der Unterrichtsmethode drängt sich in den Vordergrund, eine Frage besonders schwerwiegend für diejenigen Klassen, in welchen die Grundlagen dieses Unterrichtsfaches gelegt werden . . . . dann muſs der Unterricht dahin streben, die Erkenntnis mathematischer Wahrheiten von innen aus dem Schüler heraus zu entwickeln; die heuristische Methode, wie sie kurz bezeichnet zu werden pflegt, ist die einzige, welche durchgreifende Anwendung finden kann und

---

[1]) Also auch von dieser hervorragenden Autorität wird die genetische Methode empfohlen; aber sicherlich will Weierstrass diese nicht als die allein in Betracht kommende preisen, sondern sie nur ganz besonders hervorheben. In Verbindung mit der heuristischen wird die genetische Methode dem mathematischen Unterricht vorzüglich ihre Dienste leisten. Zu meinem lebhaften Bedauern konnte ich der Weierstrassschen Abhandlung nicht habhaft werden.

auch finden mufs.[1]) Das wäre das Ideal eines mathematischen Unterrichts, wie er erteilt werden soll, bei welchem dem Schüler nicht einmal der Gedanke käme, dafs er etwas Neues erlerne, bei welchem er nur die Empfindung hätte, an Dinge erinnert zu werden, die ihm eigentlich längst bekannt und vertraut gewesen wären.

Jede mathematische Wahrheit soll von dem Schüler gefunden, nicht von dem Lehrer gegeben werden: das gilt nicht nur vom Beweise, das gilt auch vom Lehrsatze. Erlaubt ist jedes Hülfsmittel, durch welches eine unmittelbare Mitteilung der aufzusuchenden Wahrheit umgangen werden kann.[2]) Als nächstes Hülfsmittel bietet sich die unmittelbare Anschauung. So ergiebt sich in der Planimetrie durch unmittelbare Anschauung der Figur, dafs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind. 41

1884. Progr. Nr. 257. G. Kiel. — Dr. R. von Fischer-Benzon. Die geometrische Konstruktionsaufgabe etc.

In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts war die Mehrzahl der Mathematiker geneigt, ausschliefslich im Euklid das wahre Muster der geometrischen Methode zu erblicken,[3]) und 42

---

[1]) Es stimmt das mit der an anderer Stelle mitgeteilten Ansicht überein, dafs das Ideal der geometrischen Beweisführung die Evidenz der Notwendigkeit sei; denn diese Evidenz der Notwendigkeit ergiebt sich eben dann, wenn dem Schüler der Lehrstoff wie seine Verarbeitung naturgemäfs erscheinen, also eine Empfindung in ihm hervorrufen, die der im Zitat ausgesprochenen analog resp. identisch ist.

[2]) So sehr auch ich auf dem Standpunkt stehe, dafs die Anschauung eines der wichtigsten Hülfsmittel beim geometrischen Unterricht ist, so mufs ich doch gerade bei diesem Beispiel die Evidenz der Wahrheit als durch die Anschauung gegeben anzweifeln; wollten wir psychische Momente im mathematischen Unterrichte mehr gelten lassen, als bisher, so würde ich bei diesem Beispiel das angeborene Gefühl der Symmetrie als dasjenige hervorheben, das uns von der Wahrheit des betr. Satzes unmittelbar überzeugt. Dazu bedürften wir aber der Symmetrieaxe.

[3]) Leider dürfen wir uns bei der Beurteilung dieser Frage nicht einmal auf die Zahl der Lehrbücher beschränken, sondern müssen auf ihre Verbreitung noch höheren Wert legen. Bei einer derartigen Statistik ergiebt sich ein ganz gewaltiges Übergewicht der nach alter Methode bearbeiteten Lehrbücher.

ganz ist diese Ansicht noch heute nicht verschwunden. Das beweisen nicht nur eine grofse Zahl der jetzt noch gebräuchlichen Lehrbücher, sondern auch mancherlei Aussprüche in Fach- und Zeitschriften.

43 Kritik von Erlers Ansicht in Schmidts Encyklopädie: Auf die Anschaulichkeit der geometrischen Wahrheiten und Resultate,[1]) sowie auf die Schwierigkeit, zu richtigen Resultaten zu gelangen, wird aufmerksam gemacht, aber von dem Einflusse der Geometrie auf die Ausbildung der Anschauung selbst ist wenig die Rede.

44 Erler (Sch. E. p. 928). Die Lösung von Konstruktionsaufgaben kann ebensowenig,[2]) wie das Finden einer versteckten Sache, zu einer bestimmten Anforderung gemacht werden. (Längere Ausführung.)

Gut widerlegt von Fischer-Benzon.

45 Wenn Prof. Erler und V. Schlegel meinen, dafs es eine allgemeine Methode zur Auflösung aller möglichen Konstruktionsaufgaben nicht giebt, so mufs man ihnen unbedingt recht geben. Anders würde die Sache aber sein, wenn man aus der ungeheueren Fülle von Konstruktionsaufgaben diejenigen auswählte,[3]) welche dem Wissen und Können der Schüler entsprächen, und diese methodisch zu behandeln versuchte.

46 Der Unterricht in der Geometrie soll die Schüler nicht nur im richtigen Schliefsen, also im Nachdenken üben, er soll

---

[1]) Und doch ist gerade die Wechselwirkung zwischen Anschauung und Geometrie von hervorragendem Werte und daher der Einflufs der Geometrie auf die Anschauung oder vielmehr das Anschauungsvermögen mindestens ebenso zu betonen, wie derjenige der Anschauung auf die Geometrie.

[2]) Erler wird wohl inzwischen auch von dieser Ansicht abgekommen sein, die aber gewifs ihre Berechtigung hatte, so lange gerade das Gebiet der Konstruktionsaufgabe in höchst unsystematischer, den Schüler allerdings abschreckender Weise behandelt wurde. Dafs im Bereiche der Schule es sich immer nur um ein beschränktes Gebiet von Aufgaben, nicht um jede beliebige geometrische Aufgabe handeln kann, ist schon an anderer Stelle ausgeführt.

[3]) Dies scheint der allein richtige Standpunkt zu sein. Fischer-Benzons hervorragende Arbeiten auf diesem Gebiete des Unterrichts haben übrigens wesentlich dazu beigetragen, dafs sich die Ansichten zu Gunsten der Konstruktionsaufgabe geändert haben.

in erster Linie auf die Ausbildung ihres räumlichen Anschauungsvermögens wirken. Daneben liefert die Geometrie auch noch reiches Material, an dem der Schüler lernen kann, selbständig Begriffe zu bilden und Beobachtungen zu machen. Auch darf man den Vorteil nicht gar zu gering anschlagen, der dem Schüler daraus erwächst, dafs er lernt, sich mit einiger Sicherheit auf einem Gebiete zu bewegen, das den Anschauungen des täglichen Lebens zum Teil so fern liegt,[1]) und endlich möge man bedenken, dafs die geometrischen Aufgaben die einzigen sind, die ihm eine erschöpfende Behandlung gestatten, und deshalb die einzigen, denen er schon auf der Schule eine Behandlung zu teil werden lassen kann, die auf die Bezeichnung wissenschaftlich Anspruch erheben darf.

Soll der Unterricht in der Geometrie auf d. a. Weise wirken, so ist man genötigt, von Euklid und seinen Nachfolgern nicht unerheblich abzuweichen, man mufs das Vorurteil aufgeben, dafs die bewiesene Wahrheit für die Jugend irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten habe."[2]) (Vergl. Schopenhauer, Die Welt als Wille und Vorstellung. Lpzg. 1873. I p. 87.) 47

Im Euklid und in denjenigen Lehrbüchern, welche wesentlich im Geiste des grofsen griechischen Mathematikers abgefafst sind, werden auch solche Sätze bewiesen (z. B. Euklid III. Buch. Satz 11—12),[3]) deren Richtigkeit sofort durch An- 48

[1]) Dafs zu diesen Vorzügen noch ein weiterer hinzukommt, darf nicht vergessen werden: ich meine den, dafs der Schüler allein bei den geometrischen Konstruktionsaufgaben die Freude des Erfindens und in hervorragendem Mafse die Befriedigung über erfolgreiche eigene Arbeit haben wird.

[2]) Diese Bemerkung scheint mir von weittragender Bedeutung zu sein. Verschliefst man sich der darin liegenden Wahrheit nicht, so wird man auch der bisherigen Methode des planimetrischen Unterrichts, besonders in den Anfängen, entschieden den Rücken kehren und der Anschauung die Rolle zuweisen müssen, die ihr gebührt.

[3]) Es handelt sich hier um Lehrsätze, die bei einer richtigen Behandlung der Lagenverhältnisse zweier Kreise sich allerdings direkt aus der Anschauung ergeben, wenn man nur die Betrachtung der Bewegung zu Hülfe nimmt. Bei der stofflichen Behandlung werde ich gerade eine ganze Reihe von derartigen Lehrsätzen mit Beweisen ausscheiden, um an ihre Stelle einfache anschauliche Betrachtungen zu stellen. In be-

schauung klar wird, und man hat denkenden Schülern gegenüber einen harten Stand,[1]) wenn man ihnen die Notwendigkeit eines Beweises darthun will. Den strengen Beweis wird niemand im Ernste aus der Welt schaffen wollen; im Verlauf des Unterrichts ergiebt sich ganz von selbst die Notwendigkeit, die logische Kontrolle oder den Beweis zu Hülfe zu nehmen, denn die Anschauung allein reicht bei komplizierten Figuren nicht mehr aus,[2]) und man macht überdies die Erfahrung, daſs die Anschauung täuschen kann.

49 Ein gleich eigentümliches Schicksal hat die axiale Symmetrie erfahren. Es wird schwierig sein, ein Lehrbuch der Geometrie zu finden,[3]) in dem nicht gelegentlich die Eigenschaften symmetrischer Gebilde benutzt würden, und doch giebt es nur verhältnismäſsig wenig Bücher, welche der Symmetrie einen Abschnitt oder gar ein Kapitel widmen.

50 Bedeutsam für den Unterricht in der Geometrie ist die Bestimmung des neuen Lehrplans, wonach in der Quinta geometrisches Zeichnen getrieben werden soll. Diese Beschäftigung kann auch recht wohl in der Quarta in den für die Geometrie bestimmten Lehrstunden fortgesetzt werden. Durch das geometrische Zeichnen hat man Gelegenheit, die Schüler in ähnlicher Weise in die Geometrie einzuführen, wie durch das gewöhnliche Rechnen in die Arithmetik und Algebra; man verschafft ihnen dadurch nicht allein Gewandtheit im Umgehen mit Zirkel und Lineal, sondern man kann ihnen auch, selbstverständlich ohne eigentliche Geometrie zu treiben,

---

schränktem Maſse finden wir entsprechende Änderungen bei Rausenberger in seinem öfter erwähnten Lehrbuch.

[1]) Vergl. 124.

[2]) Man muſs hier auch unterscheiden zwischen der Anschauung a priori und der anschaulich erkannten Wahrheit. Daſs das Dreiseit drei Winkel hat, könnte man vielleicht eine Anschauung a priori nennen; daſs das n seit n Winkel hat zu den Anschauungen rechnen, die erst vermittelt werden müssen.

[3]) Diese Thatsache ist wirklich auffallend, da die Symmetrielehre bei der Behandlung des geometrischen Stoffes wirklich bedeutende Vorteile an die Hand giebt, auf die man ohne weiteres Verzicht geleistet hat. Die Symmetrielehre muſs da, wo die Anschauung eine Rolle spielt, ebenfalls ihrer Bedeutung gemäſs Berücksichtigung finden.

eine Reihe von Kenntnissen anschaulich zu eigen machen, die ihnen später erst begrifflich klar werden.

1888. Progr. Nr. 10. G. Königsberg. Dr. L. Heinze: Der Vorbereitungsunterricht etc.

Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal ist jedoch nicht das Ziel unseres Unterrichtes. Die Schüler sollen hier zwar sauber und genau zeichnen lernen und sich im Gebrauch der Zeicheninstrumente üben, aber sie sollen nicht allein zeichnen, es soll „durch Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal eine methodische Ausbildung der Anschauung“ erstrebt werden. 51

Darauf, dafs ein Paar Axiome mehr oder weniger im geometrischen Unterricht vorausgesetzt werden, kommt es .... nicht gerade an,[1]) und es ist richtig, dafs der pädagogische Wert der Euklidischen Beweisführung durch die Anzahl der verwendeten Axiome nicht beeinflufst wird,[2]) wenngleich es die Aufgabe der geometrischen Wissenschaft sein wird, ihre Zahl auf ein Minimum zu reduzieren. 52

Was nun die Axiome und die damit verbundenen Postulate anlangt, so knüpft man an „an die im Kinde schon vorhandenen, von Kindheit auf eingewohnten Anschauungen“ und stöfst nicht „jene Grundlagen geflissentlich von sich, als ob sie völlig wertlos und der wahren Wissenschaft nur hinderlich wären“. 53

Der Hauptgegenstand für den propädeutischen Unterricht wird die Vorbereitung der Erklärungen sein. Wenn wir daran denken, dafs es sich hier um Anschauungen handelt, nicht um Begriffe, werden wir eine Beschreibung der Entstehung geben lassen. Die allgemeine Definition (sowohl die genetische als die deskriptive) wird im späteren Unterrichte gelernt. (Vergl. zur Nieden, Meyer, Weingärtner.) 54

---

[1]) Das ist sehr richtig; dafs auch Verfasser diese Ansicht teilt, geht aus einer Stelle dieser Einleitung hervor. Es sei auch hier noch einmal erwähnt, dafs E. Müller in seinen Grundbegriffen 24 Grundsätze aufstellt.

[2]) Vergl. Zitat Nr. 182 nebst zugehöriger Anmerkung.

1881. Progr. Nr. 415. Gewerbesch. Remscheid. Dr. Kaiser: Über einige Hauptpunkte etc.

55 Die gedeihliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts ist in nicht geringem Maſse durch das weit verbreitete Vorurteil geschädigt worden, daſs zum Verständnis der Mathematik ein besonderes und eigenartiges Talent erforderlich sei.[1]) Wollte es sich der Lehrer bequem machen, so bot ihm diese Ansicht einen ausreichenden Entschuldigungsgrund, um sich nur mit den wenigen „mathematischen Köpfen" zu befassen und das Gros der Klasse völlig zu vernachlässigen. Der denkfaule Schüler selbst glaubte einen Unterrichtszweig mit Recht perhorreszieren zu müssen, für welchen ihm nun einmal das Talent abgehe, während auf der entgegengesetzten Seite das falsche Dogma einer mathematischen Prädestination zu eitler Selbstüberhebung nahe liegende Veranlassung bot.

56 Mittlerweile ist jene falsche Meinung einer richtigeren Einsicht in demselben Maſse gewichen, wie sich die mathematischen Durchschnittsleistungen an der Hand einer besseren und stetig nach Vervollkommnung strebenden Lehrmethode erfahrungsmäſsig gehoben haben.

57 Daher ist es denn auch nicht im entferntesten mehr fraglich, daſs gerade die mathematischen Disziplinen berufen sind, den jugendlichen Geist an klare Auffassung, an ein folgerichtiges, auf die wesentlichen Punkte der Voraussetzung konzentriertes Denken zu gewöhnen, daſs die Mathematik, ganz abgesehen von ihrem materialen Wert und Inhalt, als formales Bildungselement auf unseren höheren Schulen nicht entbehrt werden kann.

58 Sokrates bei Plato: „Es ist bekanntlich in Bezug auf jedes Lernen,[2]) um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied zwischen Einem, der sich mit Geometrie befaſst hat, und dem, der es nicht gethan hat."

59 Die bereits wahrgenommene Hebung der mathematischen Leistungen entspringt nicht zum geringsten Teil dem Um-

---

[1]) Vergl. die Anmerkung zum Zitat Nr. 17.

[2]) Daher auch Platos Wort: *Μηδεὶς εἰσίτω ἀγεωμέτρητος*, das er über der Thür seines Hörsales eingraben lieſs.

stande, dafs die veraltete Ansicht von einer spezifischen Kapazität für Mathematik der besseren Einsicht hat weichen müssen, dafs die früher übliche abstrakte, den jugendlichen Geist förmlich abschreckende Lehrmethode nicht am Platze war.

Die deduktive Methode, welche lange Zeit eine unbestrittene Alleinherrschaft behauptet hatte, erscheint beim Anfang des mathematischen und zumal des geometrischen Unterrichts völlig verkehrt. Die alte Schule, welche glücklicherweise nur noch vereinzelte Anhänger hat,[1]) übergofs sozusagen den Anfänger beim Beginn der Geometrie mit einer Flut von Abstraktionen und Begriffen, zu deren Bildung vorher auf induktivem Wege das nötige Material nicht gesammelt worden war. So war es nicht zu verwundern, wenn trotz aller Definitionen und Deduktionen — um mit Kant zu reden — die Begriffe ohne die Anschauung leer blieben, wenn folglich die Lust und Liebe, welche der unbefangene Schüler der Geometrie nicht weniger wie jedem andren neuen Unterrichtsgegenstande entgegenbringt,[2]) gleich zu Anfang erstickt werden mufste. 60

Gegen einen solchen Kursus könnte eingewendet werden, dafs, da die geometrischen Objekte, wie vollkommen gerade Linien, Kreise, Ebenen u. s. w. in der Erfahrung nirgends anzutreffen sind,[3]) für die Geometrie aus der Erfahrung auch 61

---

[1]) Zu dieser Ansicht ist es wohl schwer zuzustimmen; es sei denn, dafs unter „alter Schule" hier noch etwas anderes verstanden werden soll, als das, was wir mit diesem Worte zu verbinden gewöhnt sind.

[2]) Diese Bemerkung scheint sehr richtig. Gerade die Jugend ergreift jeden neuen Gegenstand, der ihr geboten wird, mit einer naiven Frische, die dem Unterrichtsstoff wesentlich zu gute kommt. Dafs im Unterricht ferner oft alles geschieht, natürlich unbewufst, um dieses Interesse möglichst bald in Abscheu zu verwandeln, ist ebenso richtig. Daher mufs dafür gesorgt werden, dafs dieser Übelstand vermieden wird und dies wird geschehen, wenn der Unterricht ein naturgemäfser ist, im geometrischen Unterricht z. B., wenn er an die Anschauung anknüpft, auf sie sich stützt und in ihr, im ganzen Anfangsunterricht wenigstens, sein vorzüglichstes Hülfsmittel sieht. Vergleiche auch die Bemerkungen über Definitionen an anderen Stellen.

[3]) Gerade der Umstand, dafs die geometrischen Objekte nirgends thatsächlich vorkommen, aufser in unserer reinen Vorstellung, spricht dagegen, dafs die Gegenstände geometrischer Untersuchung aus der Er-

nichts zu lernen sei. Es müfste denn sein, dafs John Stuart Mill Recht hätte, welcher in einem besonderen Kapitel seines Systems der induktiven und deduktiven Logik zu beweisen versucht, dafs sich die Geometrie in der That mit empirischen Geraden und Kreisen beschäftige, dafs demnach ihre Definitionen aus der Erfahrung abstrahiert, ihre Axiome in derselben a posteriori begründet seien..... Denn, wenn sich auch die Geometrie .... mit Punkten ohne jegliche Ausdehnung ...., also mit idealen Gebilden befafst, welche sich der empirischen Wahrnehmung thatsächlich entziehen, so ist damit keineswegs ausgeschlossen, dafs der abstrahierende Verstand durch die sinnliche Erfahrung den ersten Anstofs zur Bildung jener transscendenten Vorstellungen und Begriffe erhält.

62 Die gröfsten Schwierigkeiten erheben sich, sobald man es versucht, den Begriff der geraden Linie in eine bündige Definition zu fassen. Hier scheinen in der That diejenigen Mathematiker das Richtigste zu treffen,[1]) welche die Vorstellung

---

fahrung entnommen sind: weshalb auch die Axiome nicht a posteriori in der Erfahrung begründet sein können. Alles wirklich Dargestellte giebt nur Bilder von geometrischen Objekten und zwar, wie ausgeführt werden wird, nicht einmal — aufser bei den Körpern — reelle Bilder. Die Schwierigkeiten der Vorstellung werden am leichtesten überwunden, wenn man streng daran festhält, dafs wir von den Körpern auszugehen haben und von ihnen aus durch Grenzbetrachtungen erst zu den übrigen Raumgebilden gelangen. Erst nachdem auf diese Weise die Vorstellungen gewonnen sind, können wir nun rückwärts vom Punkt ausgehen und mit Hülfe des Begriffs der Bewegung die höheren Gebilde entstehen lassen.

[1]) Wie sehr Verfasser mit diesen Bemerkungen übereinstimmt, wird sich bei der Betrachtung der Grundbegriffe mit erneutem Gewicht ergeben. Die Gerade gehört zu den Grundbegriffen a priori, deren Vorstellung bei jedem Knaben vorausgesetzt werden mufs und darf. Alle Definitionen kommen schliefslich darauf hinaus, dafs im Grunde angenommen wird, dafs der Begriff der Geraden geläufig sei; und gerade auch diejenige sog. Definition, die jetzt gewissermafsen Mode ist, die Gerade als ideelle Drehungsaxe zu erklären, setzt den Begriff der Geraden voraus. Was die Erklärung der Geraden unmöglich macht, ist, abgesehen davon, dafs wir es hier mit einem Grundbegriff a priori zu thun haben, der Dualismus, der in der Auffassung der Geraden liegt und der unter keinen Umständen entfernt werden kann, ein doppelter Dualismus sogar. Zuerst liegt zu Grunde der Begriff der Richtung und diese ist eine

der Geraden für so ursprünglich und einfach halten, dafs sie sich in einfachere Elemente nicht zergliedern läfst. In diesem Sinne sagt z. B. Tellkampf in seiner Vorschule der Math. § 222: „Unter allen denkbaren Bewegungen eines Punktes A ist die einfachste die in gerader Linie AA. Es ist unmöglich, von einer solchen eine Erklärung zu geben, wodurch ihr Begriff auf einfachere Vorstellungen zurückgeführt würde, da sie zu den unmittelbar gegebenen Grundvorstellungen der Geometrie gehört.“ Auf keinen Fall kann es angezeigt erscheinen, über einen so schwierigen Punkt mit 11—12jährigen Knaben spekulative Erörterungen anzustellen, welche schliefslich nur geeignet sind, die ursprünglich klare Vorstellung zu verwirren. — .... Ich halte den Begriff der Richtung für so fest und klar in der Anschauung begründet, dafs er, ohne weiter definiert zu werden, der geometrischen Erklärung der Geraden zu Grunde gelegt werden kann. Hienach entsteht die Gerade durch die Bewegung eines Punktes, welcher seine Anfangsrichtung unausgesetzt beibehält. — .... Wenn, sobald von der geraden Linie die Rede ist, jeder Schüler sich eine genaue Vorstellung von derselben zu bilden vermag, so hat der Lehrer mehr erreicht, als wenn er der Klasse eine wohlgedrechselte aber unverständliche Definition samt daraus fliefsenden Lehrsätzen und Folgerungen eingebläut hat.[1]) Indem man den Anfänger pedantisch damit quält, dunkle Redensarten um an sich klare Dinge zu machen, vernichtet man von vornherein das Interesse und damit eine wesentliche Grundbedingung für den sicheren Erfolg des geometrischen Unterrichts überhaupt.

Es ist nicht meine Absicht, im Folgenden auf die Methode des geometrischen Unterrichts im Allgemeinen einzu- 63

---

doppelte, wenn wir die Gerade an sich betrachten; zweitens liegt zu Grunde der Begriff des Abstandes zweier Punkte, der zwar auch ein doppelter ist, aber gerade in der Hinsicht, in der er betrachtet wird, nur als ein einfacher erscheint. Doch hierüber wird im Texte ausführlich gehandelt werden.

[1]) Man vergleiche hierzu an verschiedenen Stellen, wie sehr mit diesen Bemerkungen die Ansichten des Verfassers sowohl als sehr vieler anderer Mathematiklehrer getroffen sind.

gehen und mich etwa über „Euklidische Starrheit", „genetische Entwickelung", „heuristisches Verfahren" u. dergl. weitläufig auszusprechen. Angesichts der individuellen Verschiedenheit von Lehrenden und Lernenden wird man vergeblich nach einer Formel für eine allgemein gültige Methode suchen.

---

64 Pascals Regeln für den mathematischen Unterricht:[1])

1) Nichts definieren wollen, was sich nicht durch deutlichere Ausdrücke erklären läfst.

2) Keinen etwas dunklen oder zweideutigen Ausdruck ohne Erklärung lassen.

3) In allen Definitionen nur völlig bekannte oder bereits erklärte Ausdrücke gebrauchen.

4) Keinen notwendigen Grundsatz übergehen, wie klar er auch an sich sein möge.

5) Nur vollkommen augenscheinliche Axiome zulassen.

6) Niemals etwas beweisen wollen, das an sich so deutlich ist, dafs man es nicht auf etwas deutlicheres zurückführen kann.

7) Behauptungen, die an sich nicht völlig klar sind, durch Zurückführung auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze darthun.

8) Niemals eine Zweideutigkeit im Ausdruck benutzen, indem man unterläfst, in Gedanken die Definition zu substituieren, welche ihn beschränkt oder erläutert.

Oesterr. Organisationsentwurf der Gymnasien und Realschulen. 1849. — p. 163.

65 Sollen die wissenschaftlichen Lehrer der Geometrie den

[1]) Es ist mir leider nicht bekannt, in welcher Schrift Pascals sich diese Regeln finden: mir sind sie in einer handschriftlichen Aufzeichnung vor Augen gekommen. Jedenfalls haben sie noch jetzt volle Gültigkeit und, wenn sie von Anfang an beachtet worden wären, so würde es sicher um manches im mathematischen Unterricht besser stehen, als es jetzt thatsächlich der Fall ist. Besonders beherzigenswert erscheinen mir Regel 1), 4), 6).

Lernenden keine anderen als die in der Sache selbst liegenden Schwierigkeiten machen, so mufs vor dem Beginn des wissenschaftlichen Lehrgangs die mathematische Phantasie gehörig entwickelt sein, d. h. die Fähigkeit, räumliche Gebilde und Verhältnisse sich genau und sicher vorzustellen, ohne die Hülfe einer Zeichnung ebensowohl, als mit dieser Unterstützung. Diese mathematische Phantasie ist keine ausschliefsende Naturgabe, sondern der methodischen Bildung fähig. . . . .[1])

Herbart. Päd. Schriften I p. 113. (Lpzg. 1873.) 66
Das Anschauen ist die wichtigste unter den bildenden Beschäftigungen des Kindes und des Knaben.

Hubert Müller: Besitzt die heutige Schulgeometrie etc. Metz, Scriba.

Das Resultat der Untersuchung des ersten Kapitels der 67 Geometrie ergiebt,[2]) dafs die Behandlung desselben nicht mehr

---

[1]) Damit spricht sich also auch dieser Entwurf dafür aus, dafs keine besonderen Anlagen für den mathematischen Unterricht erfordert werden.

[2]) Besprochen in H. Z. XVIII. p. 520 durch v. Fischer-Benzon. Es heifst zum Schlufs: „Allen Berufsgenossen, namentlich Fachgenossen, seien sie nun Gegner oder Verbündete des Verfassers, sei das Studium der kleinen Schrift dringend ans Herz gelegt; die Gegner werden dadurch erfahren, dafs nicht Mangel an Ehrfurcht vor dem Hergebrachten die Triebfeder der reformatorischen Bestrebungen ist; die Verbündeten werden dabei Gelegenheit nehmen können sich lebhaft vor Augen zu führen, dafs es keineswegs leicht ist, eingewurzelte Schäden als solche zu erkennen; beide aber müssen dem Verfasser für die gründliche und objektive Darlegung dieser Schäden dankbar sein.“ — Man vergleiche mit der hervorragenden Schrift Müllers eine andere, die denselben Gegenstand behandelt: Dr. C. Heinze, Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie. — Berlin 1876 —, die ebenfalls sehr viel Interessantes und Richtiges bietet, wenn sie auch an sachlicher Kritik mit Müllers Schrift keinen Vergleich aushalten kann. An seine Kritik schliefst Heinze eine Bearbeitung der Elemente an, die uns weiter unten noch beschäftigen wird. — Aus seiner kritischen Beleuchtung sei folgende Stelle hier zitiert: „Zu einem konsequenten Denken, zu dem gerade durch die Mathematik die Schüler angeleitet werden sollen, fehlen ihr (der Euklid. Geometrie) demnach die allernotwendigsten Bedingungen, nämlich Klarheit und Natürlichkeit.“ S. f. S.

Euklidisch genannt werden kann. Die Grundlagen sind wesentlich geändert, ohne dafs dieser Änderung die nötige Rechnung getragen ist. .... Es zeigt sich, dafs gerade die äufserliche Nachahmung des Euklid gegenwärtig noch am meisten beliebt ist, obgleich sie in dem schärfsten Widerspruche zu der Änderung der Grundlagen (nämlich der Beseitigung des Prinzips der Starrheit) steht, welche in allen Lehrbüchern angenommen ist.

68 Der Wert des Systems wird hierdurch (nämlich Aufstellung eines neuen Grundsatzes) nicht beeinträchtigt; denn derselbe hängt nicht von der Zahl der Grundsätze ab, sondern von der Wahl derselben und davon, ob das System konsequent auf den Grundsätzen aufgebaut ist oder nicht.

69 Allerdings kann nicht geleugnet werden, dafs die Beweise Euklids schwerfällig sind, aber die Ursache davon liegt nur in den Grundlagen des Systems; die Zurückführung der Lehrsätze auf diese Grundlage ist untadelhaft und begründet den Ruf des Euklidischen Systems in Bezug auf logische Schärfe.

70 Es handelt sich also nicht um eine Reform des Euklidischen Systems, sondern um eine solche unserer Schulgeometrie, welche die Brücke zwischen sich und dem Euklidischen Werke schon abgebrochen hat. .... Die Hochschätzung der Euklidischen Elemente, ja die pietätvolle Liebe zu diesem Werke werden durch die Entwicklung unserer Schulgeometrie nicht geschädigt. — .... Die gegenwärtige Schulgeometrie ist wegen der Veränderung der Grundlagen nicht mehr als dem Wesen nach Euklidisch zu betrachten. .... Die Reform der Schulgeometrie hat jedenfalls in denjenigen Veränderungen volle Berechtigung, welche die Herstellung der Einheit zwischen den Grundlagen und dem Aufbau des Systems bezwecken.

---

71 Gymn. zu Cassel. 1860. Progr. von Ernst: Die Methoden etc.

„Die .... kritische Beleuchtung der euklidischen Geometrie führt unwillkürlich auf den Gedanken, dafs Euklid bei Abfassung derselben sich die eleusinischen Geheimnisse zum Vorbilde gewählt hat und dafs alle Nachfolger dieselbe in gleicher Weise ausschmücken."

...., so kann wohl kaum ein Zweifel darüber sein, dafs in dieser Disziplin die analytische Methode den ersten Rang einnehmen mufs ....; dieses (thätiges und schaffendes Eingreifen in den Denkprozefs selbst) leistet aber hier allein die Analysis,[1]) sie allein gestattet den Lernenden einen klaren Blick in sein Thun und Treiben und liefert über jeden Schritt die genaueste Rechenschaft.

Die Hauptursache, welche jene Unordnung hervorgerufen 72 hat, liegt darin, dafs man bei Anordnung des Materials fast lediglich die Beweismittel im Auge hatte.[2])

Allein nicht nur die Anordnung des Stoffes, auch die Form 73 der Darstellung ist ungenügend für einen fruchtbringenden Unterricht. Die Definitionen und Axiome werden dem Schüler fertig gegeben; der Lehrsatz wird vorgeführt,[3]) die zum Beweise nötigen Hülfslinien gezogen und dieser nun selbst in eine Reihe sich gleichsam verschanzender Behauptungen geführt. Glauben mufs der Schüler am Ende .... aber er kann auch nur blindlings glauben..... Künstlich und äufserlich .... er hätte gewifs der Behauptung des Lehrers ebensogern geglaubt, wie einem solchen Beweise .... Selbstthätigkeit des Schülers bei dieser Methode auf ein Minimum beschränkt..... Ich bin der festen Überzeugung, dafs diese Methode sehr vielen Schülern das Studium der Geometrie verbittert und die tägliche Erfahrung bestätigt es durch die geringe Anzahl

---

[1]) Vergleiche hierzu die verschiedenen Zitate, die sich über diese Frage auslassen.

[2]) Dieser Vorwurf ist es, der gleicherweise von allen Seiten den Euklidschen Elementen gemacht wird, dafs nur darauf gesehen ist, dafs jeder Satz sich aus den vorhergehenden beweisen lasse, aber nicht auf den systematischen Zusammenhang der Sätze selbst untereinander. Darin liegt die Schwäche der Elemente, infolge deren sie als Unterrichtsbuch für den Anfangsunterricht sich als unzureichend erwiesen haben: darin liegt aber auch andererseits ihre Stärke als Muster eines logischen Aufbaues, das unerreicht ist und das diese Elemente durch zweitausend Jahre hindurch ihren alten Ruf hat bewahren lassen.

[3]) Man vergleiche zu diesem Zitat Schopenhauers an anderer Stelle gegebene Ansicht. — Ernst trifft hier mit wenigen Worten die Grundschäden, die der Unterricht durch die Verwendung der Elemente resp. durch die Euklidsche Methode erlitten hat.

derer, welche dem geometrischen Unterricht Interesse abgewinnen.

74 Den Übelständen kann nur durch Einführung der genetischen Methode abgeholfen werden. (Schilderung der genetischen Methode.) Synthetische Behandlung mufs der genetischen folgen.

Schrader: Erziehungslehre.

75 p. 531. — Eine andere Frage ist, ob nicht vielmehr der mathematische Unterricht über die jetzt üblichen Grenzen hinaus nach bestimmten Richtungen hin erweitert werden dürfe,[1]) natürlich unter entsprechender Beschränkung des jetzigen Lehrstoffes. Die Frage mufs insoweit bejaht werden, als die neu hinzutretenden Richtungen geeignet sind, nicht die Summe des Wissens, sondern die mathematische Einsicht und Anschauung zu mehren und hierdurch eine einfachere, lebendigere und eben deshalb festere Durchdringung des bisherigen Unterrichtsgebietes zu ermöglichen. Dieser Vorteil darf aber mit Sicherheit von der beschreibenden und der sog. neueren Geometrie erwartet werden.....

76 § 142. Der Unterricht soll .... nicht ausschliefslich im Wege des demonstrierenden Vortrags, sondern zu einem guten Teile heuristisch erteilt werden. — .... So gestaltet sich die in formalem Bezuge heuristische Methode sachlich zur genetischen um.....

77 § 142. Anmerkung 1. — Überdies handelt es sich nicht um den ausschliefslichen Gebrauch einer, sondern um die geschickte Kombination aller sachlich bewährten Methoden.

Waitz: Pädagogik § 26.

78 p. 405. Da die strenge Form der Wissenschaft dasjenige ist, wodurch die Bedeutung der Mathematik als Unterrichtsgegenstand bestimmt wird, so ergiebt sich von selbst, dafs der Unterricht in derselben einen vorzugsweise behutsamen

[1]) Dafs eine so bedeutende Autorität, wie Schrader, sich ebenfalls für eine Erweiterung des geometrischen Unterrichts ausspricht, zitiere ich mit besonderer Genugthuung.

und bedächtigen Gang nehmen mufs, der im Vorwärtsschreiten stets zurückschaut und nach Grund sucht für jedes Spätere in dem Früheren. Er wird sich daher eher noch den Vorwurf der Pedanterie, als den der Flüchtigkeit machen lassen dürfen, da jede kleine Nachlässigkeit in den Anfangsgründen, ja schon jede Unsicherheit in augenblicklicher Beherrschung derselben von Seiten des Schülers entweder die Stetigkeit des Fortschreitens selbst hindert, oder es doch nicht zur Klarheit der Übersicht .... kommen läfst. ....

p. 407. Demgemäfs ist das sinnlich Anschauliche der notwendige Ausgangspunkt des mathematischen Unterrichts.... 79

Es erfordert dies die Fafslichkeit der Lehre für den Schüler, denn auf allen Gebieten des Wissens mufs die positive Kenntnis einer Summe zusammengehöriger Thatsachen der Begriffsbildung und der Einsicht in den inneren Zusammenhang derselben vorausgehen. Die Thatsachen, welche dem mathematischen Unterricht zur Grundlage dienen, sind diejenigen, welche der früher besprochene Anschauungsunterricht zu lehren hat.

p. 412. Hierbei kann es vom pädagogischen Standpunkte nur gebilligt werden, wenn der Lehrgang der Euklidischen Geometrie mehr und mehr einer solchen Behandlung weicht, die sich bestrebt, ... die einzelnen Lehrsätze mehr nach der Verwandtschaft ihres Inhaltes zu gruppieren, die dem Schüler so leicht entschwindet, wo die Ordnung derselben nur dadurch bestimmt wird, dafs jeder nachfolgende Satz immer einige der vorhergehenden zu seinem Beweise bedarf. (Parallelismus des planimetrischen und stereometrischen Unterrichts verdient alle Aufmerksamkeit.) 80

p. 416. Die Klage über die häufige Erfolglosigkeit des mathematischen Unterrichtes, welche in der neueren Zeit immer allgemeiner durch die gröfsere Anstrengung und die verbesserte Methode zum Schweigen gebracht zu werden scheint, hat ihre Hauptursache gerade in dem, was die Eigentümlichkeit und den besonderen Vorzug der Mathematik als intellekten Bildungsmittels ausmacht, in ihrer Strenge und Systematik .... — .... Die Schwierigkeit der Mathematik beruht bei der Einfachheit und Fafslichkeit ihrer Grundlagen 81

für die meisten vorzüglich auf der schlechten Gewöhnung, keinen Gedanken vollständig bestimmt auszudenken und rein festzuhalten. . . . .[1])

Beneke, Erziehungs- und Unterrichtslehre. II. § 122.

82 p. 136. Man hat freilich nicht selten behauptet, auf die Mitteilung dieser müsse man schon deshalb bei den Meisten verzichten, weil für die Mathematik eine ganz besondere Anlage erfordert werde, und nur sehr Wenige dazu organisiert seien, in diesem Unterrichtsgegenstande einigermafsen Fortschritte zu machen. Aber diese Meinung braucht wohl jetzt kaum noch widerlegt zu werden, seitdem durch die Pestalozzische Methode in Hinsicht der elementarischen Formen- und Zahlenlehre der Beweis des Gegenteils geführt ist. Hierdurch sind auch in Hinsicht der übrigen Teile der Mathematik die langgewurzelten Vorurteile entfernt, und die Erkenntnis des Richtigen geöffnet worden. In der That giebt es kaum einen andern Gegenstand, für welchen, wenn der Unterricht zweckmäfsig erteilt wird, weniger eine besondere Anlage erfordert würde, als für diesen.[2])

83 II. p. 135. . . . . „Dies alles zusammengenommen also würde die Mathematik, schon als höchste Musterform der Klarheit, der Gründlichkeit, der Strenge und der Anschaulichkeit in der wissenschaftlichen Konstruktion, einen unschätzbaren Wert für die formale Bildung behaupten.“

„Hierzu kommt nun, in materieller Beziehung, nicht blos der ausgedehnte Nutzen für das Leben, sondern auch, dafs sie in dem weitesten Umfange die meisten übrigen Wissenschaften beherrscht, und insofern als ein wesentliches Element der allgemein-menschlichen Erkenntnis betrachtet werden mufs.“

---

[1]) Was die Einfachheit und Fafslichkeit der Grundlagen betrifft, so dürfte Waitz zu optimistisch gesehen und geurteilt haben. Es ist im Gegenteil sicherlich kein unerheblicher Teil der Schuld am Mifserfolg des mathematischen Unterrichts der Sorglosigkeit bei der Legung der Grundlagen zuzuschieben.

[2]) Beneke steht hier im schroffsten Widerspruch mit Schiller (s. o.). Hätte diese Bemerkung Benekes nicht auch früher schon gröfsere Beachtung verdient?

„Auch von dieser Seite her also gewinnt der Unterricht in der Mathematik eine hohe Bedeutung. Die in ihr behandelten Grundverhältnisse der menschlichen Erkenntnis sind so weitgreifende und interessante, daſs sie Keinem fremd bleiben dürfen, auch der sich nur zu einer mittleren Stufe der Bildung erheben soll. Selbst für den kaum zu denkenden Fall, daſs er niemals in den Fall käme, selbstthätig davon eine Anwendung zu machen, würde ihm doch eine allgemeine Anschauung derselben höchst wichtig, ja unentbehrlich sein."

84 II. p. 138. „Selbst die eigentliche logische Begriff- und Urteilbildung kommt in dem Gebiete der Mathematik sehr wenig vor;[1]) die logische Schluſsbildung beinahe gar nicht." „Die Mathematik dient nur sehr aus der Ferne als regelnde Norm."

85 II. p. 234. „Die Mathematik ist derjenige Zweig des Unterrichtes . . . .,[2]) wo, dem idealen Verhältnisse nach, jeder aufmerksame Schüler nicht nur etwas lernen, sondern Alles lernen müſste."

86 II. p. 236. „Die Mathematik, sagt man, sei überhaupt nur für wenige Eigentümlichkeiten (? der Verf.) gemacht; erfordere ein besonderes angeborenes Talent, welches unter Zehnen kaum Einer habe; ohne dieses werde der kenntnisreichste und geschickteste Lehrer vergebens arbeiten. Nichts kann falscher sein. Vielmehr giebt es entschieden keine andere Wissenschaft oder Kunst, die so wenig ein besonderes, angeborenes Talent erfordert, wie diese. . . . ."[3]) „Eine nur mäſsige Geistes-

---

[1]) Beneke schränkt hier das hohe Lob, durch welches er zuvor die Mathematik gefeiert, ein, indem er ihr nur eine bescheidene Wirkungssphäre einräumt. Es scheint mir, als wenn Beneke hier die Mathematik allzu äuſserlich in Betracht ziehe, sie zu sehr nach der Quantität ihrer logischen Anwendungen beurteile und würdige, ohne der Qualität die ihr gebührende Bedeutung zu geben.

[2]) Daſs diese ideale Forderung erfüllt werde, schwebt als hohes Ziel wohl allen vor, die bestrebt sind an der Verbesserung der Methoden des mathematischen Unterrichts mitzuarbeiten.

[3]) Es darf wohl nicht mit Unrecht gerade an dieser Stelle auf die Erfolge hingewiesen werden, die Pestalozzi mit seiner Methode errungen hat.

kraft und jene ununterbrochen gespannte Aufmerksamkeit sind die einzigen Erfordernisse."

H. Kern, Grundrifs der Pädagogik. — Berlin 1881.

87 p. 52. „Die Denkformen der Mathematik und des Rechnens sind so mannigfach und namentlich so klar, dafs die formal bildende Kraft dieser Lehrfächer .... besonders hoch anzuschlagen ist."

Herbarts pädag. Schriften ed. Willmann. — Leipzig 1875.

88 II. p. 163. „Aber jede Schule mufs ihre Ehre haben, unabhängig von ihrem Nutzen. Sonst giebt sie dem Fleifse keine Begeisterung.[1])"

„Aus beiden Gründen betrachte ich die Mathematik als den Hauptgegenstand der Bürgerschule. Keine ehrenvollere Gymnastik des Geistes läfst sich finden; und die Spannkraft, welche sie hervorbringt, ist selbst gröfser als die durch die Sprachen des Altertums; ihr Nutzen aber ist unbezweifelt."

89 II. p. 164. Die Kraft der Jugend mufs frühzeitig dahin (zur Mathematik) gelenkt werden. Dies geschieht im allgemeinen durch vorläufige, grofsenteils empirische Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen.[2]) Hieher gehören die Anschauungsübungen .... — Das Wesentliche ist Anschauung gegebener mathematischer Formen. .... — Die Wirkung dieser Vorübungen zeigt sich erst später, wenn der mathematische Unterricht selbst eintritt, durch eine weit stärkere Auffassung und durch ein schnelleres Nachdenken, als unvorbereitete Schüler zu leisten pflegen.

---

[1]) Leider drängt sich die Erwägung nach dem Nutzen immer mehr in den Vordergrund. Und zwar kommt nur noch der direkte, unmittelbare Nutzen für sehr viele in Frage; der mittelbare Nutzen der Schule, das eigentliche ideale Ziel der Gymnasien und Universität: zu lehren, was man lernen soll: zu lehren, selbständig arbeiten zu können und zu wollen — Arbeit um der Arbeit willen — das wird als allzu unpraktisch verlacht.

[2]) Diese Forderungen Herbarts werden durch den jetzt eingerichteten propädeutischen Unterricht zum Teil erfüllt. Wie derselbe noch nutzbarer gemacht werden könne, hat Verfasser oben gezeigt.

II. p. 164. Von der Sorgfalt, womit diese Anschauungs- 90 übungen geleitet werden, hängt die ganze Bürgschaft ab, dafs der nachfolgende Unterricht gelingen werde.

II. p. 263. „Dem eigentlichen Gelehrten ist die Mathe- 91 matik schon deswegen unentbehrlich,[1]) weil ohne sie ein gründliches Studium der Naturwissenschaften völlig unmöglich ist."

„Wer so unglücklich war, niemals wenigstens einen gründlichen Elementarunterricht in Arithmetik und Geometrie zu geniessen, wird bei aller Anstrengung nicht im Stande sein, zu einem vollkommen klaren Verständnis dieser Lektüre (populärer naturwissenschaftlicher) zu gelangen."

Das ist es eben, was am stärksten für die absolute Notwendigkeit eines gründlichen mathematischen Jugendunterrichts spricht, dafs man ein sehr gelehrter Sprachkenner, ein umfassender Polyhistor, „ja selbst ein scharfsinniger dialektischer Kopf, aufgelegt zu allerlei Subtilitäten und Distinktionen", sein kann, „ohne sich in irgend eine mathematische Vorstellungsart finden zu können".

II. p. 264 — „und sō kommen sie auf den sonderbaren 92 Gedanken, die Mathematik erfordre ganz besondere Anlagen. Aber Mathematik ist keine auf genialer Individualität beruhende Kunst. Zwar Entdeckungen in ihr macht nur das Genie; hingegen erlernen läfst sie sich so sicher und gewifs, wie irgend eine Erfahrungswissenschaft."

Es kommt blofs darauf an, vor aller schwierigen Demonstration die mathematischen Elementarvorstellungen auf empirischem Wege zur nötigen Energie und Bestimmtheit zu erheben,[2]) und zugleich an einige mathematische Kunstworte und Bezeichnungen zu gewöhnen.

II. p. 621. Dafs die Anlage zur Mathematik seltener sei, 93 als zu anderen Studien, ist blofser Schein, der vom verspäteten und vernachlässigten Anfangen herrührt.

II. p. 623. Das Wesentliche ist Übung des Augenmafses 94 an Distanzen und Winkeln,[3]) und Verbindung dieser Übung

[1]) Aus einer Rezension Drobischs.

[2]) Vergl. Zitat Nr. 94.

[3]) Die wenigen Rechnungen, die im Anfangspensum der Geometrie nötig sind, lassen sich leicht ausführen, auch ohne dafs ein arithmeti-

mit ganz leichten Rechnungen. Der Zweck ist nicht blofs, die Beobachtung für sinnliche Dinge zu schärfen, sondern vorzüglich, geometrische Phantasie zu wecken, und damit das arithmetische Denken zu verbinden. Hierin liegt in der That die gewöhnlich versäumte, und doch notwendige Vorbereitung zur Mathematik. Die Hülfsmittel müssen sinnlicher Art sein. — .... Übrigens versteht sich von selbst, dafs die Anschauungsübungen nicht die Stelle der Geometrie oder gar der Trigonometrie vertreten, sondern diesen Wissenschaften die Stätte bereiten.

95 I. p. 134. Die Mathematik wird zumeist im achten, neunten und zehnten Jahre in Gestalt des ABC der Anschauung erscheinen, und in einem Zeitraume von etwa dreiviertel Jahren, täglich eine Lehrstunde, nebst einigen Übungsstunden verlangen.

Seltener aber, als täglich einmal, dürfen die Lehrstunden nicht sein, wenn man irgend darauf rechnen will, dafs in dem Lehrling die nötige Sammlung des Geistes sich erhalte.

96 I. p. 137. Nicht an Umfang, noch an Gewifsheit und Bündigkeit fehlt es ihr (der Mathematik) dazu (zur Bildung der Geister), aber an systematischer Eleganz und an philosophischer Durchsichtigkeit. Jeder Mangel hierin macht sich beim pädagogischen Gebrauch aufs unangehnehmste fühlbar, aufs nachteiligste wichtig,[1] — da es für diesen Gebrauch nicht auf die Resultate, noch auf ihre Zuverlässigkeit, sondern auf das Denken selbst und auf dessen musterhaften Gang ankommt.

97 I. p. 139. Anmerk. Hegel erkennt, dafs beim mathematischen Beweise nach Euklidischer Art „die vermittelnden Bestimmungen ohne den Begriff des Zusammenhanges, als ein vorläufiges Material irgendwoher herbeigebracht werden“; die Konstruktion ist daher „ohne Verstand, da der Zweck, der sie leitet, noch nicht ausgesprochen ist.“ —

---

scher Unterricht vorausgegangen ist. Die naturgemäfsen, leichten Anwendungen werden sogar umgekehrt auch eine gute Vorbereitung für den abstrakten Unterricht sein.

[1]) Vergl. Herbarts Auseinandersetzungen über Willkürlichkeit, die sich hieran anschliefsen. — (Mausefallenbeweise.)

Schopenhauer nennt (in „die Welt als Wille und Vorstellung") die Euklidischen Beweise „stelzbeinig und hinterlistig", ja „Taschenspielerstreiche" und wirft ihnen vor,[1]) dafs „bei ihnen die Wahrheit fast immer zur Hinterthüre" hereinkommt.

I. p. 217. Den Übergang (vom ABC der Anschauung zu der Mannigfaltigkeit der Naturgegenstände) selbst zu besorgen, sei nur das Amt des Zeichenmeisters..... Darum ist Kultur der Anschauung eine so notwendige Vorbereitung für alle jene Anatomen (das Wort im weitesten Sinne genommen); — also für Ärzte, Wundärzte, — Mechaniker, Architekten, Zimmerer, — Physiker, Geologen, Astronomen, — und überhaupt für alle Menschen, denen an deutlichen Vorstellungen körperlicher Gegenstände gelegen ist.[2]) 98

Schiller, Handbuch der prakt. Pädagogik.

p. 197. Die Mathematik übt durch die Schulung, welche sie verleiht, den gröfsten Einflufs auf die Erweckung der Verstandeskraft, auf Erzeugung von Klarheit, Schärfe, strenger Folgerichtigkeit im Denken und ist für jeden wissenschaftlichen Beruf ein unentbehrliches Bildungsmittel; aber innerhalb der einzelnen Gebiete könnten manche unnötigen Dinge und viele geradezu schädliche, pedantisch betriebene Übungen beseitigt werden. Die eigentümliche Wirkung der Mathematik liegt in ihren mannigfaltigen, stets klaren und ausnahmslosen Denkformen; die strenge Logik der Urteile stellt sich in der präzisen und klaren Ausdrucksweise dar. 99

p. 558. Der Unterricht in der Geometrie, welcher auf der unteren Stufe erteilt werden mufs, soll mittels der Anschauung den Sinn für die Form wecken,[3]) das Verständnis für Eben- 100

---

[1]) Schopenhauer will auch die Anschauung mehr betont wissen. Vergl. Kosack, Schulprogramm Nordhausen 1852.

[2]) Herbart nennt die Bildung des Anschauens weiterhin direkt das „Systematische Band", den „Stamm" fast aller Fertigkeiten.

[3]) Wir haben es hier mit einem Nebenvorteil zu thun, der ohne weiteres Zuthun sich aus dem richtig geleiteten Anschauungsunterricht ergiebt und der wahrlich nicht gering anzuschlagen ist.

mäſsigkeit und Regelmäſsigkeit fördern und zugleich das Sehen und die Hand üben, sowie die ....

---

101 Deinhardt,[1]) Der Gymnasialunterricht. Hamburg 1837.

p. 28.[2]) Denn in dem Gymnasium soll nicht diese oder jene Wissenschaft gelehrt werden, sondern es soll die allgemeine Substanz aller Wissenschaften in dem Geist des Schülers entzündet werden, daſs er im Besitz dieses allgemeinen Wesens aller Wissenschaft einen Schlüssel habe zu allen besonderen Wissenschaften und in allen sich findet, auf die er Fleiſs und Mühe verwendet.

102 p. 64. In der Mathematik wird der Schüler an beweisendes, gründlich und mit Notwendigkeit fortschreitendes Denken gewöhnt und ein Bild und Beispiel eines wissenschaftlichen Organismus gegeben.

103 p. 161. Den Anfang des systematischen Unterrichts in der Mathematik bildet die anschaulichere Geometrie und von ihr wird zu der abstrakteren und dem reinen Denken näher liegenden Arithmetik fortgeschritten.....

104 p. 176. ...., so wie denn überhaupt zum Betreiben der allgemeinen Arithmetik schon ein hoher Grad von Abstraktion und Verstandesbildung gehört,[3]) wenn sie nicht zum toten, fruchtlosen Formelwesen herabsinken und alle bildende Kraft verlieren soll.

p. 181. Der Gegenstand der Geometrie fällt in die Anschauung und ist daher für den Anfang das Verständlichste. Die Arithmetik erfordert, da sie hier nicht mehr gewöhnliches Rechnen ist, sondern die allgemeinen Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, einen viel höheren Grad von Abstraktion. Dieses Abstraktionsvermögen, das zur Auffassung der allgemeinen Zahl, ihrer Verbindungen und Eigenschaften

---

[1]) Diese vorzügliche Pädagogik, die, wie es scheint, ganz vergessen ist, möchte ich allen Kollegen auf das wärmste empfehlen.

[2]) Vergl. auch p. 26.

[3]) Diese Bemerkung ist sehr richtig, wie jeder bestätigen wird, der den Anfangsunterricht in Arithmetik Untertertianern erteilt hat.

nötig ist, wird durch das Studium der anschaulicheren Geometrie gewonnen.

H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik etc. Tübingen 1885.

p. 5. — Dies Vorurteil, welches Männer wissenschaftlicher Bildung oft genug veranlafst, sich zu rühmen, dafs sie niemals ein Jota von Mathematik verstanden haben,[1]) gleichsam, als ob sie sich dadurch den Adelsbrief für Esprit und Geist ausstellen wollten! 105

Freilich, wie unsere Wissenschaft auf den meisten Schulen unseres Vaterlandes getrieben wird, da ist sie trocken — unglaublich trocken — fast so trocken als die Deklinationen der lateinischen Grammatik.

Nicht eher wird die Mathematik in weiteren Kreisen ihre richtige Würdigung finden, als bis .... die unglückselige Meinung beseitigt ist, dafs sie im Unterichte weiter keinen Zweck habe, als den Geist formal zu bilden.

p. 7. Wie Pallas aus dem Kopfe des Zeus entsprang, gewappnet und gerüstet, so tritt die Mathematik hier (in Euklids Elementen) auf. Wunderbare Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe, strengste Konsequenz in deren Verbindung, höchste Einfachheit der Darstellung, das sind die Eigenschaften dieses unsterblichen Werkes, die niemals wieder in gleicher Weise vereinigt gewesen sind. Die „Elemente" des grofsen Alexandriners bleiben für alle Zeiten das erste und, man darf vielleicht behaupten, das einzige vollkommene Muster von logischer Schärfe in den Prinzipien und von strenger Entwicklung der Sätze. Will man sehen, wie eine Wissenschaft auf einer sehr geringen Zahl von anschaulichen Axiomen, Postulaten und schlichten Definitionen, durch einen strengen, an keiner Stelle erschlichenen oder nach fremden Hülfsmitteln greifenden, wir möchten sagen keuschen Syllogismus aufgebaut, und bis in die kleinsten Details ausgebaut werde kann, so mufs man zu Euklids Elementen greifen. 106

---

[1]) Man vergleiche Zitat Nr. 1 nebst den dazu gehörigen Anmerkun

Dagegen: So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Prinzipien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntnis des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage beruht.

Reidt, Anleitung zum math. Unterricht. Berlin 1886.

107 p. 2. Hierzu kommt ferner,[1]) dafs in der Mathematik ein schlecht geleiteter Anfangsunterricht mehr Schaden bringt, als in irgend einem anderen Unterrichtsfache.

108 p. 5. Unter den Lehrern der Mathematik herrscht, vielfachen Erfahrungen nach zu schliefsen, ein ausgeprägter Subjektivismus. Mag auch in den allgemeinen .... Fragen .... eine Einigung oder wenigstens eine beträchtliche Mehrheit erzielt sein, in der Anwendung auf das einzelne gehen die Ansichten sehr erheblich auseinander.

109 p. 40. Bei Euklid stehen bekanntlich die einzelnen Lehrsätze ohne jede aus ihrem inneren Zusammenhang hervorgehende Ordnung; das Prinzip, auf welchem ihre Reihenfolge basiert, ist nur das, dafs kein Satz eher vorkommt, als die zu seinem Beweise dienenden anderen Sätze bewiesen sind. Im Gegensatz hierzu verlangt die neuere Methodik eine genetische Entwickelung der einzelnen Lehren, sie verlangt also, dafs die einzelnen Teile des Systems, auch untereinander, nach ihrem sachlichen Inhalt thunlichst in Zusammenhang gebracht, dafs das Verwandte neben einander gestellt werde, das räumlich Nachfolgende auch inhaltlich als Folgerung oder weitere Entwicklung des Vorhergehenden erscheine, dafs die Aufeinanderfolge der einzelnen Lehren sich aus dem Gegenstande derselben naturgemäfs ergebe und jede Untersuchung auf die

---

[1]) Aus Reidts Anleitung werde ich nur wenige Zitate an dieser Stelle ausführlich geben, sondern mich beschränken, im Texte auf die betreffenden Abschnitte bei Reidt zu verweisen, da ich wohl voraussetzen kann, dafs, wer die vorliegende Arbeit des Lesens für wert hält, mit einer so hervorragenden Leistung, wie Reidts Anleitung, hinreichend vertraut ist.

folgende als ihre Ergänzung zum Zwecke abschliefsender [Behandlung des betreffenden Untersuchungsgebietes hinweise.]

Es ist selbstverständlich, dafs diese Forderungen unter der Bedingung zu erfüllen sind, dafs das Euklidische Prinzip durch dieselben nicht verletzt werde.

p. 52. Ebenso sind auch in der Geometrie alle sogenannten populären Beweise zu vermeiden,[1]) welche in der Berufung auf anschauliche Eigenschaften einer speziellen Figur gipfeln, oder auch nur Umschreibungen der Behauptung sind, wenn sie nicht gar sich geradezu im logischen Zirkel bewegen. Die ersteren wird man hier und da mit Nutzen zu weiterer Veranschaulichung und Erklärung gebrauchen können, wie z. B. ....; den strengen Beweis dürfen sie jedoch nie ersetzen. . 110

Zwar sagen die .... Instruktionen für den Unterricht der Gymnasien in Österreich: Der hohe Wert der Anschauung, der „ersten Quelle der Evidenz", wird noch häufig nicht genug gewürdigt. Viele Wahrheiten der Geometrie können auf dem Wege der Anschauung erkannt werden, und es unterliegt keinem Zweifel, dafs die meisten elementaren Sätze der Geometrie vor jedem Beweise und doch mit der vollen Überzeugung von ihrer Wahrheit aufgefunden worden sind. Auch der geübte Mathematiker erkennt oft in seinen Untersuchungen die Evidenz geometrischer Beziehungen zuerst durch Anschauung und gelangt erst später zu ihrer begrifflichen Vermittelung in der üblichen Form. „Ist doch das anschauliche Wissen," wie Locke trefflich sagt, „unwiderstehlich; gleich dem hellen Sonnenlichte zwingt es zu seiner Erkenntnis, sowie die Seele sich darauf wendet; es läfst keinen Raum für Zaudern, Zweifeln und Untersuchen, die Seele ist sofort von dessen klarem Lichte erfüllt."

p. 71. Wenn eine Kluft zwischen den Gymnasien und 111

---

[1]) Es wird hier gewifs mit Recht auf die Gefahr aufmerksam gemacht, die in einer sog. populären Behandlung der Geometrie liegt. Hier kann man auch sagen: Gott behüte mich vor meinen Freunden, etc. Jedoch wird die Beweiskraft der reinen Anschauung hierdurch nicht getroffen; ja der aus der reinen Anschauung sich ergebende Beweis ist sicherlich auch der strengste.

mäfsigkeit und Regelmäfsigkeit fördern und zugleich das Sehen und die Hand üben, sowie die ....

---

101 Deinhardt,[1]) Der Gymnasialunterricht. Hamburg 1837. p. 28.[2]) Denn in dem Gymnasium soll nicht diese oder jene Wissenschaft gelehrt werden, sondern es soll die allgemeine Substanz aller Wissenschaften in dem Geist des Schülers entzündet werden, dafs er im Besitz dieses allgemeinen Wesens aller Wissenschaft einen Schlüssel habe zu allen besonderen Wissenschaften und in allen sich findet, auf die er Fleifs und Mühe verwendet.

102 p. 64. In der Mathematik wird der Schüler an beweisendes, gründlich und mit Notwendigkeit fortschreitendes Denken gewöhnt und ein Bild und Beispiel eines wissenschaftlichen Organismus gegeben.

103 p. 161. Den Anfang des systematischen Unterrichts in der Mathematik bildet die anschaulichere Geometrie und von ihr wird zu der abstrakteren und dem reinen Denken näher liegenden Arithmetik fortgeschritten.....

104 p. 176. ...., so wie denn überhaupt zum Betreiben der allgemeinen Arithmetik schon ein hoher Grad von Abstraktion und Verstandesbildung gehört,[3]) wenn sie nicht zum toten, fruchtlosen Formelwesen herabsinken und alle bildende Kraft verlieren soll.

p. 181. Der Gegenstand der Geometrie fällt in die Anschauung und ist daher für den Anfang das Verständlichste. Die Arithmetik erfordert, da sie hier nicht mehr gewöhnliches Rechnen ist, sondern die allgemeinen Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, einen viel höheren Grad von Abstraktion. Dieses Abstraktionsvermögen, das zur Auffassung der allgemeinen Zahl, ihrer Verbindungen und Eigenschaften

---

[1]) Diese vorzügliche Pädagogik, die, wie es scheint, ganz vergessen ist, möchte ich allen Kollegen auf das wärmste empfehlen.

[2]) Vergl. auch p. 26.

[3]) Diese Bemerkung ist sehr richtig, wie jeder bestätigen wird, der den Anfangsunterricht in Arithmetik Untertertianern erteilt hat.

nötig ist, wird durch das Studium der anschaulicheren Geometrie gewonnen.

H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik etc. Tübingen 1885.

p. 5. — Dies Vorurteil, welches Männer wissenschaft- 105 licher Bildung oft genug veranlafst, sich zu rühmen, dafs sie niemals ein Jota von Mathematik verstanden haben,[1]) gleichsam, als ob sie sich dadurch den Adelsbrief für Esprit und Geist ausstellen wollten!

Freilich, wie unsere Wissenschaft auf den meisten Schulen unseres Vaterlandes getrieben wird, da ist sie trocken — unglaublich trocken — fast so trocken als die Deklinationen der lateinischen Grammatik.

Nicht eher wird die Mathematik in weiteren Kreisen ihre richtige Würdigung finden, als bis .... die unglückselige Meinung beseitigt ist, dafs sie im Unterichte weiter keinen Zweck habe, als den Geist formal zu bilden.

p. 7. Wie Pallas aus dem Kopfe des Zeus entsprang, 106 gewappnet und gerüstet, so tritt die Mathematik hier (in Euklids Elementen) auf. Wunderbare Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe, strengste Konsequenz in deren Verbindung, höchste Einfachheit der Darstellung, das sind die Eigenschaften dieses unsterblichen Werkes, die niemals wieder in gleicher Weise vereinigt gewesen sind. Die „Elemente" des grofsen Alexandriners bleiben für alle Zeiten das erste und, man darf vielleicht behaupten, das einzige vollkommene Muster von logischer Schärfe in den Prinzipien und von strenger Entwicklung der Sätze. Will man sehen, wie eine Wissenschaft auf einer sehr geringen Zahl von anschaulichen Axiomen, Postulaten und schlichten Definitionen, durch einen strengen, an keiner Stelle erschlichenen oder nach fremden Hülfsmitteln greifenden, wir möchten sagen keuschen Syllogismus aufgebaut, und bis in die kleinsten Details ausgebaut werden kann, so mufs man zu Euklids Elementen greifen.

---

[1]) Man vergleiche Zitat Nr. 1 nebst den dazu gehörigen Anmerkungen.

expliziert. .... Die wahrhafte Methode hat ihre subjektive und objektive Seite in vollkommenster Übereinstimmung.

115 p. X. Wenn man mich fragt, was ich denn an Euklid auszustellen habe, so antworte ich: .... an dem Lehrer Euklid aber — wenn man von einem so vorzüglichen Manne annehmen darf, er habe nach seinem Buche, so wie es ist, unterrichtet* —, dafs ein solcher Unterricht nicht der rechte ist.

*.... wenigstens spricht die berühmte Episode in Platons Menon deutlich genug dafür, dafs Sokrates die Geometrie heuristisch lehrte. Ob nun, als Euklids Elemente einmal vorhanden waren, das spätere Altertum die heuristische Methode allmählich vernachlässigt und dafür nach Euklid doziert hat,[1]) kann ich nicht sagen; hat man es gethan, so ist dies nur eins der vielen Zeichen vom Verfall der antiken Kultur.

116 p. XIV. Was aber hauptsächlich für die heuristisch-genetische Methode spricht, ist dieses: Nach ihr ist der Schüler ein Sehender, der nicht nur weifs, woher er kommt und wo er steht, sondern auch, wohin er geht, während der nach Euklid unterrichtete Zögling alle fünf Minuten eine Binde vor die Augen bekommt, in einem verschlossenen Wagen (er weifs nicht wie ihm geschieht) eine Station weiter gefahren wird und dann im besten Falle zur Aufgabe erhält,[2]) den Weg nach der letzten Station zurück zu machen. Gesetzt nun, er erlangt eine ausgezeichnete Fertigkeit darin und lernt auch alle Stationen, auf denen er sich successive aufgehalten hat, gut kennen, so ist doch sein ganzes Reisen am Ende, sobald ihn der Lehrer im Stiche läfst und ihn nicht mehr auf eine neue Station bringt. Er hat eben das Reisen selbst nicht

---

[1]) Die Frage endgültig zu entscheiden, wäre nur eine kritische Geschichte des geometrischen Unterrichts im Stande; doch ist es wohl gestattet anzunehmen, dafs Euklids Elemente kein Lehrbuch im gebräuchlichen Sinne des Wortes oder vielmehr kein Schulbuch gewesen sind.

[2]) Die Auseinandersetzungen Magers an dieser Stelle beziehen sich zwar auf die Arithmetik; dafs aber Mager sie auch für die Geometrie gelten läfst, beweist folgender Passus auf p. XIX: „Wie bewunderungswürdig nun aber auch die Elemente des Euklid sind, ..., so dünkt mich doch, dafs der von mir in der Zahlenlehre versuchte heuristisch-genetische Weg auch hier eingeschlagen werden mufs.“

gelernt..... Wogegen der nach der genetischen Methode Unterrichtete vom Lehrer das Prinzip des Fortschritts bekommt.

p. XXV. Keiner glaube, wenn nicht das innere Anschauungs- und Denkvermögen der Jugend an scharf bezeichneten Gegenständen der äußeren Anschauung erweckt und geübt, und das Urteil eine Zeit lang durch das Zeugnis der Sinne vermittelt und so dem Gedanken eine Stütze geboten worden ist, daß irgend ein Schüler zum wissenschaftlichen Studium der Geometrie befähigt sei. 117

J. K. Becker, Zur Reform des geometr. Unterrichts. — Wertheim a. M. 1880.

p. 3. Seit dem Anfange dieses Jahrhunderts hat man von sehr verschiedenen Standpunkten aus Versuche gemacht, die Geometrie aus den starren Formen zu befreien, in die sie durch Euklides gezwängt worden ist. Alle diese Versuche gingen, wie neuerdings wieder hervorgehoben wurde (in dem Aufsatze: Zur Reform d. geom. Unterr. Von W. Fiedler in der Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft. Jahrg. 1877 p. 82—97), von der Thatsache aus, daß der Erfolg des geometrischen Unterrichts nach der Methode des Euklides in allen Schulen ein verhältnismäßig geringer ist, und auch die besten Schüler nicht den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davon tragen, sondern vielmehr nur eine Fülle leicht verlierbarer Einzelheiten. 118

p. 3. Wenn nun aber auch ungeachtet der größten Rührigkeit auf diesem Felde seit fast 70 Jahren noch keine Methode dadurch allgemeine Anerkennung gefunden hat, daß sie stets und überall die wünschenswerten Erfolge erzielt,[1] so ist es doch eine entschiedene Verkennung des Geleisteten, wenn Herr Professor Fiedler sagt, das Übel sei auch heute noch dasselbe und es sei eine unbestrittene Thatsache der Pädagogen, „daß gute Erfolge in der Geometrie sehr selten sind unter den Schülern aller Schulen."[2]) 119

---

[1]) Vergl. 120.

[2]) Becker fügt hinzu, daß Mißerfolge in der Geometrie nach seiner

120 p. 4. Waren aber vor 50 Jahren Lehrer der Mathematik, die Erfolge aufweisen konnten ... noch eine grofse Seltenheit, so ist doch inzwischen die Verbesserung der Methode so fortgeschritten, dafs bei der allerdings noch nicht überall hingedrungenen Kenntnis dieser Fortschritte nur einiges pädagogisches Geschick dazu gehört, um auch in der Geometrie ganz gute Erfolge zu erzielen. Neben der noch sehr verbreiteten Unkenntnis dessen, was von den verschiedensten Seiten für die Verbesserung der Methode des geometrischen Unterrichts bereits geleistet worden ist, und neben der Macht der Gewohnheit, welche die Meisten an dem bisher befolgten Gange des Unterrichts mit Zähigkeit festhalten läfst, sind es freilich noch einige tief eingewurzelte und von in hohem Ansehen stehenden pädagogischen Autoritäten gehegte und genährte Vorurteile, welche sehr oft die Erzielung der gewünschten Erfolge erschweren oder ganz unmöglich machen.

121 p. 4. Man hat der Geometrie des Euklides hauptsächlich zwei Vorwürfe gemacht: 1) Sie giebt kein innerlich zusammenhängendes Ganze, sondern eine Fülle von Sätzen, die nur dadurch äufserlich verbunden sind,[1]) dafs der Beweis für die Richtigkeit eines folgenden Satzes die Anerkennung der früheren voraussetzt. 2) Sie giebt überall nur Erkenntnisgründe, wo man Realgründe sucht; d. h. es wird immer nur gezeigt (oder besser, man wird überall durch eine lange und schwer zu verfolgende und noch schwerer zu behaltende künstliche Schlufskette überführt, zuzugeben), dafs ein Lehrsatz

---

Ansicht ihren Grund darin hätten, „dafs der Lehrer sich die bisher gemachten Fortschritte und Verbesserungen in der Methode nicht angeeignet hat“ oder „es liege an Gründen, die mit der Methode nichts zu thun haben.“

[1]) Becker fügt hinzu: In der That mufs einem mit wissenschaftlichem Sinn und nicht blos Wifsbegierde begabten Schüler nach Durcharbeitung des Euklides oder eines in dessen Geist ausgearbeiteten Lehrbuchs der Geometrie zu Mute sein wie dem jungen Wilhelm Meister, als er durch ein Loch in dem Vorhange des Puppenspiels gesehen hatte. „Nachdem ich etwas erfahren hatte — sagt Wilhelm — kam es mir erst vor, als ob ich gar nichts wisse, und ich hatte Recht; denn es fehlte mir der Zusammenhang, und darauf kommt doch eigentlich alles an.“

richtig ist, während man nirgends Einsicht in den inneren Zusammenhang der in den einzelnen Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften der Figuren erhält, durch die uns erst klar wird, warum er richtig ist.

p. 5. Nach Anführung der bekannten Stelle aus Steiners Einleitung zu seiner Abhängigkeit geometr. etc. heifst es: 122

Diese Worte beziehen sich zwar nur auf die projektivische Geometrie,[1]) und wenn Herr Fiedler deshalb zu dem Schlusse kommt, die Reform der Geometrie werde erst eine vollendete sein, wenn die ganze Geometrie projektivische Geometrie geworden sei und durchweg „projizierend verfahre“, so scheue ich mich nicht, diesen Weg zur Reform der Geometrie für einen Irrweg zu erklären, so lange nicht eine wirkliche Ausführung dieser Reform zugleich ihre Möglichkeit und Zweckmäfsigkeit vor Augen stellt. Was in diesem Sinne wirklich bereits versucht worden ist, zeigt sich bei näherer Prüfung, wie zu erwarten war, als vollständig mifslungen; namentlich, wenn man als Mafsstab die auf diesem Wege erzielten Erfolge bei der Mehrzahl der Schüler zu Grunde legt.

p. 14. Am schlimmsten wirkt dieses pedantische Drillen in Demonstrationen und Definitionen, wenn man damit zu früh beginnt. Vor der Obertertia sollte nach meiner Ansicht der geometrische Unterricht höchstens im Anschauungsunterricht und geometrischem Zeichnen bestehen.[2]) Hat der 123

---

[1]) Ich kann mich der Ansicht Beckers nur anschliefsen. Die Methode des geometrischen Unterrichts auf den höheren Lehranstalten wird immer eine andere sein müssen, als die rein wissenschaftliche der Universitäten, und Fiedler geht entschieden zu weit, wenn er verlangt, dafs durchweg projizierend verfahren werden müsse. Wie viel wirklich ausführbar und zweckmäfsig ist, zeigt ungefähr der Versuch Hubert Müllers. Demgegenüber sind die weiter oben erwähnten warnenden Worte Günthers und auch Thaers nicht unbeachtet zu lassen.

[2]) Ich konstatiere mit besonderer Genugthuung, dafs nach diesen Worten Beckers Ansicht über den geometrischen resp. planimetrischen Unterricht mit der meinigen übereinstimmt. Ja Becker geht sogar noch weiter und will vor Obertertia keinen wissenschaftlichen Unterricht; die Konsequenzen aus einer solchen Anordnung werden nicht gezogen: es können aber sicherlich keine anderen sein, als diejenigen, die ich in meinen Thesen ausgesprochen habe.

Schüler erst einmal durch blofse Beobachtung die Zusammengehörigkeit gewisser Eigenschaften bei einfachen selbst konstruierten Figuren kennen gelernt, so wird er schon geneigter sein, einer wissenschaftlichen Darlegung dieses Zusammenhangs zu folgen.

124 p. 13. „Um die Methode der Mathematik zu verbessern, wird vorzüglich erfordert, dafs man das Vorurteil aufgebe, die bewiesene Wahrheit habe irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten, oder die logische, auf dem Satze vom Widerspruch beruhende vor der metaphysischen,[1]) welche unmittelbar evident ist, und zu der auch die reine Anschauung des Raumes gehört." Diese Worte des grofsen Frankfurter Philosophen .... kennzeichnen das wichtigste und zugleich verbreitetste der Vorurteile, welche einer gedeihlichen Wirksamkeit des Lehrers der Geometrie oft im Wege stehen. ....

Bischoff, Über Zweck und Art des math. Unterrichts a. d. Gymnasien. Amberg 1847.

125 p. 3. Die ältere, bis vor wenigen Jahren in allen Schulen üblich gewesene, zum Teil noch übliche Methode ist wohl jedem, der einmal auf den Schulbänken seine Jugend verbracht, wenn auch nicht bekannt, doch in gutem (?) Andenken:[2]) der tote Mechanismus derselben hat jeden so manche Stunde seines Jugendlebens gelangweilt, ihre durchgängige Unklarheit dem Strebenden das Studium der Mathematik verleidet, den Gleichgültigen über seinen gänzlichen Mangel an Fortschritten leicht getröstet, die Erfolglosigkeit des Studiums endlich, die bei solchen Elementen unvermeidlich war, die Mathematik überhaupt in schlechten Kredit gebracht.

126 p. 8. Im förmlichen Gegensatze hierzu erfordert die Geometrie Selbstlernen, ein eigentliches Studium, daher blofses

[1]) Vergl. Zitat Nr. 149.

[2]) Das vernichtende Urteil, das hier über die frühere Methode des mathematischen Unterrichts gefällt wird, kann nicht übertrieben erscheinen, wenn man die seltene Übereinstimmung konstatiert, die in dieser Frage herrscht. Wenn B. meint, dafs die Methode zum Teile noch üblich sei, so darf nicht vergessen werden, dafs dieser Aufsatz aus dem Jahre 1847 stammt.

Talent ohne Fleiſs nicht ausreicht,[1]) wohl aber angestrengter Fleiſs selbst dem mittelmäſsigen Talente bei der steten und gleichförmigen geistigen Übung aufzuhelfen vermag, für welche Behauptung jeder aufmerksame Lehrer der Mathematik in seinem Schülerkreise schon mehrfache Belege gefunden haben wird.

p. 9. Jedem nämlich, der von anderen Doktrinen her einen Sinn für Wissenschaftlichkeit mitbringt, fällt der beinahe gänzliche Mangel an logisch-richtiger Durchbildung der Geometrie auf,[2]) der sich in der Unhaltbarkeit der Definitionen, wie im Durcheinander der einzelnen Lehren und Lehrsätze in allen vorhandenen Lehrbüchern durchweg offenbart. 127

Bielmayr, Über den Math.-Unterricht an unseren Gymnasien. Aschaffenburg 1870.

p. 11. Sollte dagegen jemand fragen, ob nicht etwa die übrigen Teile der Elemente in das Unterrichtsprogramm aufgenommen werden sollten, damit doch wenigstens die Elemente vollständig erlernt würden, so würde ich ebenso entschieden mit Nein antworten und zwar aus Gründen,[3]) die .... teils darin liegen, daſs .... die für unsere Wissenschaft verfügbare Zeit ohnedies für das gegenwärtige Pensum streng genommen nicht hinreicht, und selbst, wenn sie vermehrt 128

---

[1]) Die Gründe gegen das veraltete Vorurteil der besondern Begabung finden sich hier — wenigstens was die Geometrie betrifft — äuſserst treffend und klar ausgesprochen.

[2]) Die Unhaltbarkeit der Definitionen zeigt sich doch nur da, wo versucht wird, an sich klare Begriffe, die a priori im menschlichen Verstande liegen, zu definieren. Gegen die logisch-richtige Durchbildung der Geometrie wird im allgemeinen kein Einwand erhoben, insofern in der Euklidschen Geometrie ein logisches Prinzip vorhanden ist und strikte durchgeführt wird. Es handelt sich bei den Vorwürfen gegen Euklid doch um den inneren, geometrischen Zusammenhang.

[3]) Hierin liegt das punctum saliens; intensiverer Unterricht wird in seinen Folgen sich stets viel wohlthätiger zeigen als einer, der auf Extension hinausgeht. Wer in einem auch nur beschränkten Teile einer Wissenschaft intensive Studien gemacht hat, wird leicht im Stande sein, weiter zu arbeiten, und auch auf andere Gebiete sich zu verbreiten: während der extensive Unterricht die Gefahr der Oberflächlichkeit und infolgedessen des Nicht-Könnens in sich birgt.

werden würde, besser auf Vermehrung der Intensität als auf Vergröfserung der Extension verwendet würde.

129 p. 18. Die ziemlich verbreitete Ansicht aber, als ob zur Aneignung des bei uns verlangten Teils der Elementarmathematik besondere mathematische Fähigkeiten erforderlich seien, habe ich schon im Vorhergehenden nicht nur gemäfs der dort angeführten Erklärungen von Snell, sondern auch auf Grund von mehr als zwanzigjähriger eigener Erfahrung, teils im öffentlichen, teils im Privatunterricht, als vollständig irrig bezeichnet.

130 p. 19. Es stürmen nun auf ihn zwei neue Fächer, allgemeine Arithmetik und Geometrie,[1]) auf einmal herein. Jedem von beiden sind nur zwei wöchentliche Stunden zugewiesen, was die Kontinuität des Unterrichts bedeutend beeinträchtigt.

131 p. 21. Ich habe im Vorhergehenden angedeutet, dafs ich den gleichzeitigen Beginn des Unterrichts in der allgemeinen Arithmetik und Geometrie mifsbillige — nicht ebenso verwerfe ich die gleichzeitige Behandlung dieser Fächer.[2]) .... Niemand wird bestreiten, dafs die Betrachtung der diskreten und stetigen Gröfsen einen Gegensatz darbietet, welcher kaum gröfser gedacht werden kann, während anderseits die Arithmetik die Grundlage der gesamten Mathematik bildet. Diese Umstände allein scheinen mir schon hinreichend, um sich gegen den gleichzeitigen Beginn der beiden Fächer zu erklären. .... Meine Ansicht geht dahin, dafs man das erste Jahr ausschliefslich auf allgemeine Arithmetik verwenden, im zweiten Jahre die Geometrie dazu nehmen und von da an die beiden Fächer nebeneinander behandeln solle.

---

[1]) Dieser gleichzeitige Beginn von Arithmetik und Geometrie hat ja nach dem neuen Lehrplan aufgehört; dafür sind der Mathematik überhaupt aber auch nur drei Stunden in Tertia zugewiesen.

[2]) Hier treten die Ansichten Bielmayrs in den schärfsten Gegensatz zu den meinigen; während auch er gegen den gleichzeitigen Beginn der beiden mathematischen Unterrichtszweige ist, will er jedoch mit der Arithmetik begonnen haben. Meine Bedenken gegen eine derartige Anordnung des Unterrichts habe ich weiter oben dargelegt; hier will ich nur noch einmal wiederholen, dafs man die wenigen arithmetischen Regeln, die man im geometrischen Anfangsunterricht braucht, sehr wohl in diesem beiläufig geben kann.

p. 22. Dagegen wird nach meiner Erfahrung die Geometrie schneller vergessen als die Arithmetik,[1]) und von denjenigen, welche das Gymnasium verlassen haben, giebt es viel mehr solche, welche noch im Stande sind, Gleichungen aufzulösen, als solche, welche noch Beweise für geometrische Sätze oder Auflösungen von Aufgaben zu Stande bringen, ein Umstand, der ohne Zweifel dafür spricht, dafs das Studium der Arithmetik ein intensiveres und darum fruchtreicheres gewesen war, als jenes der Geometrie. 132

Vergleiche hierzu Brenneke, Vorrede zu seiner Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie p. 3: „Es ist eine (unter den Lehrern der Mathematik) bekannte Erfahrung, dafs es viel leichter ist, gute Erfolge bei den Schülern im arithmetischen Unterrichte zu erzielen, als im geometrischen.“[2])

p. 26. Ein andrer Umstand, welcher verhindert, dafs der mathematische Unterricht an unseren Anstalten den wünschenswerten Erfolg erziele, ist, wie ich ebenfalls schon früher angedeutet,[3]) das Mifsverhältnis zwischen dem Pensum und der für die Behandlung desselben angewiesenen Zeit. Ich bin der Ansicht, dafs, wie es Dr. M. Ohm verlangt, der die Verhältnisse aus eigener Erfahrung beim Unterrichte kennt, täglich eine Stunde notwendig ist, um die bei uns vorgeschriebenen 133

---

[1]) Der wunderbare Umstand, auf den hier aufmerksam gemacht wird, mufs meiner Ansicht nach in der schärfsten Weise als eine Folge der verkehrten Methode im geometrischen Unterricht hervorgehoben werden. Er spricht eine beredte Sprache für die Unnatur in der Methodik des Unterrichts, der sich auf die Anschauung gründet, die doch wahrlich im Verlaufe des Lebens nicht wieder verloren geht.

[2]) Dies ist leicht erklärt, wenn man der Sache auf den Grund geht. Der arithmetische Unterricht wird schon lange so erteilt, dafs die Aufgabe im Mittelpunkt des Unterrichts steht, dafs fortwährende Übungsbeispiele dazu dienen, die wenigen Regeln einzuprägen. Wie anders dagegen im geometrischen Unterricht!

[3]) Da das Verlangen nach einer solchen Stundenzahl auf den humanistischen Anstalten ohne Erfolg gestellt werden würde — und zwar mit Recht — so handelt es sich eben darum, den Stoff einzuschränken oder eine andere Verteilung vorzunehmen. Jedenfalls ist das Verlangen nach intensivem Unterricht demjenigen nach extensivem gegenüber zu bevorzugen.

mathematischen Wissenschaften (gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik (Algebra), ebene Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie, Mechanik und Astronomie) mit gutem Erfolge für die Mehrzahl der Schüler zu betreiben.

p. 17. Es fällt mir nicht ein zu bestreiten, dafs das vorgeschriebene Pensum in der gegebenen Zeit durchgenommen werden könne, aber es wird mir kaum ein erfahrener Fachmann widersprechen, wenn ich behaupte, dafs bei den gegenwärtig bestehenden Verhältnissen nicht zugleich auf hinreichende Einübung des Erlernten und die Bedürfnisse der schwächeren Schüler die zu einem wirklich befriedigenden Erfolge notwendige Rücksicht genommen werden kann.[1])

Bauernfeind, Über den Einflufs der exakten Wissenschaften auf die allgemeine Bildung etc. München 1869.

184 p. 5. Die stete Gewöhnung an logisches Denken bewahrt vor den Verirrungen einer allzuregen Einbildungskraft.

135 p. 6. Selbst die ausgebreitetste Kenntnis des klassischen Altertums und der modernen schönen Litteratur allein gewährt keine ausreichende allgemeine Bildung mehr, wenn man unter dieser die Fähigkeit versteht, in fremde Gebiete mit klarem Blicke zu schauen und deren Beziehungen zu dem eigenen Beruf zu erfassen.

186 p. 6. Die allgemeine Bildung, welche uns den Umschwung in dem materiellen und sozialen Leben, in den Urteilen und Anschauungen des heutigen Menschengeschlechts .... begreifen läfst, ist von den exakten Wissenschaften zu erholen.

187 p. 7. Es ist noch immer die Ansicht verbreitet, dafs das Studium der Mathematik zu schwierig und nur besonders begabten Köpfen zugänglich sei. War diese Ansicht jemals richtig, heute ist sie es nicht mehr.

188 p. 8. Die Mathematik hat in allen Gebieten des mensch-

---

[1]) Die Wichtigkeit einer solchen Übung hebt auch Dr. Elsperger hervor, indem er sagt: „Durch nichts unterscheidet sich der schlechte Lehrer von dem guten mehr, als dadurch, dafs jener nur doziert, dieser ununterbrochen einübt.“ (Dazu gehört aber vor allem die hierfür notwendige Zeit. Bielmayr.)

lichen Wissens, wo es sich um meſsbare Dinge handelt, mitzureden, und da diese Gebiete unbegrenzt sind, so ist auch die Zahl ihrer Anwendungen unbegrenzt, und sie müſste schon deshalb für die allgemeine Bildung höchst wertvoll sein, selbst wenn sie kein formales Element in sich trüge. Aber die Mathematik ist ein formales Bildungsmittel, wie kaum ein anderes. Denn sie geht von den einfachsten Grundvorstellungen aus, dringt auf eine genaue und scharfe Verbindung derselben, auf strenge Ordnung in der Aufeinanderfolge der Schlüsse, kurz auf jene Sicherheit in der Erkenntnis einer Wahrheit, welche wir mit dem Ausdrucke „mathematische Gewiſsheit" zu bezeichnen pflegen. Sie ist der geeignetste Gegenstand zur Übung des Verstandes im Zerlegen und Verbinden von Begriffen und ermöglicht die höchste Entwicklung der Anschauungs- und Urteilskraft. Da sie überdies von dem einmal Begriffenen stetig zu den daraus sich ergebenden Folgerungen führt, so erzeugt sie mehr als jede andere Wissenschaft in dem Studierenden das Gefühl, als ob seine Kenntnisse organisch von selbst sich entwickelten, und diesem Gefühle entspringt dann die Lust des eigenen Schaffens und der selbständigen Erfindung neuer Wahrheiten[1]) — das letzte Ziel, welches der mathematische Unterricht erreichen kann. .... Überdies ist der Mathematik auch eine ethisch bildende Kraft nicht abzusprechen, insofern sie den Willen stärkt und zu Ausdauer, Wahrheitsliebe, Gründlichkeit und Selbständigkeit fortwährend antreibt.

Korneck, Genetische Behandlung etc. — Kempen. 1879.

p. 5. Einerseits bezieht sich die Verschiedenheit der Ansichten auf die Ausdehnung des auf dem Gymnasium zu behandelnden Gebietes der Mathematik. Da giebt es Stimmen, welche die sphärische Trigonometrie, andere, welche die analytische Geometrie und die Anfänge der Differentialrechnung 189

[1]) Die Lust des eigenen Schaffens und die Freude an der selbständigen Erfindung neuer Wahrheiten ist allerdings ein nicht oft und eindringlich genug hervorzuhebender Vorzug des mathematischen Unterrichts vor jedem andern.

auf den Gymnasien behandelt wissen wollen; wieder andere wollen die „neuere Geometrie“ dem Lehrplane einfügen, noch andere befürworten eine elementare Behandlung der Kegelschnitte, wobei wieder die Ansichten der Art auseinandergehen, dafs von einer Seite der analytischen, von der anderen der synthetischen Behandlungsweise der Vorzug gegeben wird.

140 p. 5. Man „prüfe alles und behalte das beste“ und man wird bei unparteiischer Beurteilung wohl zu dem Resultate kommen, dafs die alte Methode ja auch ihr Gutes habe, welches man durchaus nicht gering schätzen dürfe, dafs aber auch das Alter allein nicht einen Anspruch auf Unfehlbarkeit gebe, und dafs daher manches zeitgemäfs umzugestalten sei. (Vergl. Hauck-Tübingen „dafs es sich um eine Reformierung der Euklidischen im Sinne der neueren Geometrie handle“.)

141 p. 6. Nicht das Schwierige des neuen Gegenstandes ist es, was den Quartaner abschreckt, nicht gröfsere Anforderungen werden an seinen Verstand gestellt,[1] ....; nur die Neuheit der Methode ist es, welche als eine ungewohnte dem Schüler Schwierigkeiten bereitet .... — Zum Teil abgeschreckt, zum Teil gelangweilt von der Behandlung der Anfangsgründe der Mathematik nach Euklidischer Weise verlieren die Schüler die Lust zur Sache, und damit wird leicht die Ansicht herrschend, die Mathematik sei für den gewöhnlichen Menschenverstand zu schwer und verlange eine besondere Naturanlage. ....

142 p. 8. Wenn schliefslich der nach genetischer Methode unterrichtende Lehrer auch „die Schüler den durchlaufenen Weg nochmals in synthetischer Weise zurücklegen läfst“, so thut er es gewifs nicht, wie Kambly zu glauben scheint, weil er die auf genetischem Wege entwickelten Wahrheiten für

---

[1]) Es ist an anderer Stelle ausgeführt, dafs vom psychologischen Standpunkte gerade das Gegenteil angenommen werden mufs, nicht, dafs das Schwierige des Neuen den Schüler zurückschreckt, sondern dafs das Unbekannte des Neuen sein Interesse weckt und ihn dem neuen Gegenstande eine ganz besondere Liebe entgegenbringen läfst. Sehr richtig dagegen ist es, dafs diese Liebe sehr oft durch die Methode unterdrückt oder gar für immer getötet werde. Von der Gleichgültigkeit zum Widerwillen war aber nur ein Schritt, und dann ist jeder Erfolg unwiderbringlich verloren.

nicht hinreichend erwiesen halte, sondern nur aus pädagogischen Rücksichten, wonach ein Gegenstand der festen Einprägung wegen wiederholt behandelt werden muſs, wenn auch in verschiedener Behandlungsweise.

p. 9. Und ich glaube, das geometrische Zeichnen werde 143 auch dazu beitragen, daſs der Schüler mehr Freude an der Mathematik gewinne und weniger von ihrer scheinbaren Unverständlichkeit abgeschreckt werde.

Prestel, Die geometrische Heuristik. — Emden 1856.

p. 4. Vom Standpunkte der Wissenschaft aus betrachtet, 144 müssen wir die „Elemente" auch der Form nach als ein Meisterstück bezeichnen. Die Sätze sind so geordnet, daſs jeder an der Stelle steht, wo seine Richtigkeit mit Hülfe der voranstehenden vollständig bewiesen werden kann. Es läſst sich sogar nachweisen, daſs in dem Lehrgebäude des Euklid kein Satz fehlt und keiner überflüssig ist.

p. 4. Diese Vorzüge der Elemente des Euklid haben die 145 früher allgemein verbreitete, sich aber auch jetzt noch hin und wieder kund gebende Meinung veranlaſst, daſs sie auch das vortrefflichste Lehrbuch seien,[1]) welches dem geometrischen Unterrichte in der Schule zum Grunde gelegt werden könne.

Eben diese Ansicht von der Unübertrefflichkeit der syn- 146 thetischen Methode hat die Entwicklung einer erfolgreichen und lebendigen Lehrweise auf den höheren und niederen Schulen bis auf die neuere Zeit gehemmt, und damit einen über die engeren Kreise der Schule hinausgehenden,[2]) wahrhaft gründ-

---

[1]) Wie stark dieser Irrtum und wie verhängnisvoll in seinen Folgen, findet sich oben ausgeführt.

[2]) Prestel sagt an anderer Stelle: „Ich muſs in Beziehung auf das von mir über den erfolglosen, weil nur formalen Unterricht Gesagte, hier hervorheben, daſs schon Descartes vor 200 Jahren das Ungenügende jener Methode des Unterrichts und der wissenschaftlichen Darstellung aufzeigte und auf den wunden Fleck hinwies. Leider ist dieses aber bis auf die neuere Zeit, weder von den Jüngern der Wissenschaft, noch von der Schule gehörig beachtet und benutzt worden." — Dazu findet sich folgendes Zitat: „Des Cartes sagt in der *Dissertatio de Methodo*, p. 11: „Studueram antea in scholis, inter Philosophiae partes, Logicae

lichen und tüchtigen Bildung im Wege gestanden. Die Ansicht, welche man, selbst in unseren Tagen noch, hin und wieder hört, dafs ganz besondere Anlagen dazu erforderlich seien, um die Mathematik begreifen zu können, ist ein unmittelbares Ergebnis davon gewesen, dafs man glaubte auch die Anfänger nur nach der mit Strenge inne gehaltenen synthetischen Methode in die Geometrie einführen zu können und zu dürfen.

Zerlang, Beitrag z. e. genetischen Entwickl. der Planimetrie. — Sorau 1860.

147 p. 3. .... wohl aber glaube ich die Behauptung aussprechen zu dürfen ...., dafs in didaktischer Beziehung die ausgesprochene Methode, mathematische Lehren zu behandeln, die ihr Vorbild in Euklids Elementen hat, dem Verständnis und der Verbreitung mathematischer Lehren entschieden hinderlich gewesen ist und noch ist.

148 p. 3. Aber darum ist die in ihnen (den Elementen) befolgte Methode, wenn man darunter mehr versteht, als die nie genug zu rühmende und keiner andren Rücksicht zu opfernde

---

et inter Mathematicas disciplinas, Analysi geometricae atque Algebrae; tribus artibus sive scientiis quae nonnihil ad meum institutum facere posse videbantur. Sed illas diligentius examinando, animadverti quantum ad Logicam, syllogismorum formas aliaque fere omnia eius praecepta, non tam prodesse ad ea quae ignoramus investiganda, quam ad ea quae iam scimus aliis exponenda; vel etiam, ut ars Lullii, ad copiose et sine iudicio de iis, quae nescimus garriendum. Et quamvis multa quidem habeat verissima et optima, tam multis tamen aliis, vel supervacuis vel etiam interdum noxiis, adiuncta esse, ut illa dignoscere et separare non minus saepe difficile sit, quam Dianam aliquam aut Minervam ex rudi marmore excitare. Quantum autem ad veterum Analysin atque ad Algebram recentiorum, illas tantum ad speculationes quasdam quae nullius usus esse videbantur se extendere: Ac praeterea Analysin circa figurarum considerationem tam assidue versari, ut dum ingenium acuit et exercet, imaginandi facultatem defatiget et laedat: Algebram vero, ut solet doceri, certis regulis et numerandi formulis ita esse contentam, ut videatur potius ars quaedam confusa, cuius usu ingenium quodammodo turbatur et obscuratur, quam scientia quae excolatur et perspicacius reddatur."

mathematische Strenge, noch nicht die beste Unterrichtsmethode. Denn sie widerspricht sowohl den Forderungen, die an jeden Unterricht, besonders aber an den auf wissenschaftlichen Anstalten erteilten zu stellen sind, dafs nämlich der Schüler weniger Gedachtes, als denken lerne, als auch besonders dem Geiste der Jugend, der ohne Vergleich mehr Verständnis und Sinn für das Werdende, als für das Fertige hat.

p. 4. Ist der Schüler auch von der logischen Richtigkeit 149 eines Satzes überführt, so ist er dadurch von seiner Wahrheit noch nicht überzeugt. Beides steht sehr oft im umgekehrten Verhältnisse.

p. 4. Die Zuneigung, die der Zweck alles wissenschaft- 150 lichen Unterrichts ist und bleiben mufs, kann nur erzeugt werden, wenn dem Schüler das innere Verständnis des Gelernten aufgeschlossen wird. Und hierzu ist eine genetische anschauliche Entwicklung der mathematischen Lehren notwendig. Jeder andere Weg verurteilt den Lernenden zu einer blofsen Rezeptivität, verhindert aber die Produktivität. Blindlings sieht er sich geführt, wo er selber gehen möchte und könnte, wenn ihm nur der Weg gezeigt würde. So wird das Bewufstsein eigener Kraft und des Selbstvertrauens systematisch gelähmt und eine vollständige Ratlosigkeit bei einer selbständigen Leistung ist die unausbleibliche Folge.

Friederich, Einige Bemerkungen über den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien. — Ansbach 1852.

p. 4. Der vielfach bemerkte Mangel an Teilnahme an 151 dem mathematischen Unterrichte mag zum Teil in dem eigentümlichen Charakter des Lehrgegenstandes selbst liegen, der mehr als jeder andere ununterbrochene Thätigkeit, Ausdauer und geistige Anstrengung fordert, ohne der Jugend unmittelbar das bieten zu können, was sie so gern sucht und Unterhaltung heifst .... so nennt die Jugend den mathematischen Unterricht trocken und langweilig. Aber in vielen Fällen möchte es denn doch vorzüglich die Art und Weise des Unterrichts sein, welche die Schüler zu solchem Urteile führt.

Wiegand, Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. — Halle 1848.

152 Vorrede. Wenn die grofsartigen Resultate der neueren Geometrie auf den Schulen bis jetzt noch nicht überall den verdienten Eingang haben finden können, so liegt der Grund nach unserem Ermessen nicht allein darin, dafs sich so manche Mathematiker nur schwer vom alten Schlendrian losreifsen können, sondern besonders wohl auch in der Verlegenheit mancher Lehrer, wie sie das Interesse ihrer Schüler für jene Forschungen dadurch wecken sollen, dafs sie ihnen Anleitung geben, selbstthätig neue Resultate in jenen Gebieten aufzufinden.

Schellbach, Über d. Zukunft d. Math. etc. — Berlin 1887.

153 Der hohe wissenschaftliche Wert, den die Vorlesungen über Mathematik an unseren Universitäten immer gehabt haben, würde nicht vermindert, sondern könnte nur gesteigert werden, wenn die Dozenten sich bemühten, die Lücke zwischen Gymnasium und Universität mehr und mehr zu beseitigen. [1])

Klaas, Die Lehre von der Flächenvergleichung. — Duisburg 1881. (Festschrift.)

154 p. 81. Was das Erstere anbetrifft, so folgen in den meisten Lehrbüchern die Sätze so aufeinander, dafs sie nur wenige Anknüpfungspunkte untereinander haben. Man beginnt mit den Sätzen über Inhaltsgleichheit der Parallelogramme und Dreiecke.[2]) Dann kommt der Satz von den Ergänzungs-

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr richtig und es wäre nur zu wünschen, dafs die Universitäten sich mehr dem Standpunkte ihrer Zuhörer anpafsten. Ein Kolleg über Elementarmathematik z. B., das gewissermafsen eine Vermittlung zwischen Schule und Universität böte, wird wohl kaum an irgend einer Universität gelesen. Früher wurde es auch von bedeutenden Gelehrten für nicht zu gering erachtet, eine derartige Vorlesung zu halten.

[2]) Gerade das Kapitel der Flächenvergleichung, nach alter Methode bearbeitet, bietet ein treffendes Beispiel zu dem Mangel an innerem Zusammenhang. der Sätze. Auch der Satz von den Ergänzungsparallelogrammen schliefst sich ganz äufserlich an die vorhergehenden Sätze an.

parallelogrammen. Hieran schliefst sich der sehr wichtige Lehrsatz des Pythagoras, welcher mit den früheren Sätzen durchaus nicht in organischen Zusammenhang gebracht ist.

Becker, J. K. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. — Zürich 1870.[1])

p. 41. Seit Kant nachgewiesen, dafs die Geometrie ihre Unfehlbarkeit nicht der Strenge ihrer Beweise nach der Euklidschen Methode allein verdanke, sondern hauptsächlich dem Umstande, dafs sie auf die uns unmittelbar gegebene reine Anschauung des Raumes sich stütze, hat man in Deutschland angefangen, die Zweckmäfsigkeit der Euklidschen Methode in Frage zu stellen, während in Frankreich Legendre den Euklid noch in seiner Methode zu übertreffen strebte, und in England noch heute an Euklid wie an der Bibel festgehalten wird. 155

p. 41. Herbart dürfte wohl der erste sein, der in seinem ABC der Anschauung (1803) auf Verbesserung in der Methode des Beweises drang, und namentlich betonte, dafs viele Beweise sich darauf beschränken, die Gewifsheit der Sache festzustellen, aber keine Einsicht in ihre Notwendigkeit gestatten, also nur die Gewifsheit geben, dafs etwas sei, statt zu erklären, warum es so sei. 156

p. 42. Seine (Schweins „System der Geometrie") Haupteinwürfe waren die „Handwerksmäfsigkeit", mit der Euklid die Figuren zum Beweise der Identität auf einanderlegt, statt sich mit der unmittelbar klaren Einsicht zu begnügen, dafs z. B. ein Dreieck durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel völlig bestimmt ist, und dafs die blofse Änderung der Lage der Figur im Raume an ihr selbst nichts ändert. 157

p. 42. Die gewichtigsten Einwendungen gegen Euklid 158

---

[1]) Die Arbeit ist besprochen in Lit. Zentralblatt 1871 Nr. 25. S. 628 und Nr. 31. S. 789. — in Schlömilchs Zeitschrift XV, 5 und in H. Z. III. p. 274—281. — p. 380—389. — p. 465—473. — p. 539—541 und zwar beschäftigt sich von den Rezensionen der Hoffmannschen Zeitschrift die zuletzt angeführte mit demjenigen Abschnitt der Beckerschen Schrift, der sich auf die „Methode der Geometrie" bezieht. — Die Besprechung ist durchaus anerkennend.

von Seiten deutscher Mathematiker sind jedoch die, welche von den Schöpfern und Anhängern der heuristischen und genetischen Methode erhoben werden.

159 p. 43. Obwohl beim Unterrichte selbst viele Lehrer heuristisch verfahren, so ist man in den Lehrbüchern noch heute fast durchgängig dogmatisch geblieben.

160 p. 45. Sehr richtig hat zwar Bernhard Becker als den gröfsten Fehler Euklids den schon von Herbart gerügten hervorgehoben, dafs er sich immer damit begnüge, einen Erkenntnisgrund zu geben, wo man einen Realgrund verlange; d. h. dafs von jeder Thesis nur die Richtigkeit nachgewiesen werde, während der innere Zusammenhang der nachgewiesenen Wahrheiten, aus dem ihre Notwendigkeit hervorgeht, unerörtert bleibt.

161 p. 48. Denn der denkende Mensch will nicht blofs Gewifsheit, sondern auch Einsicht in das, was er erkennt, wenigstens soweit solche möglich ist. Und darum sagt Schopenhauer: „Dafs man aber in der Geometrie nur strebt convictio zu bewirken (durch einen Erkenntnisgrund), welche einen unangenehmen Eindruck macht, nicht aber Einsicht in den Grund des Seins, die wie jede Einsicht befriedigt und erfreut: dies möchte nebst anderem ein Grund sein, warum manche sonst vortreffliche Köpfe Abneigung gegen die Mathematik haben."

162 p. 48. Schopenhauer tadelt nun an der Geometrie Euklids .... zweierlei:

1) Dafs sie ihre Sätze zwar beweise als über allen Zweifel erhabene Wahrheiten, aber keine eigentliche Einsicht gewähre in die Gesetze, als deren Ausdruck sie erscheinen.

2) Dafs sie die einzige mögliche Quelle, aus der diese Einsicht geschöpft werden kann, aufs strengste verschliefse, nämlich die unmittelbare Erkenntnis durch reine Anschauung, und nur da sich auf diese, welche allein wahre Befriedigung giebt, weil sie allein auch wirkliche Einsicht gewährt, berufe, wo eine mittelbare Erkenntnis nicht mehr möglich ist, nämlich bei den sogenannten Axiomen.

Aufserordentlich treffend vergleicht Schopenhauer dieses Verfahren mit dem eines Wanderers, welcher bei Mondenschein

mit grofsen Beschwerden einen steinigen und dornigen Weg mit vielen Windungen zurücklegt, weil er den breiten und guten Fahrweg, dem er bisweilen ganz nahe kommt, für Wasser hält.

p. 52. „Die Anschauung ist nicht nur die Quelle aller 163 Erkenntnis, sondern sie selbst ist die Erkenntnis *κατ' ἐξοχήν*, ist allein die unbedingt wahre, die echte, die ihres Namens vollkommen würdige Erkenntnis: denn sie allein erteilt eigentliche Einsicht, sie allein wird vom Menschen wirklich assimiliert, geht in sein Wesen über, und kann mit vollem Grunde sein heifsen, während die Begriffe ihm nur ankleben."

p. 52. „Ich habe den obersten Grundsatz des Unterrichts 164 in der Anerkennung der Anschauung, als dem absoluten Fundament aller Erkenntnis festgesetzt und mit Beseitigung aller einzelnen Lehren das Wesen der Lehre und die Urform aufzufinden gesucht, durch welche die Ausbildung unseres Geschlechts durch die Natur selber bestimmt werden mufs."[1])

p. 53. Und in der That ist die Form der Geometrie aus 165 dem Bestreben hervorgegangen, die unzweifelhaften Wahrheiten der Geometrie gegen die Scheinbeweise der Sophisten sicher zu stellen.

p. 56. Wenn ich darum Beweise überall da für voll- 166 ständig überflüssig, ja hemmend halte, wo es sich um Sätze handelt, denen unmittelbare Evidenz zukommt, weil sie die sachgemäfse Entwicklung der geometrischen Wahrheiten fast unmöglich machen,[2]) so hindert dies keineswegs, in allen anderen Fällen die gröfste Strenge zu verlangen, und gerade die Gewohnheit, immer an der Hand der Anschauung zu gehen, und alle Begriffe durch Anschauungen zu belegen, macht es leicht, diese Strenge auch immer zu beobachten.

Falke, Über eine neue Behandlung der Ähnlichkeits- und Kongruenzsätze. — Arnstadt 1875.

---

[1]) Ein Zitat aus Pestalozzis Werken.

[2]) Man vergl. die Anmerkung zu Zitat Nr. 26.

167 p. 3. Jahrhundertelang war das Werk des Euklid wohl das einzige Lehrbuch der Planimetrie; noch vor wenigen Jahren war es als Leitfaden an gar manchen deutschen Schulen eingeführt, und noch jetzt behauptet es in ganz England eine unbestrittene Alleinherrschaft.

168 p. 5. Dem Euklid war die Reihenfolge ziemlich gleichgiltig; es findet sich zwar von seinem zweiten Buche an auch eine unverkennbare Gruppierung, aber im ersten, welches gerade einen Teil des wichtigsten Stoffes enthält, schwirren die verschiedenartigsten Lehrsätze und Aufgaben bunt durcheinander.

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung.[1]) — Nordhausen 1852.

169 p. 3. Euklids Methode, die, was die geometrische Strenge betrifft, das Muster für alle Mathematiker bleiben wird, ist keine natürliche Methode, sein System ist ein künstliches. Ihm kam es wie den griechischen Mathematikern überhaupt darauf an, von der Wahrheit der von ihm aufgestellten Sätze zu überzeugen.

170 p. 3. Vor allem wurde diese (die Einseitigkeit der Euklidschen Methode) den Lehrern der Geometrie fühlbar; nur zu oft mufsten sich diese überzeugen, wie schwierig es ist, den Anfängern die Geometrie des Euklid zum Verständnis zu bringen, was in diesem Mafse von der Arithmetik nicht gilt. Bei der Willkürlichkeit der Beweise und der Schwierigkeit den Zusammenhang derselben mit den Lehrsätzen selbst zu erkennen, werden die Schüler meistens wider ihren Willen zur Überzeugung von der Wahrheit eines Satzes gezwungen und die Verwunderung über die Klugheit, mit welcher der Beweis geführt worden, ist der Ausdruck des Mangels jeder Einsicht in die Sache selbst.

171 p. 4. .... gerade dieser allgemein gefühlte Übelstand liefert den Beweis, wie ihrem Gegenstande unangemessen die Methode sein mufs, welche die Anfänge des geometrischen

[1]) Vergl. Pietzker, Ein Jünger Schopenhauers in der Geometrie. H. Z. XVI. p. 187—190.

Unterrichts so trocken und so wenig lebensfähig erscheinen läſst.

p. 5. Die Geometrie als Wissenschaft wurzelt wie die Mathematik überhaupt in der Metaphysik, weshalb dieselbe in ihren Anfangsgründen, die nur innerhalb der Metaphysik genau begriffen werden können, sich bei Bestimmung der Grundvorstellungen der gröſsten Strenge zu befleiſsigen hat.[1]) Denn diese Grundvorstellungen, die Art und Weise ihrer Auffassung bestimmen die weitere Entwicklung der Geometrie vollständig, so daſs nach der Verschiedenheit jener die geometrische Methode selbst eine andere wird. Und gerade in dieser Rücksicht findet sich bei Euklid nach fast einstimmigem Urteile älterer und neuerer Mathematiker vieles Mangelhafte. 172

p. 5. Die Kritik der bisherigen Leistungen in der Geometrie auf Grund der kritischen Philosophie hat, was die Grundsätze und Definitionen betrifft, der Professor Schmeiſser in Frankfurt a. O. wohl erledigt.[2]) Derselbe hat nicht nur nachgewiesen, daſs die bis jetzt gebräuchlichen Definitionen von Linie, Winkel etc. unhaltbar sind und daſs überhaupt die 173

[1]) Die Euklidschen Definitionen sind jedenfalls ganz unbrauchbar, selbst da, wo nicht nur Begriffe erklärt werden, die überhaupt ohne Definition a priori klar sind. — Vergl. Kant, Kritik der reinen Vernunft, p. 84 u. 85. (ed. Rosenkranz): „Wir haben oben die Begriffe des Raumes und der Zeit vermittelst einer transzendentalen Deduktion zu ihren Quellen verfolgt und ihre objektive Gültigkeit a priori erklärt und bestimmt. Gleichwohl geht die Geometrie ihren sicheren Schritt durch lauter Erkenntnisse a priori, ohne daſs sie sich, wegen der reinen und gesetzmäſsigen Abkunft ihres Grundbegriffs vom Raume, von der Philosophie einen Beglaubigungsschein erbitten darf. Allein der Gebrauch dieses Begriffs geht in dieser Wissenschaft auch nur auf die äuſsere Sinnenwelt, von welcher der Raum die reine Form ihrer Anschauung ist, in welcher also alle geometrische Erkenntnis unmittelbare Evidenz hat und die Gegenstände durch die Erkenntnis selbst a priori in der Anschauung gegeben werden."

[2]) Die Arbeit Schmeiſsers, eine Programmabhandlung aus dem Jahre 1851, ist mir bis dahin leider noch nicht zu Gesicht gekommen. Im übrigen stimmt die Ansicht, daſs die älteren griechischen Mathematiker in Bezug auf die geometrischen Grundvorstellungen richtigere Ansichten gehabt haben, als die späteren mit der verbreiteten Ansicht überein, daſs die Elemente Euklids schon die Spuren des Niederganges der griechischen Kultur zeigen. — Vergl. Zitat Nr. 115.

Versuche zu Definitionen derselben aufgegeben werden müssen, sondern auch gezeigt, wie schon ältere griechische Mathematiker in Bezug auf die geometrischen Grundvorstellungen richtigere Ansichten gehabt haben als die späteren.

174 p. 5. Das von Dr. L. C. Schulz v. Strafsnitzki verfafste Werk scheint die Geometrie auf das Gebiet, dem sie ihrer Natur nach angehört, nämlich auf das der Anschauung, verweisen zu wollen. Denn darum dreht sich schliefslich Alles.

175 p. 5. Giebt die Geometrie, meint Schopenhauer, im Wesentlichen eine Einsicht in den Nexus der Lage der Teile des Raumes und ist diese Einsicht nur durch die Anschauung möglich, so mufs jeder geometrische Satz auf diese zurückgeführt werden, und der Beweis bestände hier nach blos darin, dafs man den Nexus, auf dessen Anschauung es ankommt, deutlich hervorhöbe.

176 p. 7. Freilich ist hierbei eins zu vermeiden, dies, was verschiedene Mathematiker den Snellschen Schriften zum Vorwurf gemacht haben, „der blofsen Anschauung zu viel zuzuweisen.“ Dies kann nur dann geschehen und nur in der Hinsicht hat auch der gemachte Vorwurf Sinn, wenn die unmittelbare Anschauung statt der begrifflichen Vermittlung in Anspruch genommen oder, was dasselbe ist, wenn das Gebiet der Grundanschauungen und der unmittelbar klaren Erkenntnisse d. h. der sogenannten geometrischen Grundsätze zu weit ausgedehnt wird. — So viel ist indessen klar, dafs die geometrischen Grundsätze nur unmittelbare Grundanschauungen sein können, dafs also kein Satz als solcher aufgeführt werden kann,[1]) der entweder als logische Folge

[1]) Vergl. Kant's Kritik der reinen Vernunft, p. 245: „Man macht einen Unterschied zwischen dem, was unmittelbar erkannt, und dem, was nur geschlossen wird. Dafs in einer Figur, die durch drei gerade Linien begrenzt ist, drei Winkel sind, wird unmittelbar erkannt, dafs diese Winkel aber 2 R. gleich sind, ist nur geschlossen.“ p. 519: „Man kann sich eines Begriffs a priori mit keiner Sicherheit bedienen, ohne seine transzendentale Deduktion zu Stande gebracht zu haben.“ — p. 561: „Denn da sie (die Mathematiker) kaum jemals über ihre Mathematik philosophiert haben (ein schweres Geschäft), so kommt ihnen der spezifische Unterschied des einen Vernunftgebrauchs von dem andern gar

einer Grundanschauung zu betrachten ist oder dessen Erkenntnis etc. eine Vergleichung von Gröſsenverhältnissen, also eine wenn auch noch so einfache Messung voraussetzt.

p. 9. Betrachtet man hierauf die Figuren im allgemeinen, 177 so ist der einzuschlagende Weg im Vorhergehenden schon begründet und das Erste, was hier zur Einsicht in die Sache erfordert wird, ist ein Nachweis der Art und Weise, wie die Figuren im allgemeinen und in besonderen Fällen im Anschauenden entstehen. Denn was sind alle Gestalten der Geometrie überhaupt anders als Produkte unserer geistigen Thätigkeit! ...., sondern gerade das Objekt selbst wird durch das Anschauungsvermögen hervorgebracht.

C. Rethwisch, Jahresberichte über das höhere Schulwesen. II. 1887. — Berlin 1888.

Mathematik: A. Thaer. — Abteilung B.

p. 182. So allgemein die Notwendigkeit dieses Unter- 178 richtes anerkannt wird und so freudig die offizielle Einführung desselben begrüſst wurde, so sehr weichen die Ansichten,[1]) wie derselbe zu gestalten ist, noch von einander ab. .... Was fest steht, ist erfreulich genug: Jeder propädeutische Unterricht, wo und wie er noch bisher erteilt worden ist, hat gute Früchte getragen.

p. 183. Etwas viel, meint Erler, bietet er überhaupt, und 179

---

nicht in Sinn und Gedanken. Gangbare und empirisch gebrauchte Regeln, die sie von der gemeinen Vernunft borgen, gelten ihnen dann statt Axiome. Wo ihnen die Begriffe von Raum und Zeit, womit sie sich (als der einzigen ursprünglichen Quantität) beschäftigen, herkommen mögen, daran ist ihnen gar nichts gelegen, und ebenso scheint es ihnen unnütz zu sein, den Ursprung reiner Verstandesbegriffe und hiermit auch den Umfang ihrer Gültigkeit zu erforschen. In allem diesen thun sie ganz recht, wenn sie nur ihre angewiesene Grenze, nämlich die Natur, nicht überschreiten."

[1]) An dieser Stelle werden Diekmanns Übungen und Aufgaben ausführlich besprochen und viele lobende Rezensionen erwähnt. Es heiſst u. a.: „Auch die übrigen Anerkennungen sind ihm entschieden mehr wegen seiner Abweichungen von Euklid als wegen seiner Zuneigung zu demselben zu teil geworden."

Diekmann giebt das zu,[1]) indem er für die Durchnahme des Stoffes noch ein Tertial der Quarta beansprucht.

180 p. 186. Ein Bedenken möchte aber der Berichterstatter hier erwähnen mit dem Wunsch, widerlegt zu werden: die Schüler folgen mit Interesse, ja Leidenschaft einem Lehrgang nach Hub. Müller, aber sie vergessen rasch und vollständig, wenn man nicht in Euklidischer, d. h. mehr oder weniger willkürlicher Verknüpfung die Sätze wiederholt.

181 p. 203. Die Forderung, Geometrie der Lage zu treiben, findet sich bei Behrle, Kutsch und Schiller. Besonders bemerkenswert ist aber das Eintreten Bertrams auf der Naturforscherversammlung zu Berlin für die synthetische Geometrie. „Die Schwierigkeiten, welche die synthetische Geometrie bietet, findet er hauptsächlich in der Bezeichnungsart.“ Für die synthetische Geometrie trat auch Flohr ein, während Scholz in einem längeren Vortrag die Streichung derselben zu Gunsten der darstellenden Geometrie verlangte.

E. Dühring u. U. Dühring, Neue Grundmittel etc. Leipzig 1884.

182 p. 405. Er (Pascal) meinte nämlich, das Ideal des Wissens bestehe darin, Alles zu beweisen, und es sei nur eine Folge der menschlichen Schwäche, daſs die Axiome unbewiesen blieben. Wer sich in dieser Weise auslassen kann, hat keine Ahnung von der Natur wahren Wissens. Wahrlich, erträglicher wäre der umgekehrte Fehler,[2]) nämlich zu behaupten die Notwendigkeit der Beweise entspräche einer Unvollkommen-

---

[1]) Da wir für die Ausdehnung des Unterrichts noch über die ganze Quarta sind, so geht für uns selbstverständlich Diekmann nicht zu weit.

[2]) Diese feine philosophische Bemerkung Dührings über die Notwendigkeit der Beweise kennzeichnet in der That das Wesen der Axiome aufs treffendste. Sie kann zugleich dazu dienen, unsere Ausführungen über die Ausdehnung der Axiome zu unterstützen. Es steht diese Ansicht allerdings im schroffsten Gegensatze zu den Bestrebungen, die Mathematik auf möglichst wenig Axiome zu begründen. Man könnte vielleicht in diesem Sinne von einer besonderen Veranlagung für Geometrie sprechen; je mehr unmittelbar gewiſs oder je gröſser die Anzahl der Axiome, desto gröſser die Beanlagung.

heit der menschlichen Einsichtsart; denn das Vollkommenere bestände darin, nicht blos die Axiome, sondern alles unmittelbar, also ohne Beweisbedürftigkeit, zu wissen.

p. 409. Man hat über das Erfordernis der Anschaulichkeit für den Unterricht die unrichtigsten Lehren verbreitet; man hat leichte Faſslichkeit mit räumlicher Anschaulichkeit verwechselt, während doch nur in den allereinfachsten Fällen das Anschauliche auch zugleich das leicht Faſsliche sein kann. Allerdings bedarf man auch der räumlichen Anschauung als eines unentbehrlichen Ausgangspunktes; aber es folgt hieraus nicht, daſs alles räumlich anschaulich werden müsse. Im Gegenteil ist es ein Vorzug, daſs sich der Verstand von der Grundlage der bloſsen Anschauung bald erheben und dann auf eigenen Füſsen bewegen kann. Elemente der Geometrie sollten daher künftig äuſserst konzentriert ausfallen und immer nur unter Zuhülfenahme von Elementen der allgemeinen Gröſsenanalysis, also in Anknüpfung an gewisse arithmetische, algebraische und analytische Voraussetzungen entworfen werden. Dies steht keineswegs der Wahrheit im Wege, daſs, wie der Weg der Geschichte selbst gezeigt hat, einige geometrische, ganz einfach anschauliche Grundlehren von einer ausgebildeten Arithmetik unabhängig sind und das Wenige an arithmetischen Einsichten, dessen sie bedürfen, unmittelbar in der geometrischen Darstellung gleichsam mit sich führen können.[1]) In derartigen letzten Einfachheiten ist der Ursprung der Erkenntnis ein gemeinsamer und findet sich die räumliche Anschauung mit einem unmittelbaren und anschaulichen Rechnen verbunden, welches an und mit dieser Anschauung ohne bemerkbare Unterscheidung vollzogen wird. Die Sonderung wird erst sichtbar, wenn verwickeltere Verhältnisse in Frage kommen; dann muſs sie aber auch zu einer prinzipiellen Trennung der beiderlei Elemente führen. 183

p. 410. In der That ist es eine Rückständigkeit, gleich den Griechen in ihrem klassischen Stadium, fast ausschlieſs- 184

---

[1]) Es wird also nichts im Wege stehen, zuerst nur Geometrie zu lehren und von Arithmetik nur das unmittelbar Notwendige ohne besondere Lehre in den Kursus der Geometrie einzuflechten.

lich im Anschaulichen zu verbleiben und so die Geometrie zur mafsgebenden Grundlage aller übrigen Mathematik zu machen.[1]) — .... Trotzdem kann das griechische Beispiel für den allerersten Unterricht in der eigentlichen Mathematik insofern etwas lehren, als es .... nützlich sein wird, mit sehr konzentrierten Elementen der Geometrie den Anfang zu machen. Man wird auf diese Weise wenigstens eine Gewöhnung der Phantasie an die Hervorbringung gesetzmäfsiger räumlicher Gebilde erzielen und dem unentwickelten Sinne des Anfängers gerade in derjenigen Richtung entgegenkommen, in welcher die Stammesanlagen der modernen Völker von Natur am wenigsten leisten. Es ist nicht blos die Phantasie nach Art der Griechen, sondern überhaupt jegliches auf Gestaltungskraft angelegte Vorstellungsvermögen, dem man mit der ersten Einführung in gute geometrische Elemente ein wenig zur Ausbildung verhelfen kann. Es ist sozusagen das Kinderstadium der Geistesregungen, welches ein Anrecht darauf hat, nach dem Vorbilde der weltgeschichtlichen Entwicklung der Mathematik zuerst an den ihm wahlverwandten Elementen der Geometrie gefördert zu werden. Die allgemeine Gröfsen-

---

[1]) Diese Bemerkungen Dührings treffen offenbar nicht den Unterricht an den höheren Lehranstalten, sondern beziehen sich auf das Studium an den Universitäten. Auf der Schule mufs entschieden die Geometrie den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts bilden und den überwiegenden Teil der zu Gebote stehenden Zeit einnehmen. Es geht dies auch aus den folgenden Ausführungen D's. hervor. Ich benutze übrigens gern diese Gelegenheit, um meinen Standpunkt noch einmal kurz zu präzisieren und etwaigen Mifsdeutungen vorzubeugen: Der mathematische Unterricht mufs, wenn er mit Erfolg erteilt werden soll, an Bekanntes anknüpfen, und das sind die Raumanschauungen, die nur zum Bewufstsein gebracht werden müssen. Deshalb mufs der mathematische Unterricht mit der Geometrie beginnen und in ihr auch während der ganzen Schulzeit seinen hervorragenden Stützpunkt finden. Dazu kommt, dafs die Geometrie auch schon auf der Schule zu einem gewissen Abschlufs gebracht werden kann. Der Wert der Arithmetik wird selbstverständlich dadurch gar nicht getroffen.

„Ὁ θεὸς ἀριθμητίζει! lautet ein verbürgter Ausspruch von Gauss. Die Mathematik ist nach seiner Überzeugung die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik.“

Schwering, Aufgaben und Anschauung. Coesfeld, 1889.

analysis ist eine Abstraktion von der Gattungsbestimmtheit der verschiedenen wirklich vorhandenen Gröfsen, und diejenige Art von wirklichen Gröfsen, an welche zuerst anzuknüpfen ist, findet sich eben im Gebiet räumlicher Gebilde.

p. 419. Diese geometrischen Zurüstungen auf ein geringstes Mafs zuzückzuführen, diesem notwendigen Mafs aber dann auch sein volles Recht widerfahren und hier die Anschaulichkeit gehörig walten zu lassen, ist Angesichts des modernen Zustandes der Mathematik ein Erfordernis strenger Wissenschaftlichkeit. 185

Schwering,[1]) Aufgabe und Anschauung. Coesfeld 1889. Progr.

p. 4. Eins der thörichtsten und darum gerade dem grofsen Haufen der Halbgebildeten am meisten mund- und ohrgerechten Vorurteile ist jenes, es sei für die Hervorbringung genügender Leistungen in der Mathematik eine besondere Veranlagung erforderlich. Die Zerstörung dieses lächerlichen Aberglaubens ist vor allem der Schule zu danken.[2]) In wahrem Siegesfluge hat die Überzeugung von der Notwendigkeit des Anschauungsunterrichts und von der Unentbehrlichkeit des Aufgabenlösens in den beteiligten Kreisen Platz gegriffen. 186

p. 5. Man braucht nur die beiden Grundsätze: „Der Unterricht mufs anschaulich sein“ und „Die Aufgabe ist Ziel und Zweck der mathematischen Ausbildung“ auf das bestimmte Gebiet der Stereometrie anzuwenden.[3]) 187

p. 5. Man hat in neuerer Zeit in einseitigem Doktrinarismus die alte Einteilung der Geometrie in Planimetrie und 188

---

[1]) Besprochen von Cantor in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 35. Jahrg. 1. Heft. p. 35.

[2]) Die Schule hat nach meiner Ansicht damit nur ihre Pflicht und Schuldigkeit gethan, denn von wem anders gingen die Ursachen aus zu der früheren Annahme einer besonderen Begabung, als von der Schule, die durch ihre Methode dieses Vorurteil hervorrief und befestigte.

[3]) Dieses sind in der That die beiden Grundsätze alles geometrischen Unterrichtes: der letztere, der im arithmetischen Unterricht schon immer Geltung gehabt hat, wird hoffentlich durch die Bestrebungen der neueren Zeit auch im geometrischen allgemein anerkannt.

Stereometrie bemängeln wollen. Gewifs bildet die Planimetrie nur einen Teil der Stereometrie;[1]) aber dieser Teil ist, wie mit Recht bemerkt worden ist, so umfangreich, dafs durch ihn die stereometrischen Betrachtungen nicht auseinander gerissen werden dürfen.

189 p. 11. Dahin gehört ferner eine gewisse Abneigung gegen den indirekten Beweis, den man mit Berufung auf ein Witzwort Schopenhauers als „Mausefallenbeweis“ zu brandmarken bestrebt ist.[2]) Gewifs, Schopenhauer war ein geistreicher Schriftsteller und hat es in seiner Philosophie fertig gebracht, mit mehr Geschick als mancher andere die wirkliche Welt auf den Kopf zu stellen. Daraus folgt aber noch keineswegs, dafs er verdient, in Fragen der mathematischen Didaktik als Kenner gehört zu werden.

190 p. 11. Die von uns entwickelten Ansichten stechen durch ihre Nüchternheit und durch das Festhalten an altbewährten Grundsätzen sehr prosaisch ab gegen manche kühne Gedanken der Neuerer. Soll aber der gegenwärtige, unserer Meinung nach im ganzen sehr günstige Stand des mathematischen Unterrichts erhalten bleiben,[3]) soll die Mathematik als praktische Schule des Denkens, als Schlüsselbewahrerin zum Zauberreiche der Naturwissenschaften sich die Beachtung und Pflege unserer gebildeten Volksklassen erhalten, dann hat die Schule

---

[1]) So sehr auch vom wissenschaftlichen Standpunkt eine einheitliche Behandlung von Planimetrie und Stereometrie gerechtfertigt erscheint, so wenig ist dieses Prinzip in der Schule angebracht. Übrigens ist auch in der höheren Geometrie z. B. der analytischen eine getrennte Behandlung der ebenen und räumlichen Geometrie allgemein üblich.

[2]) Ich habe den Eindruck gewonnen, als wenn der Schopenhauersche Ausdruck nicht allein auf den indirekten Beweis gemünzt sei, sondern in erster Linie der dogmatischen Behandlung des Beweises überhaupt gelte. Schopenhauer hat auch wohl nicht als mathematischer Didaktiker auftreten wollen, sondern nur aus der Mathematik prägnante Beispiele für seine philosophischen Erörterungen entnommen.

[3]) Sollte der „im ganzen sehr günstige Stand des mathematischen Unterrichts“ nicht aus einer zu optimistischen Beurteilung herrühren? Die überwiegende Verbreitung alter, viel bekämpfter Lehrbücher, sowie die Schwierigkeiten, die der Einführung von Büchern, wie des von Hubert Müller z. B., erwachsen, geben in dieser Hinsicht doch zu denken.

sich vor dem unbesonnenen Drängen der Neuerer ebenso vorsichtig zu hüten, wie vor dem Zurücksinken in die platte Auswendiglernerei früherer Zeiten.

Pauly, Der erste Jahreskursus des plan. Unterrichts. Progr. Andernach 1889.

p. 4. Das bekannte Verfahren des Aufeinanderlegens und die Art und Weise, wie die in der Hypothesis angeführten Stücke der Reihe nach zur gegenseitigen Deckung gelangen ...,[1]) dies alles, was ja erst nachher im Beweise zur ausführlichen Darstellung gelangen soll, ist oft im Verstande des Schülers ein einziger Schlufs, der sich aus der klaren räumlichen Vorstellung der in der Hypothesis angegebenen Bedingungen fast unmittelbar vollzieht. 191

p. 11. Ich wende mich nun gegen die Unsitte, dem Lehrbuche der Planimetrie eine Art von philosophischer Grundlage zu geben. Bekanntlich erfährt der Quartaner schon gleich in den ersten Lehrstunden,[2]) dafs das Ganze gröfser ist als ein Teil desselben. .... Wird es mir zugestanden, dafs solche Prinzipien philosophischer Natur sind, ... so folgt schon daraus, dafs sie als einer anderen Wissenschaft angehörig aus dem Lehrbuche der Planimetrie entfernt werden müssen. Hält 192

---

[1]) Es scheint, als wenn immer mehr die Ansicht an Verbreitung gewinnt, die die Kongruenzsätze verbannt wissen will und an deren Stelle vier Grundaufgaben setzt mit Lösungen, deren Eindeutigkeit a priori erkannt wird. Die vorliegende Abhandlung leidet übrigens, wie mir scheint, an einer gewissen Einseitigkeit: die Vorarbeiten sind zu wenig berücksichtigt.

[2]) Ich sehe nicht recht ein, gegen was Pauly hier vorgeht. Die Erörterung der Grundbegriffe kann doch nicht vollständig ausgemerzt werden. An welcher Stelle sollen aber dann diese Betrachtungen eingeflochten werden? Dabei ist zu bedenken, dafs die Lehrbücher der Planimetrie meistens so eingerichtet sind, dafs sie für alle Klassen gebraucht werden. Übrigens steht es ja jedem Lehrer frei, von diesen philosopischen Erörterungen so viel oder so wenig zu geben, als er für angemessen hält. Es giebt doch Gebiete, wo Philosophie und Mathematik nicht zu trennen sind; sollen diese deshalb aus der Mathematik entfernt werden, so würde man sie mit demselben Rechte aus der Philosophie weisen; aber wohin dann damit?

man mir aber das mathematische Gewand entgegen, in welches einige dieser Axiome eingekleidet sind, ... so sehe ich noch keinen Grund, warum gerade das Lehrbuch der Planimetrie diese Beigabe bekommen soll, während das Lehrbuch der Algebra, welche Wissenschaft sich ebenso häufig auf die genannten Grundsätze stützt, derselben nicht zu bedürfen scheint.

193 p. 11. Auch bin ich keinen Augenblick im Zweifel, dafs die oben berührten in ein mehr mathematisches Gewand eingekleideten Axiome aus dem Lehrbuche des Quartaners, sowie auch aus dem Schulunterricht überhaupt zu entfernen sind.[1]) Zunächst ist es nicht nötig, dem Knaben Axiome noch besonders mitzuteilen, denn sie bilden einen angeborenen Teil seiner Erkenntnis, von welchem er unbewufste Anwendung macht und bereits gemacht hat, seitdem er denken lernte. Es ist eigentlich eine wunderliche Sache, dafs ein Schüler die Grundsätze, die ihm eingeboren sind, an einer höheren Lehranstalt auch noch nachträglich auswendig lernt. .... Sprachliche Formen für diese Axiome darf er nicht kennen lernen, die Anwendung derselben darf nur eine unbewufste sein.

194 p. 13. Nach dieser Erörterung über die Methode des Vortrags planimetrischer Sätze kehren wir wieder zur Einleitung der Lehrbücher zurück und richten unsere Aufmerksamkeit auf das,[2]) was uns aufser den besprochenen philosophischen Prinzipien noch sonst bemerkenswert erscheint. Zunächst fällt uns die grofse Menge von Definitionen auf. Man definiert z. B. fol-

---

[1]) Diese Forderung ist doch ganz unberechtigt. Niemand wird bezweifeln, dafs diese Grundsätze eine Erkenntnis a priori, eine angeborene Erkenntnis sind — sonst wären es eben keine Grundsätze —, aber diese Grundsätze, die unbewufst im Verstande des Schülers vorhanden sind, müssen geweckt, müssen zum Bewufstsein gebracht werden. Von einem Auswendiglernen darf dabei natürlich nicht die Rede sein. Der mathematische Unterricht soll ja gerade das folgerichtige Denken zu einer Sache des Bewufstseins machen.

[2]) Was ich schon oben gesagt, kann ich hier wiederholen. Wir haben in der Hauptsache Lehrbücher der Planimetrie, die nicht in Kurse für die einzelnen Klassen geteilt sind. Aufserdem ist klar, dafs eine Reihe von Begriffen erklärt werden mufs; es ist gewissermafsen das Handwerkszeug zur Arbeit.

gende Begriffe: Grundsatz (Axiome), Lehrsatz (Theoreme), Erklärung oder Definition etc. etc. Ich bin überzeugt, dafs die Lehrer der Mathematik über solche Dinge einfach hinweggehen, wenigstens im ersten Unterrichte; dann ist es aber mindestens überflüssig, dieselben in den für den Quartaner bestimmten Leitfaden aufzunehmen. Einige Lehrbücher suchen dem Schüler schon in der Einleitung das Objekt der mathematischen Wissenschaften und die Einteilung derselben klar zu machen.[1])

p. 14. Nach meiner Ansicht ist es vollständig ausreichend, mindestens für das erste Lehrjahr, wenn die Schüler, statt etwa die Definition für Nebenwinkel hersagen zu können,[2]) stets auf Geheifs des Lehrers ein Paar Nebenwinkel an die Tafel zeichnen .... können..... — Eine solche gemilderte Praxis ist ferner für das ganze Gebiet des ersten Jahreskursus überhaupt zu befolgen. 195

p. 15. Zunächst halte ich es für wünschenswert, dafs die sogenannten propädeutischen Übungen, deren Wert in den letzten Jahren eine erfreuliche Anerkennung gefunden hat, nicht nur vor dem planimetrischen Unterrichte, sondern auch während desselben eine geeignete Berücksichtigung finden, und zwar in der Art, dafs man gewissen Lehrsätzen bestimmte, für den speziellen Satz berechnete Übungen unmittelbar vorangehen läfst. 196

p. 16. Der andere Vorschlag, den ich dem Lehrer der Mathematik noch zur Beurteilung anheim stellen möchte, geht dahin, beim ersten planimetrischen Unterrichte, wo nur immer möglich, auf Verhältnisse des Lebens und der Natur, oder auf die technische Verwendung der Mathematik Bezug zu nehmen..... Auf diese Weise gründet man den blofs theo- 197

---

[1]) Wer wollte leugnen, dafs man hier zu weit gehen kann? Aber im Ernst kann doch nicht verlangt werden, das Objekt des geometrischen Unterrichts nicht gleich anfangs festzustellen.

[2]) Hier stimme ich im wesentlichen mit Pauly überein. Aber ich glaube, dafs, wenn ein Schüler Nebenwinkel z. B. zeichnen kann, er auch leicht dahin gebracht werden kann, das Charakteristische derselben mit Worten anzugeben. Der Unterricht dürfte sonst wohl auch leicht nicht seinen vollen Zweck erreichen.

retischen Vortrag der Aufgabe auf die feste Grundlage eines praktischen Nutzens, und ein Versuch wird zeigen, wie dies allein schon im stande ist, freudige Wissbegierde hervorzurufen.

— — — —

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Progr. Charlottenburg 1889.

198 p. 1. Ungleichmäfsiger Fleifs und zeitweiser Mangel an Aufmerksamkeit rächt sich in keinem Unterrichtsgegenstande gleich stark wie in der Mathematik,[1]) weil in anderen Wissenszweigen bei unvollständiger Kenntnis des Vorhergehenden wohl noch vieles verstanden werden kann, während in der Mathematik das Folgende dunkel bleiben mufs, wenn das Vorausgegangene nicht klar erfafst ist.

199 p. 2. Das Lehrverfahren mufs danach eingerichtet werden, dafs schon in den ersten Anfängen mit dem Gewinn an Wissen auch die Fähigkeit erreicht wird, das gewonnene Wissen anzuwenden, damit das natürliche Interesse an dem neuen Lehrstoff nicht nachläfst, sondern durch die Freude am Können gesteigert wird.

200 p. 2. .... es wird zu wenig Rücksicht darauf genommen, dafs der Schüler beim Unterricht praktisch mitarbeiten, dafs er an der Entwicklung des Lehrstoffs regen Anteil nehmen und zum Aufbau des Systems die Bausteine selber aufsuchen mufs;[2]) es wird ferner auf die Ausbildung der Anschauungsthätigkeit nicht das nötige Gewicht gelegt. Dadurch, dafs Sätze und Beweise in fertiger Form gegeben sind, wird der natürliche Hang des Schülers, lediglich mit dem Gedächtnis zu arbeiten, in der bedenklichsten Weise unterstützt. ....

201 p. 2. In erster Linie mufs die Anschauungsthätigkeit

---

[1]) Dies ist ein Hauptpunkt, der gar nicht dringend genug betont und in den Vordergrund gestellt werden kann.

[2]) Dafs diese Schäden schon lange erkannt sind, geht aus den Bestrebungen der mathematischen Lehrer genügend hervor. Die heuristische Methode und in Verbindung mit ihr die genetische sind ja aus der Bekämpfung der berührten Schäden, einer Folge der dogmatischen Behandlung, hervorgegangen.

aufs sorgfältigste gepflegt werden, damit der Schüler es lernt, die Beziehungen zu sehen, von denen gesprochen wird.

p. 3. Von herrorragender Wichtigkeit ist naturgemäfs der erste planimetrische Unterricht, der den Schüler mit einer verhältnismäfsig grofsen Anzahl neuer Begriffe bekannt machen und den jugendlichen Geist an die ihm fremde Methode der Entwicklung mit ihrer strengen Folgerichtigkeit gewöhnen soll. 202

p. 3. In der letzten Zeit hat nun der Streit der Meinungen, ob die Schulgeometrie noch Euklidisch betrieben wird oder nicht, ob die Grundlagen des Euklidischen Systems mit den heutigen Anforderungen noch vereinbar sind, oder ob auf neuen Fundamenten die Aufstellung eines neuen, in sich selbst harmonischen Baues erstrebt werden soll, das Interesse der Fachgenossen in ganz besonderem Mafse in Auspruch genommen. 203

Brunn, Ein Beitrag zur Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben im Anfangsunterricht. — Progr. Husum 1888.

p. 1. Gegenwärtig ist fast allgemein die Ansicht verlassen, die den planimetrischen Konstruktionsaufgaben kaum einen Platz im Unterrichte gönnen wollte, weil der Mangel allgemeiner Methoden die Lösung solcher Aufgaben zu einer Art von Rätselraten mache und eine gewisse Findigkeit der Schüler voraussetze. 204

Bohle, Der vorbereitende geometrische Unterricht in Quinta. — Progr. Crefeld 1889.

p. 3. Die Forderung, alles Wissen auf Anschauung zu begründen, ist seit Pestalozzi die Grundlage der Pädagogik geworden. 205

p. 4. Die Geometrie arbeitet sofort mit sehr abstrakten und scharf bestimmten Begriffen, ehe der jugendliche Geist dieselben anschaulich geläufig hat.[1]) . . . . Was der Schüler 206

[1]) Mit bestimmten Begriffen ja, aber mit sehr abstrakten nur in gewisser Beziehung. Was der Schüler für den Geometrieunterricht mitbringt, darf nicht unterschätzt werden und erhebt sich zu seiner vollen

selbst für den Geometrie-Unterricht mitbringt, ist von geringer Bedeutung.

207 p. 4. Durch diese fortwährende Beschäftigung mit geeigneten Zeichnungen wird der Vorbereitungskursus auf die Ausbildung des Anschauungsvermögens, also der Fähigkeit des Geistes sich schnell und leicht in die verschiedensten Lagenbeziehungen geometrischer Figuren hinein zu finden, fördernd wirken. Wie wichtig diese Fähigkeit ist und wie vielen schwächeren Schülern sie fehlt, kann man auf jeder Stufe des mathematischen Unterrichts beobachten.

208 p. 5. Dem Anfänger erscheint es höchst überflüssig, für dasjenige, was ihm anschaulich durchaus klar ist, einen Beweis zu geben .... Er sieht mit einer gewissen Überzeugung durch unmittelbare Anschauung ein und dies genügt ihm.

209 p. 6. In Bezug auf das erstgenannte Ziel, nämlich die Einführung des Schülers in das Gebiet der geometrischen Gebilde und Begriffe, ist es einleuchtend, dafs methodisch durchaus anders verfahren werden mufs als beim wissenschaftlichen Unterricht.

Alphabetisches Verzeichnis der Werke, aus denen ausführlich zitiert ist:

Zitate:

1) Bauernfeind: Über den Einflufs der exakten Wissenschaften etc. — Progr. München, 1869 . . . . 134—138
2) Becker, J. K.: Abhandlungen aus dem Grenzgebiet etc. — Zürich, 1870. . . . . 155—166
3) Becker, J. K.: Zur Reform des geometr. Unterrichts. — Progr. Wertheim a/M., 1880 . . . . 118—124
4) Beneke: Erziehungs- und Unterrichtslehre. — Berlin, 1876 82—86
5) Bielmayr, Über den Mathematikunterricht etc. — Progr. Achaffenburg, 1870 . . . . 128—133
6) Bischoff: Über Zweck und Art des math. Unterrichts etc. — Progr. Amberg, 1847 . . . . 125—127
7) Bohle: Der vorbereitende geometrische Unterricht. — Progr. Crefeld, 1889 . . . . 205—209

Bedeutung, wenn dem eigentlichen wissenschaftlichen Unterricht ein propädeutischer Kursus vorausgeht.

Zitate:

8) Brunn: Ein Beitrag zur Behandlung etc. — Progr. Husum, 1888 . . . 204
9) Dahl: Lehrplan für den math. Unterricht etc. — Progr. Braunschweig, 1887 . . . 40 u. 41
10) Deinhardt: Der Gymnasialunterricht. — Hamburg, 1837 101—104
11) Dühring: Neue Grundmittel und Erfindungen etc. — Leipzig, 1884 . . . 182—185
12) Ernst: Die Methoden der Planimetrie etc. — Progr. Kassel, 1860 . . . 71—74
13) Falke: Über eine neue Behandlung etc. — Progr. Arnstadt, 1875 . . . 167 u. 168
14) v. Fischer-Benzon: Die geometrische Konstruktionsaufgabe. — Progr. Kiel, 1884 . . . 42—50
15) Friederich: Einige Bemerk. über den Unterricht i. d. Math. — Progr. Ansbach, 1852 . . . 151
16) Hankel: Die Entwicklung der Math. etc. – Tübingen, 1885 105 u. 106
17) Heinze: Der Vorbereitungsunterricht etc. — Progr. Königsberg, 1888 . . . 51—54
18) Herbart: Pädagogische Schriften. — Leipzig, 1873 . . . . { 66, 88—98
19) Jenrich: Beiträge zur Methodik etc. — Progr. Magdeburg, 1882 . . . 3—15
20) Kaiser: Über einige Hauptpunkte des geometr. Unterr. — Progr. Remscheid, 1881 . . . 55—63
21) Kern: Grundrifs der Pädagogik. — Berlin, 1881 87
22) Klaas: Die Lehre von der Flächenvergleichung etc. — Progr. Duisburg, 1881 . . . 154
23) Korneck: Genetische Behandlung des planimetr. Pensums etc. — Progr. Kempen, 1879 . . . 139—143
24) Kosack: Beiträge zu einer systematischen Entwicklung etc. — Progr. Nordhausen, 1852 . . . 169—177
25) Lichtenberg: Aus der Praxis des math. Unterrichts. — Progr. Oldesloe, 1887 . . . 27—32
26) Mager: Wissenschaft der Mathematik etc. — Berlin, 1837 114—117
27) Müller, H.: Über den ersten planimetr. Unterricht. — Progr. Berlin (Charlottenburg), 1889 . . . 198—203
28) Müller, Hubert: Besitzt die heutige Schulgeometrie etc. — Metz, 1889 . . . 67—70
29) Österreichischer Organisationsentwurf . . . 65
30) Pascals Regeln . . . 64
31) Pauly: Der erste Jahreskursus des plan. Unterr. — Progr. Andernach, 1889 . . . 191—197
32) Prestel: Die geometrische Heuristik. — Progr. Emden, 1856 144—146
33) Reidt: Anleitung zum math. Unterricht. — Berlin, 1886 . 107—113
34) Rethwisch: Jahresberichte über höheres Schulwesen. — Berlin . . . 178—181

Zitate:

35) Schiller: Handbuch der prakt. Pädagogik. — Leipzig, 1886 . . . 99 u. 100
36) Schellbach: Über die Zukunft der Mathematik. — Berlin, 1887 . . . 153
37) Schrader: Erziehungs- und Unterrichtslehre. — Berlin, 1876 . . . 75–77
38) Schütz: Die gegenwärtige Bedeutung etc. — Progr. Frankfurt a/M., 1887 . . . 33—39
39) Schulze: Bemerkungen zum Geometrie-Pensum etc. — Progr. Strausberg, 1887 . . . 2
40) Schwering: Aufgabe und Anschauung etc. — Progr. Coesfeld, 1889 . . . 186–190
41) Waitz: Pädagogik. — Braunschweig, 1875 . . . 78—81
42) Wiegand: Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. — Halle, 1848 . . . 152
43) Zerlang: Beitrag zu einer genet. Entwicklung etc. — Progr. Sorau, 1860 . . . 147–150
44) Ziegel: Methode u. Lehrplan etc. — Progr. Schwerin a. d. Warthe, 1878 . . . 16—26

I. Teil.

Die geometrischen Grundbegriffe.

I. Kapitel.

Der Raum.

Die Geometrie ist die Lehre von den Gebilden im Raume, wenn auf alle sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften derselben kein Gewicht gelegt wird und nur der Teil des Raumes, den sie durch ihre Gröfse, Gestalt und Lage einnehmen, in Betracht kommt.

Der Ausdruck „Raumgebilde oder räumliche Gebilde" scheint sich immer mehr einzubürgern; auch verdient er vor dem früher üblichen „Raumgröfse" entschieden den Vorzug, da sofort zu erkennen ist, dafs wir es mit eigentümlichen nur im Raume möglichen Gegenständen zu thun haben, für die der Name „Gröfse" schlechtweg leicht zu Mifsverständnissen oder falscher Auffassung führen konnte.[1]) Auch war ja eines der räumlichen Gebilde bei dieser Bezeichnung nach allgemeiner Annahme ausgeschlossen: der Punkt, dessen Begriff wir thatsächlich mit dem Begriff der Gröfse auf keine Weise vereinigen können; aber bei genauerer Betrachtung erweisen sich ja auch schon Flächen und Linien dadurch, dafs sie das, was zu einer wirklichen Raumgröfse d. h. einem Körper gehört, teilweise negieren, als — wenn man überhaupt noch den Namen „Gröfse" gelten lassen will — jedenfalls „Gröfsen von ganz besonderer Art". Man vergleiche die Ausführungen über Körper, Flächen und Linien etc. im Kapitel III.

Betrachten wir nun ein geometrisches Gebilde, so fällt selbstverständlich alles, was sich auf die Lage bezieht, aus

---

[1]) Vergl. Kruse: Elemente der Geometrie:
„Die geometrischen Gröfsen unterscheiden sich von den übrigen Gröfsen dadurch, dafs an ihnen als eine wesentliche Eigenschaft der Begriff der Lage haftet." — H. Z. VII. p. 212.

der Betrachtung aus; denn erst wenn wir mehrere — mindestens zwei — Gegenstände in unserer Vorstellung verknüpfen, kommt der Begriff der Lage zur Existenz — die Beziehung auf das betrachtende Subjekt erzeugt für sich noch nicht den Begriff der Lage, — obwohl eine Zweiheit vorhanden ist — sondern erst die Beziehung von mindestens zwei Objekten auf einander, da das betrachtende Subjekt ja seinen Ort beliebig wählen resp. verändern kann, ohne dafs dadurch die Lage des betrachteten Objekts irgendwie beeinflufst wird.

Die Begriffe der Gröfse und Gestalt lassen sich noch vereinigen in dem Begriff der Ausdehnung überhaupt; wir würden dann die Gröfse als das Wieviel der Ausdehnung, die Gestalt als das Wie (die Art) der Ausdehnung bezeichnen müssen. Beide sind von einander vollständig unabhängig und können auch getrennt, jeder für sich, in Betracht kommen, ohne dafs dadurch die Betrachtung falsch wird. Zur vollständigen Kenntnis aber eines bestimmten Raumgebildes sind beide vereint unerläfslich.

Aus der Abstraktion von allen sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften geht hervor, dafs wir ein geometrisches Raumgebilde in keiner Weise darstellen können, dafs es ein reines Erzeugnis unseres Denkens ist. Wenn wir uns dieselben trotzdem sinnlich wahrnehmbar konstruieren, so darf nie vergessen werden, dafs wir es nur mit Bildern — und zwar genau genommen, bei möglichst sorgfältiger Nachbildung doch nur sehr unvollkommenen Bildern zu thun haben.[1]) Jedoch sind auch diese unvollkommenen Bilder geeignet, unsere Vorstellung zu unterstützen und durch äufsere Anschauung die innere, rein geistige Anschauung oder Vorstellung zu bilden und zu üben.

Einen durch Abstraktion erhaltenen Raumteil nennen wir einen geometrischen Körper oder kurzweg einen Körper, deren

---

[1]) Vergl. weiter unten Kap. III. Doch soll auch hier schon ganz besonders darauf hingewiesen werden, dafs eine solche Nachbildung überhaupt nur möglich ist für Körper, undenkbar aber für alle anderen Raumgebilde; nur Körper können wir uns bildlich darstellen, weder Flächen, noch Linien und Punkte: denn auch bei ihrer Darstellung — ja es ist wohl auch gestattet zu sagen Vorstellung — handelt es sich in der That um Darstellung von Körpern.

Substrate in der sinnlichen Wahrnehmung die physikalischen Körper der uns umgebenden Aufsenwelt sind.[1])

Da wir von allen rein physikalischen Eigenschaften abstrahieren, so verlieren auch die Gesetze, denen die physikalischen Körper unterworfen[2]) sind, für die geometrischen Körper ihre Gültigkeit, vor allen Dingen das Gesetz der Undurchdringlichkeit; wir können uns demnach die räumlichen Gebilde der Geometrie in beliebiger Anzahl an derselben Stelle des Raumes denken.

Der Raum selbst mufs im Unterricht — im Anfang wenigstens — als a priori gegeben angesehen werden und ohne eingehende Erörterung bleiben, da der Schüler durch philosophische Betrachtungen über den Raum nur verwirrt werden würde.[3]) Jedoch darf auch keine Unklarheit in irgend einer Beziehung zurückbleiben, besonders müssen die Eigenschaften des Raumes erwähnt und dem Verständnis der Schüler nahe gebracht werden.

Man wird demgemäfs bei der ersten Erklärung am besten den Kantschen Weg einschlagen und zu dem Begriff des Raumes gelangen, indem man von allen Gegenständen der Aufsenwelt — wobei ganz besonders auch der Luft als eines Körpers Erwähnung zu thun ist — abstrahiert resp. alle hinweg denkt. Das, was dann in unserer Vorstellung übrig bleibt,

---

[1]) Ich habe hier den Ausdruck physikalischer Körper als den allgemeineren gewählt. Im Unterricht wird man zwischen natürlichen und künstlichen Körpern unterscheiden resp. auf den Unterschied zwischen beiden hinweisen müssen. Als Beispiele für die ersteren können Früchte aller Art, Eier etc. genannt werden, als Beispiele der zweiten Art dienen u. a. alle Gegenstände des Lehrzimmers.

[2]) Ich bin mir wohl bewufst, dafs dieser Ausdruck nicht besonders glücklich gewählt ist, habe ihn aber doch seiner Kürze wegen, und da er wohl auch von den Lesern nicht mifsverstanden werden wird, beibehalten.

[3]) Vergl. H. Z. I. p. 228. — J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe.

p. 235: „Man geht aus von dem in jedem menschlichen Geiste vorhandenen Begriffe des Raumes (ohne Definition).“

„Oder man geht umgekehrt vom Punkte aus (der nicht definiert wird) und nennt den Weg (die Spur) eines bewegten Punktes Linie etc.“

ist der Raum; ohne dafs hier auf die Kantsche Begründung des Raumes als eines Begriffes a priori — der Form unserer äufseren Wahrnehmung — eingegangen wird, soll nur hervorgehoben werden, dafs in der That der Raum nicht unabhängig vom Subjekt gedacht werden kann; indem wir alle Gegenstände hinwegdenken, bleiben wir selbst doch übrig, d. h. wir können eben nur alle Gegenstände mit Ausnahme unserer selbst hinwegdenken.[1])

Der auf diese Weise leer gedachte, nicht wahrnehmbare Platz der wahrnehmbaren Erscheinungen der Aufsenwelt, der Körper, der vor den Gegenständen und unabhängig von ihnen in unserer Vorstellung vorhanden, auf dessen Vorhandensein die Möglichkeit des Neben- und Auseinander der Körper beruht, ist der Raum.

Seine Eigenschaften sind: 1) Unbegrenztheit, die beim Raume selbst mit Unendlichkeit identisch ist;[2]) 2) Stetigkeit; 3) Gleichartigkeit.

---

[1]) Vergl. Bartholomäi, Zehn Vorlesungen etc.

p. 15: „Es ist nämlich noch nicht ausgemacht, ob die Vorstellung des allgemeinen Raumes existieren würde, wenn keine Dinge wären. Wir stellen uns, um hierüber Aufschlufs zu erhalten, eine von aller Welt isolierte Intelligenz vor. Diese sieht nichts, hört nichts, nimmt gar nichts wahr und hat nichts zu denken. Wie soll sie unter solchen Umständen das Leere wahrnehmen, anschauen oder ersinnen? . . . . Daher müssen wir es vorläufig als höchst zweifelhaft annehmen, den Raum als unendlich zu setzen und als Etwas zu fassen, das im Vorstellen bestehen würde ohne Dinge.“

[2]) Vergl. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Göttinger Abhandlungen 1868.)

„Bei der Ausdehnung der Raumkonstruktionen ins Unmefsbargrofse ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Mafsverhältnissen. Dafs der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aufsenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden, und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine gröfsere empirische Gewifsheit als irgend eine äufsere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs. —“

So scharfsinnig die Unterscheidung zwischen Unbegrenztheit und

Aus der Eigenschaft der Stetigkeit folgt unmittelbar diejenige der unbegrenzten Teilbarkeit, aus der der Gleichartigkeit diejenige der Kongruenz, unter welchem Begriff selbstverständlich nur die Möglichkeit des Zusammenfallens verstanden wird.[1])

Unendlichkeit erscheint, so tritt dieser Unterschied doch erst bei wirklich begrenzten Raumteilen, also z. B. bei Körpern in Evidenz; so ist im Riemannschen Sinne die Kugelfläche z. B. unbegrenzt, selbstverständlich aber nicht unendlich. Man sieht also, es kommt auf eine besondere Auffassung des Begriffes Unbegrenztheit hinaus, denn wir haben es doch in der That mit einem begrenzten Raumteil zu thun und die unbegrenzte Kugelfläche ist als Ganzes eine Grenze und zwar natürlich die Grenze eines begrenzten Körpers; unsere Vorstellung bezieht sich also in der That nicht mehr auf etwas Unbegrenztes, es kann also auch nicht von einer Unendlichkeit die Rede sein. Ganz etwas anderes ist es mit der Unbegrenztheit des Raumes, hier sind Unbegrenztheit und Unendlichkeit identisch. Auch Bartholomäi in seinen philosophischen Vorlesungen sagt: „Neben diesen (den Körpern) ist nun der unendliche Raum eine Thatsache; er ist wenigstens von den Mathematikern anerkannt." — Es sei übrigens nicht unerwähnt, daſs Unendlichkeit und Unbegrenztheit nach ihrer sprachlichen Verwandtschaft im Grunde genommen dasselbe bezeichnen. — Vergl. die Rezension von Becker, Abhandlungen etc. in H. Z. III. p. 385.

[1]) Es wird im Unterricht nicht überflüssig sein, auf diese Eigenschaften des Raumes noch näher einzugehen. So könnte man beispielsweise folgende Erklärungen dazu geben: Die Unendlichkeit ist die Ausgedehntheit nach allen Richtungen hin ohne Ende — wir können uns deshalb auch den Raum nicht etwa in einer bestimmten Form oder Gestalt denken, denn sonst würden wir eine Grenze (ein Ende) in unserer Vorstellung setzen (vergl. die vorhergehende Anmerkung); die Stetigkeit ist das lückenlose Vorhandensein des Raumes allüberall — im wesentlichen ist diese Eigenschaft mit der vorigen identisch und es wird daher gut sein, hierauf auch besonders hinzuweisen; die Gleichartigkeit sagt aus, daſs der Raum überall von gleicher Art sei — in gewisser Hinsicht wiederum dasselbe wie die Eigenschaft der Stetigkeit: überhaupt aber ein Begriff, der mit groſser Vorsicht zu behandeln ist, da er geeignet erscheint, Irrtümer zu erwecken. Mit Recht wird der Einwand gemacht werden können, daſs die Gleichartigkeit nur bei physikalischen Körpern, d. h. bei Körpern, die aus Stoff bestehen, vorhanden sein könne.

Man vergleiche zu der Bemerkung, daſs der Raum nicht in einer bestimmten Form gedacht werden dürfe, die Besprechung von Fahle, Leitfaden des mathematischen Unterrichts, durch Schwarz-Elmshorn in H. Z. II. p. 123:

„Ganz gewiſs ist jeder Körper ein begrenzter Raum — ist aber darum

Mit dieser Darstellung des Raumes und seiner Eigenschaften wird sich der Lehrer begnügen können und müssen, besonders im Anfangsunterricht, da ja das oberste Gesetz des geometrischen Elementarunterrichts dasjenige der Anschaulichkeit ist, also von einer Vorführung derjenigen Raumtheorien, die gerade in der Befreiung von der Anschaulichkeit ihre wesentliche Bedeutung sehen, abgesehen werden mufs, während andererseits eine genauere Untersuchung des Raumes als eines Begriffes erst in der Philosophie möglich ist und aus diesem Grunde ebenfalls nicht in den geometrischen Unterricht gehört.

Jedenfalls ist zu betonen, dafs der Raum nur als dreidimensionaler[1]) gelehrt wird und die logische Möglichkeit einer *n*fachen Mannigfaltigkeit des Raumes nicht einmal auch nur erwähnt wird.

Dem Prinzipe des vorliegenden Werkes gemäfs werden nun aus einer Reihe von Lehrbüchern Zitate gegeben werden, um einen Überblick über die verschiedenen Ansichten bezüglich des Begriffes Raum beziehentlich seine Darstellung im Unterricht zu gewähren, ohne dafs dabei auf Vollständigkeit ausgegangen wird, da selbstverständlich die rein philosophischen Werke aufser Beachtung gelassen werden müssen. Wenn zum Schlufs noch einige phil. Schriften erwähnt werden, so sind auch da nur einige herausgegriffen, die eigentlichen philos. Systeme sind als bekannt vorausgesetzt und als den Rahmen des vorliegenden Werkes überschreitend bei Seite gelassen. Jedoch hat sich Verfasser veranlafst gesehen, aus den Arbeiten, die sich mit dem Raume vom mathematischen Gesichtspunkte aus beschäftigen, noch einige ausführliche Zitate zu geben, um dem Leser auch über diese Bestrebungen die notwendige Kenntnis zu vermitteln.

---

umgekehrt der allgemeine Raum, weil die Vorstellung desselben sich erschliefst, wenn man die Grenzen des Körpers nach allen Seiten unbegrenzt hinausschiebt, auch als ein unbegrenzter Körper zu definieren?"

[1]) Auf den Unterschied zwischen Richtung und Dimension ist besonders zu achten. Während der Raum nach allen Richtungen ausgedehnt ist, wird er (oder vielmehr Teile desselben) nach nur drei Richtungen gemessen. Näheres hierüber bringt der Abschnitt „Dimension".

Die Eigenschaften, die allein gewöhnlich in den Elementarbüchern dem Raume zugesprochen werden, sind Stetigkeit und Unendlichkeit. Lehrbücher, in denen also dem Raume weiter keine Betrachtungen gewidmet werden, sollen unerwähnt bleiben.

Bartholomäi, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. — Jena 1860.[1])

Vorlesung 1. p. 11 ff. „Das Aufsereinander ist der Raum.

In diese durch die Dinge gegebene Bestimmung des Raumes greift ohne Weiteres der allgemeine unendliche Raum herein."

Nach einer Kritik der Kantschen Lehre heifst es weiter: „Der Raum ist zunächst das Aufsereinander, d. h. er wird gedacht bei getrennten Dingen, er ist also eine Form der Zusammenfassung. Die räumlich zusammengefafsten Dinge haben gar keine Gemeinschaft und keine Beziehung zu einander, diese wird ihnen vielmehr erst durch das zusammenfassende Denken geliehen."

Ferner: „. . . . Unendlich viele Distanzen werden mit einander verbunden in der Vorstellung; es bildet sich der Begriff des Körpers oder der Begriff dessen, das nach allen Richtungen Distanzen zeigt."

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung werden noch die Unendlichkeit des Raumes, seine Beziehung zu den Dingen — die als unzweifelhaft objektiv bezeichnet werden — und das Problem der Dimension berührt.

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

„. . . . Was der Raum selbst sei, in welchem alle unsere wirklichen und eingebildeten anschaulichen Vorstellungen sich befinden, und wie wir zu seiner Wahrnehmung und zur Kenntnis seiner Eigenschaften gelangen, dies sind Fragen, deren Beantwortung in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen würde, und die darum hier unerörtert bleiben können. Um so wichtiger ist es aber, genau festzustellen, welche Eigen-

[1]) Besprochen in Schl. Zeitschr. VI. p. 7.

schaften dem Raume a priori zugeschrieben werden müssen, damit alle Eigenschaften der räumlichen Vorstellungen als notwendige Konsequenzen derselben erscheinen."[1])

Es werden alsdann eine Reihe von Postulaten oder Axiomen aufgestellt — „wobei es gleichgültig ist, ob dieselben als Postulate der Vernunft oder des Anschauungsvermögens, also als transcendentale Wahrheiten, oder als Ergebnisse der Erfahrung und tief eingeprägter Angewöhnung aufgefafst werden —",[2]) von denen nur das erste als hier wesentlich angeführt werden soll: „Axiom I. Der Raum ist stetig, endlos, und von jedem Punkte aus nach allen Seiten auf gleiche Art ausgedehnt."

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. II. Geometrie. III. Buch.

„Der Raum, d. i. der Ort alles dessen, was wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, ist die notwendige Voraussetzung unserer anschaulichen Vorstellungen; er ist das, worin alles ausgedehnt ist, was wir als ausgedehnt wahrnehmen oder uns vorstellen. Dabei erscheint uns das im Raume ausgedehnte entweder als ein Teil des Raumes (der mathematische Körper), oder als einen Teil des Raumes ausfüllend (der physische Körper), oder als Grenze eines Raumteiles (Fläche), oder endlich als Teil oder Grenze einer solchen Grenze (Linie).

[1]) Man vergleiche mit diesen Ausführungen Beckers weiter unten zitiertes Schriftchen „Abhandlungen aus dem Grenzgebiet der Mathematik und Philosophie". Im wesentlichen decken sich die Ansichten Beckers mit denen des Verfassers, dafs also der Raum selbst im Unterricht als etwas Gegebenes zu behandeln sei und dafs es sich nur um eine Darstellung seiner Eigenschaften handeln dürfe.

[2]) Ja es dürfte wohl sogar im Unterricht gestattet sein, beides einfach zu identifizieren, da der Schüler doch wohl nicht im Stande ist, diese beiden Quellen der Erkenntnis von einander zu halten. Wenn Becker die Postulate des Anschauungsvermögens als Ergebnisse der Erfahrung oder tief eingeprägter Angewöhnung von den Postulaten der Vernunft unterscheidet, so mufs doch betont werden, dafs es sich hier um Erfahrungen handelt, die notwendige objektive Gültigkeit beanspruchen dürfen — d. h. also Erfahrung im Sinne wissenschaftlicher Erkenntnis —, weil sie resultieren aus subjektiven Bedingungen, denen alle Erscheinungen unterworfen sind.

Da alle Grenze im Raume vorgestellt werden mufs, setzen wir den Raum selbst als unbegrenzt oder grenzenlos voraus. Aus demselben Grunde erscheint er uns als stetig, d. h. als überall zusammenhängend."

Becker geht dann genauer auf den von Riemann eingeführten Begriff der „stetigen Mannigfaltigkeit" ein und untersucht an der Hand dieses Begriffes, „welche besonderen Eigenschaften den Raum von etwaigen anderen dreifach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeiten ausdehnungsloser Elemente (Punkte) unterscheiden."

Behl, Die Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. — Hildesheim 1886 —
stellt sich vollständig auf den Standpunkt Kants. Er sagt:

„Die Geometrie geht von der Voraussetzung eines unbegrenzten Raumes aus.[1]) Der Begriff „Raum" läfst sich schwer erklären, da er nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden kann, sondern aprioristisch im menschlichen Geiste liegt. Der Raum ist das nach allen Richtungen hin unendlich Ausgedehnte, aber an und für sich nichts Bestehendes oder Reelles, sondern nur eine Form für mögliche Beziehungen, demnach nur etwas Vorgestelltes; es ist die Form des äufseren Sinnes, durch den uns die Gegenstände als aufser uns und aufsereinander und nebeneinander existierend gegeben werden."

Brewer, Lehrb. d. Geom. u. eb. Trig. — Düsseldorf-Elberfeld 1822 —

---

[1]) Vergl. Bartholomäi a. a. O. p. 14:

„Auch die Frage liegt nahe, ob man nicht von dem unendlichen allgemeinen Raume ausgehen könne? Dafs es möglich ist, beweist die Erfahrung, denn man thut es fast allgemein, behauptet wenigstens es zu thun. Wir aber wollen von der Natur ausgehen. Diese zeigt uns Dinge und durch die Dinge die Räume, und der Raum ist nicht die Welt, sondern was den Raum erfüllt. Zweitens gelingt es nicht, aus dem unendlichen Raume, als einem bestimmt gegebenen Begriff, zur bestimmten Raumform zu gelangen. Die geometrischen Gebilde sind bei den geometrischen Schriftstellern thatsächlich nicht aus dem allgemeinen Raum abgeleitet, sondern aus einfachen Bestimmungen."

stellt sich auf den auch von mir für den Unterricht vertretenen Standpunkt durch die Anmerkung: „Die Geometrie nimmt den Raum als etwas Gegebenes an. Untersuchungen über die Möglichkeit oder das Wesen des Raumes gehören nicht in die Geometrie (soll wohl heifsen in ihre Behandlung auf der Schule? D. Verf.), sondern in denjenigen Teil der Philosophie, welcher Metaphysik genannt wird."

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.[1])

Aus diesem ausgezeichneten Werke[2]) können nur die kurzen Definitionen des Raumes und deren Folgerungen hier abgedruckt werden, im übrigen sei es zu eingehendem Studium empfohlen.

1) „Der Raum ist eine stetige Gröfse, deren Elemente durch drei unabhängige Variable eindeutig bestimmt sind und deren Krümmungsmafs den konstanten Wert Null besitzt."

2) „Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte, in sich selbst kongruente, ebene (unendliche) Mannigfaltigkeit."[3])

Diese Definitionen bestimmen zugleich das einfachste und vollständige System der Axiome unserer Raumvorstellung, da diese nichts anderes sind, als jene Merkmale selbst ausgedrückt in den Konstruktionsbegriffen der geometrischen Wissenschaft.

---

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXIII, p. 76.

[2]) Besonders wertvoll ist auch die reiche Litteraturangabe.

Bei dieser Gelegenheit will ich nochmals darauf hinweisen, dafs nach meiner Ansicht im Unterricht der Raum selbst ohne Erklärung bleibt und als a priori gegeben angesehen wird — und dafs ich die verschiedenen philosophischen und mathematischen Ansichten über den Raum hier nur zur Orientierung für den Lehrer wiedergebe, damit er über die Darstellung der Eigenschaften ein selbständiges Urteil sich bilden könne. (Es liefse sich allerdings erwägen, ob man vielleicht bei der Repetition der Geometrie in Prima das Raumproblem mit den Schülern diskursiv behandeln könnte.)

[3]) Die oben vom Verfasser dargestellten Eigenschaften des Raumes sind auch in diesen Definitionen enthalten. Dagegen enthalten sie andererseits auch schon die analytische Bestimmung des Raumes mittels dreier Variablen und den Begriff des Krümmungsmafses, die für den Unterricht durchaus nicht verwertbar sind, ebensowenig wie der Begriff r dreifach ausgedehnten, ebenen Mannigfaltigkeit.

Sie bestimmen jedoch noch mehr, als blofs diese Axiome selbst, denn sie machten es uns möglich, auch den Erfahrungsbedingungen nachzuspüren, welche die Natur unserer Kongruenzbeziehungen bedingen. Wir können diese Sätze als Postulate unserer Raumvorstellung bezeichnen. Das gesuchte System der Axiome und Postulate ist demnach das folgende:

Axiome der Geometrie Euklids.[1])

I. Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

II. Der Raum ist eine in sich kongruente Mannigfaltigkeit.

Postulate zum II. Axiom.

1) Es existieren in sich feste Körper.[2])

2) Die festen Körper sind vollkommen frei beweglich.

3) Die festen Körper verändern ihre Dimensionen durch eine Drehung um eine Rotationsaxe nicht.

III. Der Raum ist eine ebene oder unendliche Mannigfaltigkeit, d. h.

a) Zwischen zwei Punkten des Raumes ist nur eine gerade Linie möglich.

b) Die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks beträgt 2 Rechte.

Dieses Axiom, das der Anschauung nicht entnommen ist, und daher auch wohl allgemein nicht als Axiom anerkannt, sondern als Lehrsatz bewiesen wird, indem man es auf das Parallelenaxiom begründet, läfst sich noch in einer anderen Form aussprechen, die vielleicht dem menschlichen Geiste einleuchtender ist. Es deckt sich nämlich mit folgendem Satz:

Die Winkelsumme in den Polygonen ist konstant.[3])

Es mögen zu der vorliegenden Frage folgende Zitate ihre Stelle finden:

---

[1]) „Geometrie Euklids" ist hier im Gegensatz zu der allgemeinen oder absoluten Geometrie gesetzt.

[2]) Der mathematische Ausdruck würde angemessener lauten: starre Körper, da dieser Ausdruck schon ein gewisses Bürgerrecht erworben hat, resp. wir mit demselben eine bestimmte Vorstellung verbinden.

[3]) Es ist mir nicht bekannt, dafs von irgend einer Seite das Axiom in dieser Form ausgesprochen worden ist. Die Bedeutung der folgenden Ausführungen scheint mir aber nicht gering, wenn man den aufgestellten Satz als das Charakteristikum der Euklidschen Geometrie wählt.

Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Populär-wissenschaftliche Vorträge. Heft III.

p. 42: „Der Unterschied der Euklidischen, sphärischen und pseudosphärischen Geometrie beruht, wie oben bemerkt, auf dem Werte einer gewissen Konstante, welche Riemann das Krümmungsmafs des betreffenden Raumes nennt, und deren Wert gleich Null sein mufs, wenn die Axiome des Euklides gelten.[1]) Ist sie nicht gleich Null, so würden grofse Dreiecke von grofsem Flächeninhalte eine andere Winkelsumme haben müssen, als kleine, erstere im sphärischen Raume eine gröfsere, im pseudosphärischen eine kleinere. Ferner ist geometrische Ähnlichkeit grofser und kleiner Körper oder Figuren nur möglich im Euklidischen Raume."

p. 48: „Wir können deshalb auch nicht zugeben, dafs die Axiome unserer Geometrie in der gegebenen Form unseres Anschauungsvermögens begründet wären, oder mit einer solchen irgendwie zusammenhingen.

Anders ist es mit den drei Dimensionen des Raumes. Da alle unsere Mittel sinnlicher Anschauung sich nur auf einen Raum von drei Dimensionen erstrecken, und die vierte Dimension nicht blofs eine Abänderung von Vorhandenem, sondern etwas vollkommen Neues wäre, so befinden wir uns schon wegen unserer körperlichen Organisation in der absoluten Unmöglichkeit, uns eine Anschauungsweise einer vierten Dimension vorzustellen."

Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume.

„In der That wurden, zuerst wohl in den dreifsiger Jahren dieses Jahrhunderts, Zweifel an der Zuverlässigkeit des Euklidischen Axioms (nämlich dem Parallelenaxiom, dem berühmten

---

[1]) Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie.

p. 136: „Hier schien also ein indirekter Beweis gefunden, dafs der Satz von der Summe der Dreieckswinkel gleich zwei Rechten apriorisch nur deshalb unbeweisbar war, weil eben Verhältnisse vorliegen konnten, unter denen er thatsächlich nicht statt hatte."

11. des Euklid. D. Verf.) ausgesprochen. Bolyai und Lobatschewsky wiesen nach, dafs man auch dann eine widerspruchsfreie, aber von der Euklidischen verschiedene Geometrie konstruieren kann, wenn man den Satz, nach welchem die Summe der Winkel im ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, aufgiebt, von dem Legendre gezeigt hat, dafs er mit jenem Axiom äquivalent ist. Diese Geometrie, gegründet auf die Annahme, dafs die Winkelsumme irgend einen konstanten Wert unter 180° habe, wurde imaginäre, Nicht-Euklideische Geometrie genannt."

Hier liegt ein Irrtum vor; wenn die Winkelsumme von 180° verschieden angenommen wird, so kann sie nicht mehr konstant sein, sondern ändert sich mit den Mafsverhältnissen des Dreiecks. Dafs in der That, wenn die Winkelsumme konstant angenommen wird, diese Annahme zur Folge hat, dafs die Summe 180° beträgt, geht aus den folgenden Ausführungen des Verfassers hervor. Auch Helmholtz in dem vorhergehenden Zitat, wie Riemann in dem folgenden, erkennen die Richtigkeit dieses Satzes an.

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Abhandlungen XIII.

p. 146: „Nach diesen Untersuchungen über die Bestimmung der Mafsverhältnisse einer *n* fach ausgedehnten Gröfse lassen sich nun die Bedingungen angeben, welche zur Bestimmung der Mafsverhältnisse des Raumes hinreichend und notwendig sind, wenn Unabhängigkeit der Linien von der Lage und Darstellbarkeit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdrucke zweiten Grades, also Ebenheit in den kleinsten Teilen vorausgesetzt wird."

„Sie lassen sich erstens so ausdrücken, dafs das Krümmungsmafs in jedem Punkte in drei Flächenrichtungen $= 0$ ist, und es sind daher die Mafsverhältnisse des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich zwei Rechten ist."

„Setzt man aber zweitens, wie Euklid, nicht blofs eine von der Lage unabhängige Existenz der Linien, sondern auch der Körper voraus, so folgt, dafs das Krümmungsmafs allent-

halben konstant ist, und es ist dann in allen Dreiecken die Winkelsumme bestimmt, wenn sie in einem bestimmt ist."

Setzen wir den Satz: „Die Winkelsumme in den Polygonen ist konstant" an die Spitze, so ergiebt sich aus ihm, dafs die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, im Viereck vier Rechte, im Fünfeck sechs Rechte und so fort. Allerdings läfst sich, wie es scheint, nicht allgemein beweisen,[1]) dafs im nEck unter dieser Voraussetzung die Summe der Winkel $(n \cdot 2R - 4R)$ ist, aber ich hebe ausdrücklich hervor, dafs für die verschiedenen Vielecke sich die Übereinstimmung mit den bekannten Resultaten der Euklidischen Geometrie ergiebt, ohne dafs man nötig hat, auf das Dreieck zu rekurrieren. Ist aber dieses festgestellt, dafs das Dreieck nicht zum Beweise nötig ist, dann können wir den Satz bestimmter aussprechen, ohne dafs dadurch eine Einschränkung involviert wird:

Die Winkelsumme im Dreieck ist konstant.

Beweis für das Dreieck und Viereck:

Man teile das Dreieck durch eine Transversale T durch eine Ecke in zwei Dreiecke; die Summe der Winkel betrage im Dreieck x; dann ist

$$x(\text{von } ABC) = x(\text{von } ACD) + x(\text{von } BCD)$$

$- 2R$ (die Summe der Winkel an D) oder:

$$x = x + x - 2R.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x = 2R.$$

Man könnte auch von einem Punkte im Inneren nach den Ecken Gerade ziehen und so das Dreieck in drei Dreiecke zerlegen. Dann erhalten wir:

$$x(\text{von } ABC) = x(\text{von } AOC) + x(\text{von } BAC) + x(\text{von } ABC)$$

$- 4R$ (die Summe der Winkel um O) oder:

$$x = x + x + x - 4R.$$

Das Resultat ist dasselbe:

$$x = 2R.$$

[1]) Unter „allgemein" beweisen verstehe ich, dafs sich der Satz unabhängig vom Dreieck beweisen läfst, also direkt aus seiner Eigenschaft als nEck.

Das Viereck teile man durch eine Gerade in zwei Vierecke, so ist, wenn y die Winkelsumme im Viereck bedeutet:

$$y_{(ABCD)} = y_{(AEFD)} + y_{(EBCF)}$$

$- 2 \cdot 2R$ (die Winkel bei E u. F). Daraus ergiebt sich:

$$y = 2y - 4R.$$
$$y = 4R.$$

Oder man teilt das Viereck durch zwei Gerade in 4 Vierecke; die Winkelsumme der Vierecke wiederum $= y$ angenommen, ergiebt sich:

y (von ABC) $= y$ (von $AEOH$) $+ y$ (von $EOFB$) $+$
y (von $OFCG$) $+ y$ (von $GOHD$) $- 4R$ (den Winkeln um O)
$- 4 \cdot 2R$ (den Winkeln bei E, F, G, H). Hieraus ergiebt sich:

$$y = 4y - 12R$$
$$3y = 12R.$$
$$y = 4R.$$

Wir sehen also — was mir von besonderer Wichtigkeit zu sein scheint —, dafs sich der Beweis durchführen läfst, ohne dafs man das Dreieck dazu nötig hat.

Man vergleiche übrigens mit diesen Ausführungen: Frischauf, Absolute Geometrie, 5, 6 und 7.

Frischauf, Elemente d. Geom. — Graz 1870.

Der Ausgangspunkt[1]) der Geometrie ist der unbegrenzte (leergedachte) Raum; demselben wird die Eigenschaft der Stetigkeit, also auch der unbegrenzten Teilbarkeit zugedacht.

Kries, Lehrbuch der rein. Mathemat. II. Hauptteil. — Jena 1817.

Die Ausführungen sind zwar nicht gerade originell, jedoch

---

[1]) Vergl. weiter unten die Definitionen des Begriffes, was ist Geometrie. Ferner Kries (folg. Zitat 4).

wird in ihnen das Notwendigste in klarer Form gegeben, wie wir es selbst den Schülern zum Teil bieten können,[1]) so dafs ich glaubte, Kries' Darstellung nicht übergehen zu sollen:

1) Diejenigen Gröfsen, welche den Gegenstand der Geometrie ausmachen, sind mit dem Beinamen stetiger Gröfsen bezeichnet worden.[2])

2) Die Stetigkeit einer Gröfse besteht in dem ununterbrochenen Zusammenhang ihrer Teile. Das Zusammenhängen der Teile aber setzt voraus, dafs die Teile selbst aufser einander oder nebeneinander liegen. Beides zusammen, das Aufsereinanderliegen der Teile und ihr ununterbrochener Zusammenhang, giebt den Gröfsen eine Ausdehnung.

3) Ausgedehnte Gröfsen also machen, insofern sie ausgedehnt sind, den Gegenstand der Geometrie aus.

4) Abstrahieren wir an einem ausgedehnten Gegenstande von allem, was nicht zur blofsen Ausdehnung desselben gehört, so bleibt uns nur der Raum übrig, den er einnimmt. Die Ausdehnung also stellt sich uns als etwas Räumliches dar. Wir müssen daher den blofsen Raum als das eigentliche *Gebiet*[3]) der Geometrie ansehen.

5) Der Raum ist von den physischen Körpern in ihm ganz verschieden. Die letzteren erscheinen uns als etwas Zufälliges in ihm, das wir in Gedanken aus ihm hinwegnehmen können.[4]) Wenn sie also gleich, ihrer Ausdehnung wegen, geometrisch betrachtet werden können, so bestimmen sie doch nicht den Gegenstand der Geometrie, die ganz unabhängig von ihnen ist.

---

[1]) Falls man nicht der Ansicht des Verfassers beipflichtet, sondern eine Raumerklärung im Unterricht für nötig hält.

[2]) Vergl. Einleitung 4 zum Lehrbuch.

[3]) Nicht aber als den Gegenstand der Betrachtung.

[4]) Es ist nicht unwesentlich, auf die Verschiedenheit zwischen physischen und geometrischen Körpern in dieser Beziehung ganz besonders aufmerksam zu machen. Während wir von den sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften absehen, sie hinwegdenken können und dadurch aus dem physischen Körper den geometrischen erhalten, können wir nicht umgekehrt das Räumliche — die Ausdehnung — von dem Körper wegdenken und nur etwa Stoff, Farbe etc. als vorhanden ansehen. Auch im Unterricht wird der Hinweis hierauf von Nutzen sein.

6) Ebensowenig können wir den Ursprung unserer Vorstellung des Raums von den physischen Gegenständen in ihm ableiten, da der Raum weder eine Eigenschaft dieser Dinge ist, noch durch Zusammensetzung derselben erzeugt wird. Wir müssen also die Quelle jener Vorstellung, ebenso wie die der Vorstellung der Vielheit, in unserm Gemüt aufsuchen.

7) Wir können daher dem Raum Prädikate beilegen, die ihrer Natur nach nie aus der Erfahrung genommen sein können und doch die gröfste Gewifsheit haben, ja wovon wir uns das Gegenteil beim Raum gar nicht denken können — das sind die Prädikate der Stetigkeit und Unendlichkeit.[1])

8) Ebenso erkennen wir unmittelbar mit apodiktischer Gewifsheit, dafs der Raum drei verschiedene Abmessungen hat oder nach drei verschiedenen Richtungen ausgedehnt ist.[2])

Lesekamp, Elemente der Geometrie. — Kassel 1879.[3])

„Der Raum ist ununterbrochen (stetig, kontinuierlich), von unbegrenzter Ausdehnung und in allen seinen Teilen gleichartig."

Er fügt also zu den beiden bekannten Eigenschaften des Raumes noch diejenige an, dafs die Teile unter sich gleichartig sind, und macht dadurch den Raum zu einer mathematischen Gröfse.

Eduard Müller, Elemente der Geometrie.[4]) — Braunschweig 1869.

p. 1—8. 1) „Der Weltraum ist das, worin alles Sinnliche aufser und neben einander ist, und was zugleich in allem Sinnlichen aufser und neben einander ist."[5])

---

[1]) Ich möchte als drittes Prädikat hier noch einmal erwähnen: Durchdringlichkeit (Kongruenz). Raum kann aber nicht nur mit Raum kongruieren, sondern auch mit jedem physischen Körper.

[2]) Man vergleiche, was an anderen Stellen über die Unterscheidung von Richtungen und Abmessungen oder Dimensionen gesagt ist.

[3]) Besprochen in H. Z. XII. p. 120—121.

[4]) Ausführlich besprochen in H. Z. I. p. 323—382 durch Buchbinder-Schulpforta.

[5]) Siehe Nr. 7 des Kriesschen Lehrbuchs.

2) „Der Raum ist das In- und Aufser- und Nebeneinandersein, und das In- und Aufser- und Nebeneinanderseiende ist das Räumliche.“

Von den ausführlichen Bestimmungen und Untersuchungen des Raumbegriffs, die sich hieran anschliefsen, möge nur noch folgendes erwähnt werden und im Übrigen auf das ganze Werk als äufserst lesenswert mit Nachdruck hingewiesen werden.

3) „Der Raum ist extensiv und intensiv; er ist extensiv (ausgedehnt), heifst, er ist auseinander; er ist intensiv, heifst, er ist ineinander.“

4) „. . . . Je nachdem der leere, reine Raum noch in äufserer Existenz gedacht oder nur in Gedanken gesetzt wird, — in der Einbildung, Phantasie — ist der leere Raum entweder abstrakter (äufserer) oder ideeller (innerer).“

5) „Der abstrakte Raum ist nur ein einziger (ein Weltenraum); der ideelle kann willkürlich, beliebig oft gesetzt werden.“[1])

Es folgt sodann die Ableitung der drei Dimensionen des Raumes aus der subjektiven Anschauung der Menschen von den drei Gegenden des Weltraums: vorn — hinten, rechts — links, oben — unten.[2])

Johannes Müller, Lehrbuch der allgemeinen Planimetrie. — Bremen 1870.

„Die Vorstellung des allgemeinen Raumes ist unveränderlich.“

„Der Raum hat zwei Haupteigenschaften, erstens er hat Ausdehnung, d. h. er gewährt die Möglichkeit der Bewegung,[3])

---

[1]) Daraus geht hervor, dafs das Gebiet der Geometrie der ideelle (innere) Raum ist. (Um Mifsverständnissen vorzubeugen, sei also ausdrücklich erwähnt, dafs die Einheit des Raums von der willkürlichen, beliebig häufigen Setzung unberührt bleibt.)

[2]) Aus dieser subjektiven Herleitung der drei Dimensionen mufs die objektive Gültigkeit (Realität) derselben geschlossen werden. — Man vergleiche Kants Abhandlung: Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.

[3]) Hier finden wir also zuerst ein mechanisches Moment in die reine Geometrie hineingetragen, und zwar schon beim ersten Begriff, dem-

und er hat diese Eigenschaft im höchsten Grade, d. h. er ist nach jeder Richtung unendlich ausgedehnt (man kann sich die Bewegung in jeder Richtung ohne Aufhören fortgesetzt denken)."

„Zweitens hat der Raum Teilbarkeit, d. h. es ist möglich, sich im allgemeinen Raume besondere Räume (Örter) zu denken, denen die Ausdehnung nicht mehr im höchsten, sondern in einem irgendwie beschränkten Grade zukommt. Auch die Teilbarkeit hat der Raum im höchsten Grade, d. h. er ist in jeder Richtung unendlich teilbar."

Nagel, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Ulm 1873.

Nagel geht vom Körper aus, eine originelle, aber wenig glückliche Betrachtungsweise, die auch den jetzt allgemein geltenden Prinzipien der Behandlung der Grundbegriffe widerspricht.

1) „Ein Körper ist eine Gröfse, welche nach drei Richtungen ausgedehnt ist,[1]) oder drei Dimensionen hat, Länge, Breite und Höhe."

„Denkt man sich diese Ausdehnungen bis ins Unendliche fortgehend, so erhält man den unendlichen Raum; denkt man sie sich aber begrenzt, so erhält man einen Raumteil, oder Körper im engeren Sinne."

Wir haben es hier offenbar mit einem circulus zu thun, vom Körper zum Raum und vom Raum zum Körper. Diese Erklärung hat jedenfalls bedeutende Schwächen.

Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. — Leipzig 1887.[2])

---

jenigen des Raumes. Da die Geometrie ohne den Begriff der Bewegung auf ihre natürlichsten und fruchtbarsten Betrachtungen, die anschaulichen, verzichten müfste, so ist es nicht ungeschickt, denselben so zeitig als möglich mit den geometrischen Begriffen zu verflechten.

[1]) Die Verwechslung von ausgedehnt sein und gemessen werden kehrt auch hier wieder. Der Körper ist nach allen Richtungen ausgedehnt; er wird nach drei Richtungen gemessen. Es ist jedenfalls besser, in dem letzteren Falle ganz konsequent statt des Wortes „Richtung" die Worte „Dimension" oder „Abmessung" zu gebrauchen, um ein für allemal Mifsverständnissen vorzubeugen.

[2]) Dieses ausgezeichnete Werk, auf das ich schon in der Einleitung

Rausenberger stellt den Raumbegriff unter diejenigen, die keiner Erklärung bedürfen resp. die für die Elementargeometrie a priori gegeben sind.

„Sämtliche Gegenstände der Anschauung erscheinen uns in der Form des Raumes; weitere Erörterungen darüber, was der Raum sei, würden sich nur im Zirkel bewegen und den Begriff nicht klarer machen;[1]) wir müssen voraussetzen, dafs jeder Mensch, der überhaupt an die Beschäftigung mit der Geometrie herantritt, mit dem Worte Raum eine bestimmte Vorstellung verbindet."

Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mafses etc. — Leipzig 1874.[2])

Die Definition Schlömilchs bietet zwar nichts Originelles, soll aber mitgeteilt werden,[3]) da sie das Bekannte in klarer Form vollständig giebt:

„Vorausgesetzt wird, dafs man die Grundeigenschaften[4]) des Raumes bereits kenne; diese sind:

1) Ausdehnung nach den drei verschiedenen Richtungen[5]) der Länge, der Breite und der Höhe (Dicke oder Tiefe),

---

aufmerksam gemacht, kann den Lesern ganz besonders empfohlen werden. Eine Rezension des Werkes findet sich in Hoffmanns Zeitschrift, XX, p. 517—521. Es heifst darin: „Ohne Zweifel hat er (der Verf.) ein gutes Buch geschrieben, mit welchem ein Fortschritt zum Bessern gemacht ist, und welches von ähnlichen Arbeiten sich vorteilhaft abhebt .... Die reichhaltigen Litteraturangaben .... machen das Werk besonders wertvoll, das wir dem mathematisch gebildeten Publikum hiermit warm empfohlen haben möchten."

[1]) Ich kann mich leider hier mit Rausenberger nicht völlig einverstanden erklären, vorausgesetzt, dafs ich den Sinn dieser Stelle richtig aufgefafst habe. Es scheint, als wenn jede Erörterung des Raumbegriffs als unnütz, ja womöglich schädlich zurückgewiesen wird. Das ist doch wohl zu weit gegangen.

[2]) Eine neuere Auflage (die 7.) ist 1888 erschienen; die Seitenzahl ist unverändert. — Vergl. H. Z. VI. p. 160—166.

[3]) Vergl. Kries weiter oben.

[4]) Schlömilch vermeidet es also auch auf das Wesen des Raumes einzugehen und giebt nur seine Eigenschaften.

[5]) Vergl. die Bemerkung zu Nagels Geometrie.

welche man die drei Dimensionen des Raumes zu nennen pflegt;

2) Unendlichkeit, so dafs also die Möglichkeit räumlicher Gegenstände nirgends aufhört;

3) Stetigkeit (Kontinuität), derzufolge an keiner Stelle eine Unterbrechung des Raumes vorhanden ist;[1])

4) Gleichartigkeit aller Teile des Raumes, vermöge welcher verschiedene Räume als Teile eines und desselben unendlichen Raumes angesehen werden können.

Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857.

„Der Raum als Ganzes betrachtet ist nicht Gegenstand der Geometrie.[2]) Derselbe bildet nur die Sphäre, innerhalb deren die Geometrie sich bewegt. . . . . Für die Zwecke der Geometrie genügt es, sich an dem Raum als Ganzem, oder von dem Raum überhaupt folgende Eigenschaften zu vergegenwärtigen, von denen vorausgesetzt wird, dafs wir sie als mit der Vorstellung einer räumlichen Ausdehnung unmittelbar und notwendig verbunden denken müssen.[3]) Erstens: Der Raum ist unendlich (weil die räumliche Ausdehnung in sich selbst keinen Abschlufs und keine Grenze hat).

Zweitens: Der Raum ist stetig oder kontinuierlich oder lückenlos (weil dasjenige, was die Teile des Raumes trennt, wiederum Raum ist).

Drittens: Der Raum ist teilbar und zwar teilbar ins Unendliche (folgt aus 1).

---

[1]) Die Form, in der hier die Eigenschaften der Unendlichkeit und der Stetigkeit gegeben sind, läfst den Zusammenhang zwischen beiden, auf den ich oben hingewiesen, deutlich erkennen.

[2]) Vergl. Frischauf a. a. O. u. Kries a. a. O. 4.

[3]) Snell sieht also den Raum mit seinen Eigenschaften als a priori gegeben an. Hervorzuheben ist, dafs Snell die allseitige Ausdehnung des Raumes als eine besondere Eigenschaft aufstellt und sie nicht, wie üblich, mit der Unendlichkeit einfach identifiziert. Jedenfalls ist ohne die Eigenschaft der allseitigen Ausdehnung diejenige der Unendlichkeit unmöglich, weil wir ja sonst nach irgend einer Seite hin eine Grenze haben würden. Die Unendlichkeit ist durch die allseitige Ausdehnung bedingt, ohne dafs auch das Umgekehrte der Fall ist.

Viertens: Der Raum ist sowohl der Zahl als seiner inneren Wesenheit nach nur Einer.[1])

Fünftens: Die Ausdehnung des Raumes ist eine allseitige, oder der Raum ist ausgedehnt nach allen Richtungen.

Sonnenburg, Lehrbuch der gesamten Elementar-Geometrie. — Bremen 1868.

Der Raum ist formlose[2]) Ausdehnung nach allen Richtungen (nach Länge, Breite und Höhe oder Tiefe) in's Unendliche hin.

Der Raum ist das Nebeneinandersein[3]) oder der Raum ist stetig oder kontinuierlich, d. h. man kann in ihm willkürlich gewisse Abschnitte machen oder Teile unterscheiden, die aber alle so zusammenhängen, dafs da, wo der eine aufhört, gleich der andere anfängt, oder wo der eine Teil immer in den andern übergeht."

Worpitzky, Elemente der Geometrie. — Berlin 1871.

„Der Raum ist die Abstraktion von den beobachteten einzelnen Körpern auf einen Körper, welcher die durch die Sinne gegebenen Körper sämtlich als Teile enthält."[4])

---

[1]) Vergl. E. Müller a. a. O. 5 und meine Anmerkung. Es ist die Eigenschaft gemeint, die sonst Gleichartigkeit genannt wird.

[2]) Dafs der Begriff der Form mit dem des Raumes nicht vereinigt werden könne, ist auch von mir hervorgehoben worden und aus dem Wesen der Unendlichkeit begründet worden. Streng genommen enthalten sich die Begriffe gegenseitig; was keine Form hat, kann keine Grenzen haben, ist also unendlich (vergl. weiter oben meine Bemerkungen zu Riemanns Auseinandersetzungen); was unendlich ist, kann keine Form (Gestalt) haben, sonst hätte es Grenzen.

[3]) Das Nebeneinandersein bezieht sich hier nicht auf das Raumerfüllende — sonst hätte es auch besser heifsen müssen: die Möglichkeit des Nebeneinanderseins —, sondern auf den Raum selbst.

[4]) Zweierlei ist es, was dieser Definition entgegensteht: Einmal wird dadurch der Raum zu einem rein empirischen, aus der Beobachtung der sinnlich wahrnehmbaren Körper genommenen Begriff; dann aber scheint die Bezeichnung desselben als Körper ganz besonders unglücklich gewählt, da der Irrtum dadurch hervorgerufen wird, als sei der Raum etwas Begrenztes.

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

„Dasjenige, in welchem wir uns befinden, nennen wir den Raum (Weltraum). Denken wir uns alle Gegenstände aus demselben entfernt, so bleibt der leere oder absolute Raum, oder die Raumform übrig.[1])

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

„Dem Raume wird Unendlichkeit, Stetigkeit (Kontinuität) und Gleichartigkeit beigelegt; also in Absicht auf die Möglichkeit der räumlichen Gegenstände findet keine Grenze, in Absicht auf die Folge der räumlichen Teile keine Unterbrechung, und in Absicht auf die Beschaffenheit der Teile des Raumes keine Verschiedenheit statt."[2])

Es handelt sich in den angeführten Zitaten, wie man erkennt, im wesentlichen um die Darstellung der Eigenschaften des Raumes, weniger um die Definition des Raumbegriffs selbst, entsprechend dem Zwecke der angezogenen Werke. Über den Raumbegriff selbst vergleiche man noch folgende Werke (vergl. die Anm. zu Erdmann, Axiome):

Cohen, Kants Kritik der Erfahrung. — Berlin 1885.

Du Bois-Reymond, Reden. I. Folge. Vortrag VI „Über die Grenzen des Naturerkennens".

Gino Loria, Die hauptsächlichsten Theorieen der Geometrie, übersetzt von Schütte. — Leipzig 1888.

Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge. III. Heft. Vortrag II „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome".

Wundt, System der Philosophie. — Leipzig 1889.

Wundt, Logik. — Leipzig 1883.

Zöllner, Über die Natur der Kometen.

Dühring, Krit. Geschichte der allgem. Prinzipien der Mechanik.

Ferner ist zu vergleichen die schon oben erwähnte reich-

---

[1]) Offenbar im Kantschen Sinne: Form unserer äußeren Wahrnehmung.

[2]) Ich möchte diese kurze Darstellung als besonders gelungen hervorheben.

haltige Litteratur, die sich in Erdmann, Die Axiome der Geometrie, angegeben findet.

Von Programmen, die mir zu Gebote standen, ist an dieser Stelle eins erwähnenswert.

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887.

In dieser Abhandlung wird der Untersuchung des Raumes ein weites Feld eingeräumt. Die Beziehungen von Raum und Zeit, von Raum und Aufsenwelt, leerem Raum und raumerfüllendem Etwas (Materie) werden untersucht.

„Der Raum tritt uns durchaus als ein geschlossenes Ganzes gegenüber, die Materie dagegen als eine Gesamtheit einzelner Teile . . .“[1])

„Der Raum ist vollständig widerstandslos ohne äufsere und innere Grenzen, d. h. überall gleichartig, lückenlos, unbegrenzt ausgedehnt.“[2])

Klügels Wörterbuch giebt folgende Erklärung:

„Raum ist die unbegrenzte, blofs im Verstande gedachte, nach allen Richtungen hin sich erstreckende Ausdehnung, worin der Geometer nach Belieben, uneingeschränkt seine Linien ziehen und seine Flächen ausbreiten kann.“

Es wird dann sofort auf die Bestimmung eines Punktes durch seine drei Koordinaten eingegangen und der physische Raum mit dem „Raum an sich“ verglichen. Es heifst dann:

„Leibnitz nannte diesen physischen Raum sehr passend die Ordnung der nebeneinander befindlichen Dinge.“

Grunerts Archiv. 49. p. 180. L. v. Pfeil.

„Der Raum ist ein einfacher Begriff. Länge, Breite

---

[1]) Daraus würden die Eigenschaften der Stetigkeit und Gleichartigkeit unmittelbar zu folgern sein. Die Hervorhebung der Einheit des Raumes gegenüber der Gesamtheit einzelner Teile bei materiellen Gegenständen erscheint besonders glücklich.

[2]) Die Eigenschaft widerstandslos zu sein haben wir als „Durchdringlichkeit“ bezeichnet. Aus ihr folgt die Kongruenz. Man vergleiche übrigens die Zitate aus Wernickes Programm, die beim Körper (also in Kapitel III) angeführt sind.

und Dicke sind ebenfalls einfache Begriffe. Ebenso ist der Ort eines Dinges ein einfacher Begriff."[1])

Hieran mögen sich noch folgende Zitate schliefsen:

Helmholtz, Pop. wiss. Vorträge III. 2. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.

p. 25: „Aufserdem sprechen die geometrischen Axiome Sätze aus, welche die Anzahl der Dimensionen sowohl des Raumes als seiner Flächen, Linien, Punkte bestimmen und den Begriff der Kontinuität dieser Gebilde erläutern, wie die Sätze, dafs die Grenze eines Körpers eine Fläche, die einer Fläche eine Linie, die einer Linie ein Punkt, und der Punkt unteilbar ist, und die Sätze, dafs durch Bewegung eines Punktes eine Linie, durch Bewegung einer Linie eine Linie oder Fläche, durch die einer Fläche eine Fläche oder ein Körper, durch Bewegung eines Körpers aber immer nur wieder ein Körper beschrieben werde."

p. 36: „Somit ist also der uns bekannte Raum, in dem wir leben, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, eine Fläche eine zweifache, eine Linie eine einfache."

„Die Zahl der Abmessungen, welche nötig ist um die Lage eines Punktes zu geben, ist gleich der Anzahl der Dimensionen des betreffenden Raumes. In einer Linie genügt der Abstand von einem festen Punkte, also eine Gröfse;[2]) in einer Fläche mufs man schon die Abstände von zwei festen Punkten angeben, im Raume von dreien, um die Lage des Punktes zu fixieren."

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„Da eine Form weiter nichts ist, als ein auf bestimmte

---

[1]) Ort ist hier in dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, nicht in dem geometrischen verstanden: die Stelle, wo sich ein Ding befindet, nicht die Stelle, wo es sich befinden kann.

[2]) Das stimmt nicht, sondern in der Linie sind zwei feste Punkte erforderlich, oder ein Punkt und eine Richtung, also zwei Bestimmungsstücke. Analoges gilt für Fläche und Raum.

Weise begrenzter Raum, so mufs sie auch die allgemeinen Eigenschaften des Raumes besitzen. Nun ist aber der Raum:

1) in allen seinen Teilen durchaus gleichartig, oder homogen;

2) in allen seinen Teilen ununterbrochen zusammenhängend, oder stetig;

3) in jede beliebige Anzahl von Teilen zerlegbar, oder unbeschränkt teilbar;

4) in seiner Ausdehnung nach allen Seiten hin ohne Grenzen, oder unbegrenzt grofs;[1])

folglich mufs auch jede Form ein homogenes, stetiges, unbeschränkt teilbares und in jeder beliebigen Gröfse denkbares Ganze sein.

Der Raum dehnt sich ferner nach drei Richtungen hin aus, nämlich nach Länge, Breite und Dicke.“

Crelle, Über Parallelen-Theorieen etc. — Berlin 1816.

„Vorstellung heifst, was die Dinge dem Verstande sind.“

„Erste Vorstellung heifst, die auf keine andere sich bezieht.“

„Erste Vorstellungen für die Geometrie sind Raum, Ort, Lage, Menge.“

V. Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889.

„Wir sehen aber auch, wie bei allen diesen Fortschritten die Geometrie in einer bestimmten Hinsicht den Charakter einer Erfahrungswissenschaft bewahrt. Wenn sie auch längst über das in ihrem Namen liegende beschränkte Ziel, die Thatsachen der Ebene zu erforschen, hinausgegangen war und den Raum in den Kreis ihrer Betrachtung gezogen hatte, unseren Weltraum mit der Fülle der in ihm teils wirklich existieren-

---

[1]) Dafs man bei dem Begriffe der Unbegrenztheit eine gewisse Vorsicht walten lassen müsse, geht aus Riemanns Habilitationsschrift hervor. Man vergleiche die Anmerkung auf Seite 120. Es wird sich danach immer empfehlen, die Identität von Unbegrenztheit und Unendlichkeit beim Raume ausdrücklich hervorzuheben.

den, teils gedachten körperlichen Gebilde: aus diesem a priori gegebenen Gebiete war sie nie herausgekommen .... Auch die philosophischen Spekulationen und wechselnden Ansichten über das Wesen dieses Weltraums hatten auf die Richtung und den Charakter der geometrischen Forschung keinen Einfluſs gehabt; aus der Erfahrung nahm man die Grundlage der Geometrie, in dem Erfahrungsraume vollzogen sich ihre Operationen, entstanden und blieben ihre Gebilde."[1])

Nachdem Schlegel sodann die Ausdrücke „vierte Dimension des Raumes" und „vierdimensionaler Raum" beleuchtet und ersteren als ein Unding und als auf einem Miſsverständnisse beruhend zurückgewiesen, sagt er: „Dieser 'vierdimensionale Raum' ist also ein reines Produkt mathematischer Spekulation, dient nur mathematischen Zwecken, und um die Frage nach seiner etwaigen wirklichen Existenz kümmert sich kein Mathematiker."[2])

---

[1]) Schlegel definiert den Raum als einen a priori gegebenen, d. h. also als einen vor aller Erfahrung und von dieser unabhängig bestehenden Begriff. In einem scheinbaren Widerspruch damit scheint es zu stehen, wenn es dann heiſst, aus der Erfahrung nahm man die Grundlagen der Geometrie; jedoch findet dieses sofort seine Erklärung in dem folgenden: „in dem Erfahrungsraume vollzogen sich ihre Operationen", d. h. die Übertragung der im „Raume a priori" geltenden Sätze und Konstruktionen auf den „Weltraum unserer Erfahrung" stieſs nirgends auf eine Schwierigkeit oder einen Widerspruch; überall entsprachen die Verhältnisse der Erfahrungswelt derjenigen der geometrischen Gebilde.

[2]) An einer späteren Stelle derselben Abhandlung sagt Schlegel: „Aber so einfach auch für das abstrakte Denken der Fortschritt in den vierdimensionalen Raum sich oft gestaltet, immer wieder macht sich der Mangel an Anschaulichkeit bei allen Begriffen und Sätzen, welche diesen Raum betreffen, auf das Störendste geltend, und selbst geübte Forscher sind Irrtümern aus diesem Anlaſs nicht entgangen. Man hat daher auch nach verschiedenen Richtungen überlegt, wie wohl diesem Mangel abzuhelfen sei. Die gründlichste Abhilfe wäre freilich die, daſs es uns gelänge, unsere geometrische Vorstellungskraft in der Weise auszubilden, daſs es uns möglich würde, vierdimensionale Gebilde uns im Geiste ebenso vorzustellen, wie es mit den dreidimensionalen Gebilden der Fall ist." „Es ist aber leicht einzusehen, daſs dieser Gedanke gänzlich hoffnungslos ist." „Es ist daher auch dem Geiste unmöglich, sich irgend welche Vorstellungen auf diesem Gebiete zu bilden .... wir können uns nur solche Gegenstände und Gebilde vorstellen, von denen

Es wird sodann ausgeführt, wie man von der „Nicht-Euklidischen“ Geometrie ausgehend auch zu dem Gedanken kam, den ebenen Raum als einen Spezialfall, nämlich von der Krümmung Null, anzusehen, einer allgemeinen Gattung gegenüber, die von beliebiger von Null verschiedener positiver oder negativer Krümmung sei.

„Selbstverständlich verzichtete man hier von vornherein auf jeden Versuch, einen derartigen Raum wirklich aufzufinden; auch war man in der Erkenntnis der Bedeutung der abstrakten Geometrie schon weit genug vorgeschritten, um diese Räume nicht deshalb als widersinnige Denkprodukte zu verwerfen, weil unsere Erfahrung über die Existenz eines einzigen krümmungslosen Raumes (resp. von der Krümmung Null) uns verbot, diese Räume als wirklich existierend anzusehen. Dieselben waren eben Produkte mathematischer Überlegung, wie tausend andere geometrische Gebilde, nur daſs sie der Anschaulichkeit entbehrten.“ [1])

Das gemeinsame Gebiet dieser drei Arten des dreidimensionalen Raumes [2]) ist nun der vierdimensionale Raum von der Krümmung Null. Analog kann dieser abstrakte Prozeſs der Raumbildung auf Räume von beliebig vielen Dimensionen führen.

Die Ausdehnung des Raumbegriffs auf mehr als drei Dimensionen aus der Betrachtung der geometrischen Bedeutung von den höheren Potenzen oder von den Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten wird alsdann erwähnt.

Ich muſs auf diese Vergleichung von arithmetischen und

---

wir, wenn wir sie nicht schon gesehen haben, doch wenigstens begreifen, daſs wir sie sehen könnten.“

Man vergleiche hierzu die Ausführungen des Kapitel III.

[1]) Hier tritt Schlegel in einen gewissen Widerspruch mit seinen Ansichten, die in der vorhergehenden Anmerkung zitiert sind: danach sind die Nicht-Euklidischen (unebenen) Räume nicht Gebilde „wie tausend andere geometrische Gebilde“, denn es fehlt ihnen gegenüber eben an der Möglichkeit, sie vorzustellen oder überhaupt ihre Vorstellbarkeit zu begreifen. Deshalb ist diesen Räumen auch jede Existenz, auſser der logischen abzusprechen.

[2]) Von denen also nur derjenigen Art, die die Krümmung Null hat, eine reale Existenz zukommt.

geometrischen Mannigfaltigkeiten und die daraus gezogenen Folgerungen näher eingehen, da es sich hier — meines Erachtens — um einen verhängnisvollen Grundirrtum handelt. Schlegel sagt: „Neben den Betrachtungsweisen der Nichteuklidischen Geometrie boten sich aber auch noch andere Wege, um zu einer Ausdehnung des Raumbegriffs auf mehr als drei Dimensionen zu gelangen. Namentlich hätte die von altersher bekannte und seit Descartes zur Auffindung neuer Wahrheiten planmäfsig ausgenutzte Anwendung des Zahl- und Mafsbegriffes auf die Geometrie schon längst zur Ausführung jener Verallgemeinerung führen können, wenn nur irgend eine zwingende Veranlassung sich geboten hätte. Bedenkt man nämlich, dafs eine einfache Zahl a die Länge einer gemessenen Strecke darstellt, die zweite Potenz dieser Zahl, a^2, den Flächeninhalt des über der Strecke a als Seite errichteten Quadrats, und die dritte Potenz a^3 den Rauminhalt des über diesem Quadrate als Grundfläche konstruierten Würfels, so entsteht naturgemäfs die Frage nach der geometrischen Bedeutung der folgenden Potenzen a^4, a^5 u. s. w., und man sieht leicht, dafs diese Gröfsen die Resultate der einfachsten Inhaltsbestimmungen in den Räumen mit 4, 5 und mehr Dimensionen sind, sobald man sich nur entschliefst, diesen Räumen und den für sie geltenden Geometrieen das Bürgerrecht in der Geometrie zu gewähren, trotzdem dafs die Anschauung uns hier überall in Stich läfst.“

Diese Erklärung der mehrdimensionalen Räume als eine Folge der geometrischen Analogie mit den Potenzen von höheren Exponenten ist aber auf eine Verkennung der eigentlichen Vergleichspunkte, welche Arithmetrik und Geometrie für diese Fragen zeigen, zurückzuführen.

Die Bedeutung eines Produktes ist in der Geometrie nach einer ursprünglich willkürlichen Fortsetzung die eines Rechtecks,[1]) indem man die Faktoren als Mafszahlen von Strecken

[1]) Vergleiche A. Thaer in Rethwischs Jahresberichten. II. Jahrgang. — B. 199.

„Wenn man von einem ‘Produkt zweier Strecken’ spricht, so ist das eine gewaltsame Übertragung eines arithmetischen Ausdrucks auf die Geometrie .... Man wird nämlich finden, dafs der übliche Begriff

ansieht und diese Strecken als die Seiten des Rechtecks. Ein Produkt von drei Faktoren betrachtet man dann als den arithmetischen Ausdruck eines Parallelepipeds. Durch die einfache Vermehrung der Faktoren ist aber in der Arithmetik gar kein Schritt weiter gemacht worden und es ist daher nicht angemessen, bei der geometrischen Deutung von der Fläche zum Körper überzugehen. Auch würde es schwer sein, wenn man die Potenzbetrachtung zum Grunde legt und nur nach einer geometrischen Deutung für die Veränderung der Exponenten sucht, für a^0 und ferner für die Potenzen mit negativen Exponenten eine Analogie zu finden. Und doch sind diese Potenzen nicht weniger berechtigt, geometrisch gedeutet zu werden, als die Potenzen mit positiven Exponenten, wenn man von der Betrachtung der Potenzen ausgeht.

Dieser Ausgangspunkt der Vergleichung von arithmetischen und geometrischen Dimensionen ist nun von vornherein falsch gewählt. Die Vergleichung darf nicht erst bei der Betrachtung der Potenzen beginnen, sondern hat sich naturgemäfs an die drei Stufen der arithmetischen Rechenoperationen zu halten.

Der ersten Stufe des Rechnens, der Addition, entspricht die einfache Ausdehnung nach der Länge;

der zweiten Stufe, der Multiplikation, die zweifache Ausdehnung nach Länge und Breite;

der dritten Stufe, der Potenzierung, die dreifache Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe.

Das Resultat der Addition, die Summe, findet ihre geometrische Deutung in der Linie;

das Produkt in der Fläche;

die Potenz in dem Körper.

Während nun aus der Gleichheit der Summanden das Produkt, aus der Gleichheit der Faktoren die Potenz entsteht und sich auf diese Weise die drei Stufen der arithmetischen Operationen entwickeln, resultiert aus der Vermehrung der Exponenten und der Gleichsetzung von Basis und Exponenten

'Produkt' hierfür zu eng ist und dafs man entweder hier die Erweiterung eintreten lassen oder die Kronecker'schen Produkte benannter Zahlen zu Grunde legen mufs."

keine weitere Stufe des Rechnens. In Analogie hiermit kann man die Erzeugung geometrischer Gebilde durch Bewegung setzen. Entsprechend dem Stillstand der Rechnung bei der Potenzierung ergiebt sich nichts Neues durch die Bewegung des Körpers.

Mit der Aufstellung mehrdimensionaler Räume hat man also nicht arithmetische Ausdrücke geometrisch gedeutet, sondern wir würden umgekehrt nun die den mehrdimensionalen Räumen entsprechenden Rechenoperationen aufzusuchen haben.

Nach eingehenden Erörterungen über die Möglichkeit vierdimensionaler Geometrie (bes. mit Hilfe der Projektion auf unsern bekannten Raum) sagt Schlegel:

„Diese „Zukunftsgeometrie" wird allerdings mangels jeder Anwendbarkeit auf Verhältnisse der Wirklichkeit niemals die Wichtigkeit und Bedeutung der Geometrie der Ebene und des Raumes erlangen und auch in ihrer Eigenschaft als formales Bildungsmittel unseren Schulen fernbleiben."[1])

J. Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume.[2]) — Breslau 1871.

„Das Material[3]) der Geometrie ist der Raum, und die Frage nach dem Begriffe und Wesen desselben hat wohl zu allen Zeiten die Mathematiker beschäftigt, aber sie wurde mehr in Bezug auf die allgemeine Weltanschauung studiert; vereint mit den Philosophen, mit welchen sie in der Person grofsenteils zusammenfielen, suchten sie wohl eine Vorstellung hierüber zu gewinnen, aber die Geometrie als Wissenschaft galt kaum für abhängig von der jeweiligen Art derselben."

„In neuerer Zeit ist man wohl überwiegend zu der von Helmholtz sogenannten empiristischen Theorie übergegangen, zu welcher sich schon frühzeitig Gaufs bekannt

[1]) Dies wird wohl von keiner Seite bestritten werden. Selbst bei einer diskursiven Behandlung des Raumproblems, wie sie vielleicht in Prima gelegentlich der Repetition der Anfangsgründe als möglich gedacht werden könnte, würde auf eine Erörterung der mehrdimensionalen Räume zu verzichten sein.

[2]) Vergl. die Besprechung in H. Z. III. p. 387.

[3]) Ich kann diesen Ausdruck für keinen besonders glücklichen halten.

haben soll, wonach man im Raume nichts als einen von der Empirie abstrahierten Begriff zu sehen habe, eine Ansicht, welche schon vor Kant insbesondere bei dem englischen Sensualisten Locke auftritt.

Auf diese Weise war aber die Frage nach dem Begriffe des Raumes und seinen ursprünglich aus unserer Anschauung entnommenen Eigentümlichkeiten mehr Gegenstand der auf das Wesen unserer Gesamt-Erkenntnis gerichteten Spekulation, keineswegs aber als von Einfluſs auf die Gewiſsheit der Geometrie angesehen."

Alsdann führt Rosanes Riemanns Arbeit an und ihre wesentlichen Resultate, wobei folgende Bemerkungen nicht ohne Bedeutung erscheinen:

„Doch darf . . . die Ausdrucksweise 'mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit' nicht verleiten, bei dem allgemeinen Begriffe immer an Gegenstände der Anschauung zu denken; vielmehr ist die äuſserste Abstraktion von der letzteren die Hauptsache bei der allgemeinen Untersuchung."

„Überhaupt repräsentiert jede beliebige Linie eine einfach, jede beliebige Fläche eine zweifach, der Raum eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit."

„Das Element, bei Anwendung auf Raumgröſsen der Punkt, ist jedesmal durch so viele Bestimmungen (Zahlengröſsen) definiert, wie die Vielfachheit der Mannigfaltigkeit beträgt."[1])

[1]) Meiner Ansicht nach darf der Punkt nicht schlechtweg als das Element der Raumgröſsen bezeichnet werden, sondern die Eigenschaft, ein Element zu sein, kommt ihm nur in ganz bestimmtem Sinne zu — nämlich wenn man die Gebilde des Raumes durch Bewegung erzeugt denkt. Im übrigen muſs scharf unterschieden werden zwischen den Elementen der verschiedenen Gebilde sowohl, wie des Raumes selbst und dem Punkt. Das Element der Linie ist ein Differential derselben, aber schon im Besitz aller wesentlichen Eigenschaften derselben; ebenso ist das Flächenelement und Körperelement in exakter Weise zu definiren. Das letztere ist zugleich das Raumelement. Durch die Integration zwischen den Grenzen unendlich — wenn es gestattet ist, diesen Ausdruck der Kürze halber zu gebrauchen — erhalten wir aus diesem Element den Raum selbst, durch die Integration zwischen bestimmten Grenzen einen Körper. Niemals aber ergiebt sich aus der Integration eines Flächen- oder Linienelementes etwas anderes als eine Fläche oder Linie, geschweige denn aus dem Element „Punkt". Man vergleiche Kapitel III.

„Unser Raum repräsentiert sich nun als eine solche dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche in jedem Punkte dasselbe konstante Krümmungsmafs besitzt.[1]) Dies ist der analytische Ausdruck für die Unabhängigkeit der Körper vom Orte.“

Rosanes geht noch auf den Unterschied zwischen Unbegrenztheit und Unendlichkeit, auf den Riemann zuerst hingewiesen, ein und zitiert dann auch Helmholtzs Arbeit. Die Schrift schliefst mit den Worten:

„So mufste auch, damit das richtige Verständnis der Raumanschauung gewonnen werde, erst die Einführung und Untersuchung eines umfassenderen Begriffes vorangehen.“

Donadt, Das mathematische Raumproblem und die mathematischen Axiome. — Leipzig 1881.

Der Raum kann von vier Gesichtspunkten aus betrachtet werden; es sind der logische, der mathematische, der psychologische und erkenntnistheoretische.

„Zwar läfst sich nicht leugnen, dafs alle vier Probleme, welche die Raumvorstellung anregt, in innigem Zusammenhange mit einander stehen, so namentlich auf der einen Seite das logische und mathematische, auf der andern Seite das psychologische und erkenntnistheoretische Problem, allein ihr qualitativer Unterschied ist sehr zu betonen.“[2])

---

[1]) Der Bemerkung, dafs dieses Krümmungsmafs der Null gleich ist, wenn es sich um den Euklidischen Raum handelt (d. h. mit andern Worten um die Giltigkeit der Euklideischen Axiome, bes. des 11.), fügt Rosanes folgende Bemerkung hinzu:

„Über die Richtigkeit derselben (nämlich der Annahme, dafs die Konstante Null ist) ist aber darum volle Gewifsheit nicht zu erlangen, weil ihre Prüfung nicht durch die Theorie, sondern durch die Erfahrung geschehen mufs. Eine solche Prüfung kann immer nur annähernde Genauigkeit bieten.“

[2]) Mit der scharfen Unterscheidung dieser Gesichtspunkte, der Feststellung, inwiefern durch sie die Untersuchung des Raumproblems beeinflufst wird, der Aufsuchung, worin sie zusammentreffen, und der genauen Bestimmung, worin sie sich unterscheiden, ist zur Lösung der Frage der wesentliche Anhalt gegeben. Es ist daher diese Zerlegung der Hauptfrage vom gröfsten Werte.

Bei der Besprechung der gegen Euklid erhobenen Angriffe heifst es: „Ist die geometrische Wissenschaft die Einzelwissenschaft vom Raume, so müssen ihre Fundamente die wesentlichen Prädikate bestimmen, die den Inhalt unserer Raumvorstellung bilden.“

„Die Grundsätze der Geometrie müssen die Grundeigenschaften des Raumes aussagen, wie sie unserer ursprünglichen Vorstellung mitgegeben sind.“

Es wird nachgewiesen, dafs dies bei Euklid nicht der Fall, dafs er auf der einen Seite zuviel, auf der andern zuwenig gebracht, z. B. die Ausgedehntheit nach drei Dimensionen übergangen und später stillschweigend gebraucht habe.

Donadt geht alsdann ausführlich auf die Bedeutung des 11. Axioms ein, bespricht die Nicht-Euklidische Geometrie und die Arbeiten von Riemann und Helmholtz, wobei er besonders die Untersuchungen von Helmholtz über die Kongruenzbedingungen unserer Geometrie, denen wir bei Besprechung des Begriffes Kongruenz unsere besondere Beachtung zu schenken haben, hervorhebt und auf das von uns auch zitierte Werk von Erdmann hinweist.

Als wesentlich für die Untersuchung wird alsdann angegeben, dafs festgestellt werden müsse, ob der Raum ein Begriff sei. Nach der kritischen Prüfung der Ansichten Kants und verschiedener anderen, besonders Wundts,[1]) kommt Donadt zu dem Resultat: „Der Raum ist ein Begriff, weil er selbständiges Objekt des logischen Denkens sein kann“, indem er hinzufügt: „Denn es ist ein Hauptmerkmal des logischen Denkens, dafs es begriffliches Denken ist.“[2])

Den Unterschied zwischen dem logischen (mathematischen) und erkenntnistheoretischen (metaphysischen) Raum giebt Donadt in einem Zitat Baumanns aus dessen Werk, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Phiolosophie: „Der Raum in mathematischer Hinsicht rein als Vorstellung unseres Geistes gefafst stellt sich, wenn er mit dem Raum

---

[1]) Vergl. Wundt, Logik und System der Philosophie.

[2]) Es sei nicht unerwähnt, dafs diese Betrachtungen uns belehren, dafs das, was Kant mit reiner Anschauung bezeichnet, keine Anschauung, sondern Begriff ist.

draufsen verglichen, bald als ein Wesen sui generis heraus; in ihm ist Allgemeines und Besonderes mit einem Schlage gegeben, wir entwerfen ihn zugleich im Bilde und finden ihn in uns selbst entworfen, wir durcheilen ihn und verfügen über ihn ohne Hindernis; ganz anders finden wir es bei dem Raume, der aufser uns sich uns empfindbar macht; der Schlufs von einem auf den andern ist so durch die Sache selbst verboten."

Donadt setzt dann weiter auseinander, dafs unser Raum nicht unter den Begriff der *n*fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit als allgemeinen Gattungsbegriffes falle. Bemerkenswert ist hierbei folgende Stelle:

„Man könnte aber zweitens einwenden, dafs der allgemeine Gattungsbegriff, dem der Raum subsumiert werden soll, überhaupt gar nicht aus der einen Raumanschauung entstanden ist, sondern vielmehr aus der Betrachtung der Flächen."

Die bekannte Ausführung Helmholtz', die sich auf die Annahme zweidimensionaler Wesen stützt, wird sehr treffend folgendermafsen berichtigt:

„es wird nicht die Anschauung jener Wesen dargestellt, sondern die Anschauung, welche wir mit unserer Raumvorstellung von den geometrischen Eigenschaften jener Flächen haben, wenn wir dabei von den übrigen Merkmalen abstrahieren."[1])

„Von einem Verhältnis der Gattung zur Art kann demnach zwischen der *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit und dem Raume nicht die Rede sein: die *n*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist kein Gattungsbegriff, sondern nur ein mathematischer Hilfsbegriff."

Da nach Wundt die Subsumtion das Wesen des Begriffs einengt, so giebt es Begriffe ohne Unterordnung unter einen Gattungsbegriff.

„Und fürwahr folgt aus dem unanfechtbaren Beweise Kants, dafs die Raumanschauung einzig in ihrer Art ist, dafs für den Raumbegriff ein Gattungsbegriff im eigentlichen Sinne gar nicht existiert und überhaupt nicht existieren kann."

In der analytischen Behandlung des Krümmungsmafses

---

[1]) Man vergl. meine Ausführungen bei dem Zitat aus Helmholtz und Wundt, Logik.

macht dann Donadt aufmerksam auf den Unterschied zwischen dem Krümmungsmafs von Gaufs und dem von Riemann, einen Unterschied, „den manche Geometer gar nicht zu kennen scheinen". Zugleich wird das Krümmungsmafs als Einteilungsprinzip für die n-fachen Mannigfaltigkeiten zurückgewiesen. Dieser Teil der vorliegenden Arbeit schliefst mit einer Prüfung der Riemann-Helmholtzschen Arbeiten auf ihren mathematischen Wert, der sich eine Betrachtung anreiht über das 11. Axiom.

Das Facit der Untersuchungen ergiebt sich aus folgenden Sätzen:

„Soll eine Definition des Raumes gegeben werden, so mufs dabei zunächst die logische Forderung erfüllt sein, dafs in diese Definition Nichts eingeführt wird, was uns erst durch den zu definierenden Begriff gegeben ist oder ihn voraussetzt. Bei einer Definition des Raumes „werden daher nur solche Begriffe benutzbar sein, die aufser für den Raum auch für andere von ihm unabhängige Fundamentalformen des Erkennens erforderlich sind". (Wundt.) Es darf in der Definition keine ursprüngliche Raumanschauung übergangen werden, die später stillschweigend angenommen wird, und nichts in ihr aufgestellt werden, was keine Grundanschauung des Raumes ausdrückt."

„Der Raum steht in Beziehung zu den Begriffen:

1) Gröfse; 2) Richtung; 3) Stetigkeit; 4) Veränderung; 5) Zahl (da diese zum Messen aller Gröfsen dient).

Grassmanns Definition:

„Der Raum ist ein System dritter Stufe."

Wundts Definition:

„Der Raum ist eine unendliche stetige Gröfse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt ist."

Hierzu treten folgende Fundamentaldefinitionen:

„Das Element des Raumes heifst Punkt."[1])

„Die Bestimmung des Punktes durch drei Richtungen heifst seine Lage."

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen zu dem Zitat von Rosanes.

„Der Raum ist an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen, d. h. an allen Orten und nach allen Richtungen können gleiche Konstruktionen vollzogen werden."

Sehr wichtig ist folgende Stelle: „Thatsächlich ist klar, dafs eine Definition des Raumes nicht möglich ist, ohne dafs man den Begriff der Geraden und des Punktes verwendet."[1])

Schliefslich giebt Donadt folgende Definition des Raumes:

„1) Der Raum ist eine unendliche stetige Gröfse, in der jedes Element durch drei unabhängig von einander veränderliche Richtungen bestimmt wird.

2) Im Raume lassen sich an allen Orten und nach allen Richtungen Konstruktionen vollziehen (Bedingungen für die Gleichheit zweier Konstruktionen).

3) Zu jeder Richtung im Raume existiert eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage.[2])

Hierzu treten die folgenden Fundamentaldefinitionen: ad 1) Jedes Element des Raumes heifst Punkt;[3]) die Bestimmung des Punktes durch die Richtungen heifst seine Lage.

ad 2) und 3) Die Konstruktion, welche zwei entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfafst, heifst Gerade. Die Konstruktion, welche zwei verschiedene Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfafst, heifst Winkel."[4])

Die weiteren Ausführungen werden noch bei der Behandlung des Begriffs Axiom Berücksichtigung finden.

---

[1]) Nicht den Begriff der Geraden, sondern den Begriff der Richtung! Ferner ist zu bedenken der Zwiespalt in der Darlegung: Raum a priori, von da aus über Körper etc. zum Punkt — und nun der Raum nicht ohne Punkt definierbar!!

[2]) Was soll der Zusatz „von übereinstimmender Lage"? siehe weiter unten.

[3]) Das Raumelement ist vom Punkt sehr scharf zu unterscheiden! sonst wären Linien, Flächen, Körperelemente alle identisch. — Vergl. Zitat aus Rosanes.

[4]) Aus dieser Stelle geht hervor, dafs Donadt unter übereinstimmender Lage versteht, dafs die beiden Richtungen einen Punkt gemeinsam haben, resp. von ein und demselben Punkt ausgehen. Es wäre wohl klarer gewesen, statt „von übereinstimmender Lage" zu sagen „mit gemeinsamem Ausgangspunkt".

J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Math. und Philosophie. — Zürich 1870.[1])

In der ersten derselben, betitelt: Kants und Gaussens Ansicht über die Natur des Raumes, stellt sich Becker vollständig auf Kants Standpunkt und weist Gaussens und Trendelenburgs Einwürfe zurück. Die zweite: Die Axiome der Geometrie, beschäftigt sich mit Riemanns Arbeit über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Dabei ergiebt sich als Konsequenz der in Abhandlung I aufgestellten Ansichten eine Zurückweisung der Riemannschen Raumlehre. Es heifst dann:

„Diese Arbeit (Riemanns Abhandlung) erinnert sehr an eine jugendliche Verirrung Kants, nämlich an dessen Versuch, die Thatsache zu erklären, dafs der Raum nur drei Dimensionen habe. 'Warum der Raum nur drei Dimensionen habe' gehört ebenso wie die Frage, 'warum zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können', und die übrigen, welche Riemann sich stellen mufste, ehe er die Euklidischen Axiome für Hypothesen erklärte, und zwar für unbegreifliche, in das Gebiet derjenigen Fragen, von denen Kant sagt, dafs man, ehe man sie zu beantworten suche, sich zuerst fragen müsse, ob man sie vernünftiger Weise auch stellen dürfe .... — Und sicher hat ihn die erwähnte eigene jugendliche Verirrung zu der Äufserung geführt: 'Es ist schon ein grofser und nötiger Beweis der Klugheit und Einsicht, zu wissen, was man vernünftiger Weise fragen solle.'“

„Sobald wir eine Vorstellung vom Raume haben, erkennen wir ihn sofort als einen von drei Dimensionen und mit einer Gewifsheit, die nur unmittelbare Anschauung geben kann. Hat die Frage, warum hat der Raum gerade drei Dimensionen? den Sinn: woher schöpfe ich dieses Urteil? d. h. was ist sein Erkenntnisgrund? so lautet die Antwort: die Anschauung überzeugt mich davon. Will ich aber die Thatsache selbst ergründen, d. h. frage ich nach einem Realgrunde, aus dem

[1]) Die hierher gehörige Abhandlung 3 ausführlich besprochen von Sextus Empiricus in Hoffmanns Zeitschrift, Band III. p. 465—473 (Abhandlung 1 in H. Z. III. p. 274—281; No. 2 in H. Z. III. p.380—388; No. 4 in H. Z. III p. 539—541). Ferner besprochen in Schl. Z. XV. p. 93.

sich diese Eigenschaft als notwendige Konsequenz ergäbe, so frage ich etwas Unvernünftiges."

Becker kommt zu dem Schlufs, dafs Riemann infolge falscher Fragestellung und unter Verkennung der a priori vorhandenen Erkenntnisse auf Abwege geraten sei, und stellt auch hier wieder die Ansicht Kants als die allein richtige hin. Die dritte Abhandlung handelt: „Über die Grundbegriffe der Geometrie und die Bewegung als Hilfsmittel bei geometrischen Untersuchungen."

---

v. Forstner, Grundrifs etc. — Berlin 1826.

„Die unendliche Ausdehnung, welche bleibt, wenn wir uns in der Vorstellung die ganze uns umgebende Körperwelt als vernichtet denken, heifst Raum."

„Der Raum ist eine stetige Gröfse und hat nichts weiter als Ausdehnung."

„Den Begriff vom Raume erhalten wir nicht erst durch die Erklärung der Geometrie vom Raume, sondern haben ihn bereits in uns; die Geometrie erklärt nur, was sie unter Raum verstanden wissen will. — Die Anzahl der Ausdehnungen im Raume, in Hinsicht ihrer verschiedenen Richtungen, ist unendlich; wir nehmen aber aus dieser unendlichen Menge von Ausdehnungen drei heraus, welche wir vorzugsweise bei den Körpern betrachten, die wir aber für jeden besonderen Körper wieder durch Entlehnungen suchen müssen."

Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. — Göttinger Nachrichten 1868.[1])

[1]) Vergl. Riemann, Die Hypothesen etc. Göttinger Abhandlungen 1867. — Vergl. Helmholtz, Pop. wiss. Vorles. III. 2: „Über den Ursprung etc." p. 36: „Den analytischen Weg hat zuerst . . . B. Riemann in Göttingen eingeschlagen (s. vor. Notiz). Dieser Weg hat den eigentümlichen Vorzug, dafs alle Operationen, die in ihm vorkommen, reine rechnende Gröfsenbestimmungen sind, wobei die Gefahr, dafs sich gewohnte Anschauungsthatsachen als Denknotwendigkeiten unterschieben könnten, ganz wegfällt."

Ferner Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome; bespr. in Schl. Z. XXIV. p. 34.

p. 194: „Die analytische Behandlung der Frage, wodurch sich der Raum unterscheide von anderen abmeſsbaren, mehrfach ausgedehnten und kontinuierlichen Gröſsen, empfiehlt sich in diesem Falle gerade durch den Umstand, daſs sie der Anschaulichkeit ermangelt, und deshalb den auf diesem Gebiete so schwer zu vermeidenden Täuschungen durch die besondere Begrenztheit unserer Anschauungen nicht ausgesetzt ist.“

Die ferneren Ausführungen Helmholtzs werden bei Besprechung der Begriffe Kongruenz und Bewegung noch ganz besondere Berücksichtigung finden; es seien hier nur noch die Resultate angegeben:

p. 197: „I. Der Raum von n Dimensionen ist eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.“[1])

p. 198: „II. Es wird die Existenz von beweglichen aber in sich festen Körpern,[2]) beziehlich Punktsystemen, vorausgesetzt.“

p. 200: „III. Es wird vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper vorausgesetzt.“

p. 201: „IV. Endlich müssen wir dem Raume noch eine Eigenschaft beilegen, die der Monodromie der Funktionen einer komplexen Gröſse analog ist, und die sich darin ausspricht, daſs zwei kongruente Körper auch noch kongruent sind, nachdem der eine eine Umdrehung um irgend eine Rotationsaxe erlitten hat.“

p. 219: „Wenn unsere Annahmen I bis IV erfüllt sind, so ist das allgemeinste System der Geometrie das, was sich nach den Regeln unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie ergeben würde, wenn man diese anwendete auf ein kugelähnliches Gebilde von drei Dimensionen, dessen Gleichung in vier rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z, S ausgedrückt wäre:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (S + R)^2 = R^2.$$

Hierin können X, Y, Z nicht unendlich werden, wenn nicht $R = \infty$. Letzterer spezieller Fall entspricht unserer wirklichen Geometrie gemäſs den Axiomen des Euklides. Es können X, Y, Z dann endliche Werte nur haben, wenn $S = 0$,

[1]) Oder eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen. Beide Ausdrücke rühren von Riemann her.

[2]) Wir haben jetzt dafür den Ausdruck „starre Körper“.

was die Gleichung eines ebenen Gebildes ist. In diesem Sinne müssen wir den Raum des Euklides den Räumen von ersterer Anzahl der Dimensionen gegenüber, mit Riemann als ebenen Raum bezeichnen."

p. 221: „V. Der Raum hat drei Dimensionen."[1])

p. 221: „VI. Der Raum ist unendlich ausgedehnt."

„Diese sechs Postulate geben die genügende Grundlage zur Entwicklung der Raumlehre ab."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.[2])

„Die Einsicht in die Fehler des Herbart'schen Versuchs verbunden mit dem Bestreben, eine philosophische Grundlage für mehrere fremd nebeneinanderstehende Stammbegriffe der mathematischen Wissenschaften zu finden, führten Riemann zu den Untersuchungen, welche zu einer algebraischen Raumtheorie sich entwickelten; einem Schema, innerhalb dessen unser Weltraum eine Stelle finden sollte."

„Es wird sich zeigen, dafs in diesen (Riemanns) metamathematischen Raumtheorieen Herbarts logische Erschleichung mit analytischen Zeichen wiederholt wurde; dafs hierdurch aber bei dem unbeschränkten analytischen Schematismus ein n-facher Raum entstehen mufste, während Herbart bei dem dreifachen stehen blieb, weil er nur Begriffe verwandte, die logisch waren, obschon deren Richtigkeit aus Herbarts Deduktion nicht zu folgern ist. Jener n-fache Raum wurde nicht als eine Erschleichung erkannt, weil man über die logische Natur der analytischen Symbolik im Unklaren war, und sie nur empirisch je nach den vorliegenden Bedürfnissen handhabte."

Verfasser kommt dann auf die Pangeometrie zu sprechen, die er als verfehlt nachweist, weil die inhaltsschwere Vorfrage

---

[1]) NB. etwas abgeändert.

[2]) Man vergleiche zu den folgenden Ausführungen die Zitate aus J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete von Mathematik und Philosophie. Ferner: Schmitz-Dumont, Die Bedeutung der Pangeometrie; besprochen in Schl. Z. XXIII. p. 84.

nicht beachtet worden sei, ob die Formeln in jeder Hinsicht eindeutig blieben.

„Sei eine Prämisse noch so phantastisch oder gar in sich widerspruchsvoll, sobald sie zum elementaren Bausteine gestempelt wird, kann man in logischem Fortschritte aus dergleichen Elementen Gebilde zusammenfügen; aber diese Gebilde vertragen ebensowenig eine logische Deutung wie die Elementarprämisse.“ [1])

„Riemann unternahm es die Phantasiegebilde der Pangeometrie mit den anschaulichen Gebilden der gemeinen Geometrie in logischen Konnex zu bringen, oder wenigstens die Möglichkeit ihrer anschaulichen Konstruktion glaubhaft zu machen.“

„Was Riemann nun thatsächlich fertig brachte, oder andere in seinem Sinne, war die anschauliche Konstruktion der Verbindungsart verschiedener pangeometrischen Gebilde, aber nicht die Gebilde selbst.“

„Die Vorstellung ist allerdings aufgefordert, sich dies, nämlich ein Übergehen in völlig verschiedenen Arten der Bestimmungsweise einer Ausdehnung, durch Übergehen des Punktes zur Linie, Fläche, Körper annehmbar erscheinen zu lassen; aber beim Körper sagt die Vorstellung plötzlich halt.“

„Wird die Verbindung der Begriffe Gröfse und Richtung geleugnet, die Abstraktion erlaubt ganz davon abzusehen, nun dann entstehen Formeln, welche in der Arithmetik ihre eindeutige Geltung besitzen, aber angewendet auf ein Nebeneinander sinnlos sind; und diese Sinnlosigkeit wird nicht vernünftig dadurch, dafs man sie mit dem Worte ‘n-fache Mannigfaltigkeit’ bezeichnet.“

„Statt dessen wurde die kühne Hypothese gesetzt: jene analytischen Formeln dürften auf den Begriff eines Raumes überhaupt gedeutet werden.“

„Je dunkler der Begriff einer n-fachen Mannigfaltigkeit war, desto vielversprechender erschien er der Spekulation. . .“

Es wird dann auseinander gesetzt, welche Gründe es er-

---

[1]) Es wird also der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht nur die Anschaulichkeit resp. die Vorstellbarkeit abgesprochen, sondern sogar jede Möglichkeit einer logischen Deutung.

möglichten, den irrigen Satz aufzustellen, „dafs der Raum der Geometrie ebenso wie derjenige der Physik und Astronomie zunächst eine Vorstellung sei von demselben Bewufstseinsgehalt wie jede beliebige andere Vorstellung“, und hauptsächlich angeführt der Mangel an richtigen Definitionen für Vorstellung, Anschauung und Begriff und auch für Dimension.

Mit diesen Zitaten möge die Besprechung der Raumbegriffe resp. der Eigenschaften des Raumes ihren Abschlufs finden. Naturgemäfs liefs sich die Betrachtung des Raumes von derjenigen der Körper etc. nicht immer hinreichend trennen, und so werden wir im III. Kapitel, das von den räumlichen Gebilden handelt, noch wiederholt auf das Raumproblem zurückgreifen müssen. Entgegen der ursprünglichen Absicht sind auch eine Reihe von Zitaten hinzugekommen, die den modernen Ansichten über das Raumproblem Ausdruck verleihen.[1]) Es schien mir aber der Vollständigkeit halber notwendig, wenigstens einigermafsen dem etwaigen Verlangen des Lesers entgegenzukommen, das Wichtigste über diese Arbeiten kennen zu lernen, ohne die Originalarbeiten selbst studieren zu müssen. Vielleicht wird auch der eine oder andere Leser durch die mitgeteilten Proben sich veranlafst fühlen, diesen Fragen nachzugehen; freilich wird der, welcher sich eingehender mit den angeregten Fragen beschäftigen will, sich höchstens durch den Litteraturnachweis befriedigt fühlen: doch erlaube ich mir, auch hier noch einmal ausdrücklich auf das III. Kapitel zu verweisen, das über manche wesentliche Punkte sich ausführlicher verbreitet.

Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft, Hannover 1875, bespr. in H. Z. IX. p. 23—28 (280/83; 363/66; 430/31).

Beltrami, Nicht-Euklidische Geometrie, 1868 (Giornale di Matematiche), bespr. in H. Z. II. p. 130—132.

---

[1]) Es liegt ja in der That dem eigentlichen Zwecke des vorliegenden Werkes ziemlich fern, auf das Raumproblem intensiver einzugehen. Man vergleiche übrigens noch H. Z. VII. p. 250—253 den Bericht Hoffmanns über Hoppes Vortrag: „Über den Raumbegriff“ und H. Z. VIII p. 406—410.

Fresenius, Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur, Frankfurt a/M, 1875, bespr. in H. Z. VII. p. 64—67.
Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie, Leipzig 1876, bespr. in H. Z. VII. p. 464—473, in Schlöm. Ztschr. XVIII p. 69.
Gilles, Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, in H. Z. XI. p. 5—24 (274—281; 435/36).
Emsmann, Zum vieraxigen Koordinatensysteme, in H. Z. XI. p. 253—261 (XII. p. 40).
Schlegel, Der vierdimensionale Raum, in H. Z. XIV. p. 87—89.
Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885, bespr. in H. Z. XVII. p. 209—211.
Beez, Zur Theorie des Krümmungsmafses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Schlöm. Ztschr. XX. p. 423; XXI p. 373.
Beez, Über das Riemann'sche Krümmungsmafs höherer Mannigfaltigkeiten. Schlöm. Ztschr. XXIV. p. 1, 65.
Beez, Über conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, Schlöm. Ztschr. XX. 253.
Becker, J. C., Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume, Schlöm. Ztschr. XVII. p. 314.
Becker J. C., Die Grundlagen der Geometrie, Schlöm. Ztschr. XX. p. 445.

Verzeichnis von Programmabhandlungen.

Alth, Über das absolute Mafssystem und die Theorie der Dimensionen. Wien 1884.
Ballauf, Über die mathematischen Definitionen und Axiome. Varel 1879.
Endert, Die logischen Prinzipien der Mathematik. Detmold 1879.
Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. Breslau 1885.
Hoffmann, Die Geometrie in ihrer Abhängigkeit von den Mafsverhältnissen des Raumes. Graz 1881.
Killing, Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. Brilon 1880.
Meifsner, Leibniz' Streit mit Clarke über den Raum. Pillau 1881.
Krause, Kants Erkenntnislehre als Grundlage unserer Erkenntnis. Marienwerder 1881/82.
Franke, Untersuchungen über den Raum und sein Verhältnis zu den Dingen. Hirschberg 1885.
Jahn, die Subjektivität des Raumes und die Axiome der Geometrie. Dramburg 1884.

II. Kapitel.

Die Geometrie.

Nachdem so der Raum, das Gebiet (Feld, Sphäre) der Geometrie, festgelegt ist, möge nun eine Vergleichung der Ansichten erfolgen über den Begriff der Geometrie selbst, an die sich eine Besprechung der geometrischen Raumgebilde, des Gegenstandes der Geometrie, anschliefsen wird.

Es soll gleich an dieser Stelle auf die Verschiedenheit der Herleitung der räumlichen Gebilde hingewiesen werden und eine Entscheidung darüber getroffen werden, welcher Weg vorzuziehen sei, vom Körper über Fläche, Linie zum Punkt oder umgekehrt.[1]) Verfasser schickt voraus, dafs er durchaus für den ersteren Weg eintritt.[2]) Es scheint sich hier eine historische Folge geltend zu machen: während wir in früheren Zeiten die Lehrbücher der Geometrie ihren Ausgang vom Punkt nehmen sehen, diesem abstraktesten Raumgebilde, findet man in den Lehrbüchern der letzten Jahrzehnte mit wenigen, verschwindenden Ausnahmen den naturgemäfseren Weg ein-

[1]) Vergl. zu dem Folgenden: Bartholomäi a. a. O. p. 1,

„Die Anfänge der Mathematik können auf mehrfache Weise gefafst werden. Erstens nämlich kann man untersuchen, wie die Mathematik nach und nach entstand, aus welchen ersten Sätzen sie sich entwickelte, unter welchen Bedingungen diese gefunden wurden. Zweitens kann man fragen, wie die Mathematik anfange und anfangen müsse, dafern sie schnell, sicher und dem Wesen der Wissenschaft gemäfs gelernt werden soll. Drittens kann man sich in den reinen Gedanken versetzen und untersuchen, wie die Mathematik dem Begriffe nach anfangen müsse. Wir bekommen also dreierlei Anfänge: den historischen, den pädagogischen und den philosophischen. — Wer den einen sucht, kann die anderen nicht ignorieren, und die philosophische Betrachtung zumal mischt sich überall von selbst ein."

[2]) Was den Unterricht betrifft; im Verlaufe der geklärten Auffassung kann dann daneben auch der zweite Weg eingeschlagen werden und wird gewifs nicht ohne Erfolg zur Hebung des Verständnisses herangezogen. Nur ist zu bedenken, dafs wir bei der zweiten Betrachtungsweise ein mechanisches Prinzip, dasjenige der Bewegung (vergl. weiter unten den Abschnitt über „Bewegung"), in die rein geometrischen Betrachtungen einmischen. — Vergl. Kapitel III.

geschlagen, vielleicht eine Folge der Bestrebungen, die Raumlehre in der Volksschule einzuführen resp. eine Folge des propädeutischen Unterrichts auf den höheren Schulen.[1]) Es ist einleuchtend, dafs die Fläche ursprünglich nur als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze der Fläche, der Punkt als Grenze der Linie aufgefafst worden ist und dafs erst im Laufe der Entwicklung des geometrischen Denkens die Gebilde Fläche, Linie, Punkt als selbständige Elemente oder Raumgebilde angesehen wurden. Es ist schon ein höherer Standpunkt, ein Ergebnis geometrischer Bildung, dafs wir diese Elemente losgelöst vom geometrischen Körper an und für sich betrachten. Es wird sich aus den weiter unten anzuführenden Zitaten ergeben, dafs die Überzeugung von der Ursprünglichkeit der Vorstellungen von Flächen, Linien, Punkten als Grenzen sich immer mehr Anhänger erworben und dafs dieselbe wohl jetzt als allgemein gültig bezeichnet werden darf. Es scheint auch kein Grund etwa methodischen Charakters vorzuliegen, vom naturgemäfsen Wege abzuweichen, da, wie schon erwähnt, der Punkt das abstrakteste Raumgebilde ist und sicher für den Schüler das schwierigste; ich glaube kaum, dafs ein eben in die Geometrie eintretender Kopf eine wirklich sichere Vorstellung des mathematischen Punktes haben wird, gerade hierbei wird immer an Stelle des abstrakten Begriffs ein physisches Substrat treten.[2])

[1]) Vielleicht aber auch eine Folge der philosophischen Vertiefung der Grundbegriffe.

[2]) Vergl. H. Z. I. p. 235; J. Kober, Über die Definition der geometrischen Grundbegriffe: „Oder man geht umgekehrt vom Punkte aus (der nicht definiert wird) . . . .“

„Es versteht sich, dafs der Schüler gewarnt werden mufs, den Punkt mit kleinen Raum- oder Flächenteilen u. s. w. zu verwechseln, sowie den Raum als notwendig erfüllt zu betrachten.“

Ferner H. Z. II. p. 42; Ciala, Zu dem Aufsatze von J. Kober: „Es kommt mir vor Allem darauf an zu betonen, dafs die Geometrie nichts anderes ist als eine bestimmte Art und Weise, die Dinge der Natur zu betrachten.“

„. . . . Die Betrachtung der Gegenstände in Beziehung auf ihre Gröfse, ihre Gestalt hat sich zu der Wissenschaft ausgebildet, welche Geometrie heifst und die ich demnach als einen Zweig der Naturwissenschaft ansehe.“

Bei den Zitaten über den Begriff der Geometrie sollen nur die von der gewöhnlichen Form abweichenden gegeben werden.[1])

J. K. Becker, Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

Die Aufgabe der Geometrie besteht in der Beschreibung und Vergleichung der möglichen räumlichen Vorstellungen und der Erklärung ihrer Eigenschaften auf Grundlage der uns unmittelbar bekannten Eigenschaften des Raumes selbst und der daraus folgenden Gestaltungsgesetze.

J. K. Becker, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1877.

Die Geometrie lehrt uns die Dinge nach ihren räumlichen Eigenschaften unter einander vergleichen. Dazu gehören die Eigenschaften der Form oder Gestalt, der Gröfse und der Lage.[2])

Brewer, Lehrbuch der Geometrie. — 1822.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Ausmessung des Raumes.

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Begriffen, der Darstellung und Vergleichung der stetigen Gröfsen (d. h. Linien, Winkel, Flächen und Körper) beschäftigt und die Wahrheit

---

[1]) Hier wird als gewöhnliche Definition vorausgesetzt: Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgröfsen. — Wie ich über diesen Ausdruck denke, habe ich am Anfang des ersten Kapitels ausgeführt; übrigens verweise ich auf die von mir dort gegebene Antwort auf die Frage, was ist Geometrie.

[2]) Es wird sich empfehlen im Unterricht auf den Unterschied von Gröfse und Gestalt näher einzugehen, und ganz besonders zu betonen, dafs diese beiden räumlichen Eigenschaften vollständig unabhängig von einander sind. Auch ergiebt sich ungezwungen an dieser Stelle schon ein Hinweis auf Gleichheit und Ähnlichkeit.

der gefundenen Sätze durch sichere und überzeugende Schlüsse beweiset, heifst Geometrie.

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. — Leipzig 1887.

Es ist die Aufgabe der Geometrie, die Eigenschaften der Figuren zu ermitteln, welche sich aus ihren Gröfsenbeziehungen ergeben, vor allem aber ihre Gröfse zu bestimmen, oder sie zu messen. — (Die Figur wird definiert als die bildliche Darstellung irgend eines Gebildes, das aus den bekannten Raumgröfsen zusammengesetzt ist oder selbst ein solches ist.)

Gilles, Lehrb. der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1887.

Die Geometrie ist die Lehre von der Raumgröfse, welche durch stetige Bewegung in der reinen Anschauung entsteht, indem man mit geschlossenen Augen, überhaupt unabhängig von der Aufsenwelt die Raumgebilde konstruieren kann.

Legendre, Die Elemente der Geometrie (ed. Crelle). — Berlin 1844.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche das Mafs der Ausdehnung zum Gegenstande hat.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

Die Aufgabe der Geometrie ist die wissenschaftliche Betrachtung der Raumgebilde.

Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

Wissenschaft heifst das Wissen der Beziehungen zwischen den gleichartigen Gröfsen. Diese Beziehungen sind am einfachsten bestimmbar, wenn sämtliche Verschiedenheiten durch eine gemeinsame Einheit bestimmt werden können.

Geometrie heifst die Grund-Wissenschaft von den mefsbaren ausgedehnten oder Raumgröfsen.

Seeger, Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.

Alles Arbeiten auf dem Gebiete der Geometrie verfolgt einen der beiden nachstehenden Zwecke:

Entweder untersucht man, wenn gewisse Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines geometrischen Gebildes gegeben sind, welche anderen Beziehungen — als unzertrennlich mit jenen verknüpft — dann ebenfalls stattfinden müssen, und sammelt die Resultate dieser Untersuchung in einzelnen geometrischen Sätzen (Lehrsätzen, Theoremen).

Oder man stellt sich die Aufgabe, ein einfacheres oder komplizierteres — in vielen Fällen sich auf einen einzelnen Punkt oder eine einzelne Gerade reduzierendes — geometrisches Gebilde zu konstruieren, das zu einem geg. Gebilde in geg. Beziehungen steht, oder dessen Bestandteile in geg. Beziehungen zu einander stehen.

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der Konstruktion im Raum; sie stellt die Regeln dar, nach denen bestimmte Gestalten in ihm erzeugt werden, und leitet daraus die Gesetze, Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen derselben ab.

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

Die Geometrie lehrt die Abhängigkeit räumlicher Eigenschaften.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

Die Geometrie . . . . beschränkt sich auf die Nachweisung der Gesetze und Bedingungen, an welche die Konstruktionen im Raume gebunden sind, und auf die Darstellung und Ver-

gleichung der Eigenschaften, die an den räumlichen Gegenständen als solchen wahrgenommen werden.

Klügel.

Geometrie ist die Wissenschaft von den Formen ausgedehnter Gröfsen. Sie unterscheidet sich von der Analysis dadurch, dafs sie eigentlich nicht rechnet, die Gröfsen nicht auf eine Einheit, weder eine bestimmte noch unbestimmte bezieht, sondern die Vergleichungen teils durch Zerlegungen und Zusammensetzungen macht, teils die Gröfsen paarweise, nach ihren Verhältnissen vergleicht. Die Geometrie nimmt die Bilder der intellektuellen Gröfsen selbst zu Symbolen ....

Lambert, Organon. I. B. S. 502. (Entnommen aus Pfleiderer.)

„Den Begriff der Ausdehnung haben wir unmittelbar durchs Gefühl, mittelbar auch durchs Sehen. — Die Wissenschaft der Gröfse der Ausdehnung ist die Geometrie."

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Die Form, die Gestalt, der mathematische Körper, der Raum, welchen der physische Körper einnimmt, ist das aus der äufseren Wahrnehmung durch Abstraktion Erhaltene, Gegebene, Mögliche, Denkbare und der Gegenstand geometrischer Untersuchung."

„Die Geometrie zerfällt notwendig in die drei Teile:
die Lehre von den Linien,
die Lehre von den Flächen,
die Lehre von den Körpern.

Ein jeder dieser Teile besteht in der Untersuchung über die Natur und Beschaffenheit des Bildungsgesetzes der entsprechenden Raumgröfsen und über die Relationen, die aus Verbindungen derselben hervorgehen. Bei der Verbindung von Raumgebilden hat man nicht blofs auf ihre Gröfse, sondern auch auf ihre Lagen und Richtungen zu sehen."

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

„Die Geometrie hat die Gesetze zu entwickeln, welchen die Gröfsen als räumliche unterworfen sind. Der allgemeine Teil der Geometrie hat die verschiedenen Arten der Raumformen nachzuweisen. Es sind deren vier: Körper, Fläche, Linie, Punkt.“

„Die Geometrie zerfällt in ihren einzelnen Teilen in Elementarlehre und Beziehungslehre. Jene hat die Gegenstände an und für sich zu betrachten, diese die Gegenstände verschiedener Klassen aufeinander zu beziehen.“

Helmholtz, Popul.-wissensch. Vorträge. III. p. 21. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometr. Axiome.

p. 25: „Die Geometrie ist die mathematische Lehre vom Raume.“

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„An jedem durch die Sinne wahrnehmbaren Gegenstande unterscheidet man zweierlei: nämlich den Stoff, aus dem er besteht, und den Raum, den er einnimmt; ersterer wird die Materie, letzterer die Form genannt. Denkt man sich von einem Gegenstande die Materie mit allen ihren Eigenschaften gänzlich hinweg, so bleibt für die Vorstellung nichts mehr als die Form desselben übrig. Die Wissenschaft nun, welche sich mit der Untersuchung der Eigenschaften und der gegenseitigen Abhängigkeit der verschiedenen Formen beschäftigt, heifst Geometrie.“

„Um nun die Eigenschaften und die wechselseitige Abhängigkeit der verschiedenen Gattungen geometrischer Gröfsen zu erforschen, ist es vor allem nötig, die Art und Weise kennen zu lernen, auf welche sie im Raume untereinander verbunden sein, oder mit andern Worten die Lage zu untersuchen, welche sie gegeneinander einnehmen können.“

(Geometrie der Lage „es liegt in der Natur ihrer Aufgabe, dafs sie die geometrischen Gröfsen vornehmlich als gar nicht oder wenigstens als unvollständig begrenzt betrachtet.“)

„Das zweite Hauptgeschäft der Geometrie besteht in der Vergleichung ihrer Gröfsen untereinander.“ „Die Vergleichung selbst aber mufs der Natur der Sache nach notwendig auf einen doppelten Gegenstand gerichtet werden, nämlich auf die Gestalt und auf die Quantität oder den räumlichen Gehalt der geometrischen Gröfsen.“ (Geometrie der Gestalt, Geometrie des Mafses.)

„Das dritte Hauptgeschäft der Geometrie besteht in der Ermittlung der gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen geometrischen Gebilde, d. h. in der Aufsuchung der Grundgesetze, nach denen alle die mannigfachen Erscheinungen der Raumwelt untereinander verbunden sind und sich organisch auseinander entwickeln. Diese Grundgesetze umfassen aber nicht allein die Lage, sondern auch die Gestalt und die Quantität der geometrischen Gröfsen; ihre Aufsuchung und spezielle Anwendung bildet daher für die oben erwähnten drei Hauptteile der Geometrie den gemeinsamen Vereinigungspunkt und gewissermafsen die Krone der ganzen Wissenschaft.“ (Organische Geometrie.)

Crelle, Über Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie. — Berlin 1816.

p. 18: „Die Geometrie ist die Wissenschaft der Gröfsen im Raume, die durch ihre Grenzen bestimmt werden.“

p. 30: „Der Gegenstand der Geometrie ist also der Raum.“

p. 31: „Der Raum kann begrenzt oder ganz oder zum Teil unbegrenzt sein. Nur durch seine Grenzen ist ein Raum von dem andern verschieden und zwischen denselben Grenzen liegt nur ein und derselbe Raum. Deshalb hat die Geometrie insbesondere die Grenzen der Räume zum Gegenstande.“

Schmitz-Dumont, Die math. Elem. der Erkenntnis ...

„Die Geometrie operiert mit den Begriffen des Nebeneinander, d. h. mit den beiden heterogenen Begriffen Entfernung und Richtung. Entfernung oder Gröfse ist allgemein durch die arithmetischen Zeichen symbolisierbar; die Richtung aber nur unter bestimmten Bedingungen.“

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie etc. — Berlin 1826.

p. 1. „Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Gröfse und Gestalt begrenzter Räume."

Nachdem sodann die Gebilde des Raumes betrachtet sind, heifst es:

p. 3. „Das Verfahren, durch welches man die Gröfse und Gestalt der Figuren vergleicht, das heifst, durch welches man, vermittelst Figuren, von deren Gröfse und Gestalt man ursprüngliche Vorstellungen hat, von beliebigen Figuren klare Vorstellungen ausdrückt, heifst Messen. Dieses Messen ist der Gegenstand der Geometrie. Deshalb heifst sie auch Mefskunst."

Crelle teilt die Geometrie an späterer Stelle in zwei Haupt- und verschiedene Unterabteilungen ein. Die erste Hauptabteilung ist der Lehre von den geraden Linien und den Ebenen gewidmet (sowohl Figuren, wie Körper werden betrachtet), die zweite Hauptabteilung den krummen Flächen und Linien.

Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. — Braunschweig 1888.

p. 1. „Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgröfsen."

p. 4. „Die Geometrie beschäftigt sich nicht nur, wie oben angegeben, mit den unter Raumgröfsen bestehenden Beziehungen, sondern auch mit der Zusammenstellung gegebener Raumgröfsen zu einer vorgeschriebenen Form, d. h. mit Konstruktionen."

Francoeur, Vollst. Lehrkurs der reinen Mathematik. Übersetzt von Külp. — Bern, Chur u. Leipzig 1843.

Ersten Bandes drittes Buch: Elementar-Geometrie.

p. 3. „Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche sich zur Aufgabe macht, die Ausdehnung zu messen, und die Formen und Eigenschaften derselben näher zu betrachten."

---

v. Forstner, Grundrifs der Elemente d. r. Math. — Berlin 1826.

„Eine stetig ausgedehnte oder kontinuierliche Gröfse ist eine solche Gröfse, deren Teile so zusammenhängen, dafs der Anfang des einen Teiles zugleich das Ende des andern Teiles ist.

Die Geometrie ist derjenige Teil der reinen Mathematik, welcher sich mit den stetig ausgedehnten Gröfsen beschäftigt."

Frankenbach, Lehrb. d. Math. I. — Liegnitz 1889.

„Die Geometrie beschäftigt sich mit der Darstellung und Betrachtung räumlicher Gebilde."

Grunert, Lehrb. d. Math. II. — Brandenburg 1870.

„Die Geometrie, im weitesten Sinne des Wortes, ist die Wissenschaft vom Raume."

Man ersieht aus den mitgeteilten Zitaten, dafs die Elementar-Geometrie im wesentlichen als Geometrie des Mafses aufgefafst wird. Nur Arneth in seinem Systeme der Geometrie und Bretschneider in seinem Lehrgebäude der niederen Geometrie gehen auch auf die Geometrie der Lage ein. Besonders die Ausführungen des letzteren erscheinen durch ihre Ausführlichkeit und die Zusammenfassung der beiden Zweige der Geometrie in der „organischen Geometrie" von besonderem Werte. Im Vergleich mit den übrigen Zitaten ist ferner von origineller Bedeutung dasjenige von Schmitz-Dumont. Dadurch, dafs hier die Begriffe festgestellt werden, mit denen die Geometrie bei der Betrachtung ihrer Objekte operiert, wird auf das Natürlichste die Einteilung gewonnen. Operieren wir mit dem Begriff der Entfernung allein, so handelt es sich um Geometrie des Mafses, operieren wir mit demjenigen der Richtung allein, so haben wir Geometrie der Lage. Werden die Beziehungen zwischen beiden aufgesucht, so entwickelt sich die organische Geometrie.

III. Kapitel.

Die Raumgebilde.

(Körper, Fläche, Linie, Punkt.)

Während das Gebiet der Geometrie der Raum selbst als solcher ist, so haben wir jetzt kennen gelernt, dafs der Gegenstand der Geometrie die Raumgröfsen sind, wobei das Wort Gröfsen in rein mathematischem Sinne zu nehmen ist, d. h. ohne den Inbegriff der Ausdehnung. Es ist deshalb auch immer mehr ein anderer Ausdruck aufgekommen, durch den eine falsche Vorstellung oder eine Verbindung falscher Eigenschaften mit dem Begriff glücklich vermieden wird. Es ist an Stelle des Ausdrucks Raumgröfsen der Ausdruck Raumgebilde oder räumliches Gebilde getreten.[1])

Die räumlichen Gebilde sind nun folgende: Körper, Fläche, Linie, Punkt.[2]) Die Anordnung in dieser Weise ist als die einzig berechtigte oben nachgewiesen.[3]) Die verschiedenen Ansichten und Erklärungen werden dazu dienen, die Erkenntnis des Gegenstandes der Geometrie klar zu legen.[4]) Von zwei

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang des ersten Kapitels.

[2]) Man vergl. hierzu: Donadt, Das mathematische Raumproblem etc. p. 32: „Schon Hume erklärt in seiner Abhandlung über die menschliche Natur, dafs wir uns Linien nicht anders vorstellen als in Flächen und diese nur in Körpern und diese wieder nur im Raume, wir abstrahieren nur von einer resp. zwei Abmessungen.

Wir sind durchaus nicht im Stande, wie Erdmann meint, den Raum zu Körpern, Flächen, Linien zu verengen, wir können höchstens Flächen und Linien als Verengungen von Körpern auffassen, denn wir können uns Flächen und Linien nur als Grenzen von Körpern, d. h. an Raumgebilden vorstellen."

[3]) Kapitel I. — Man vergleiche Hoffmann, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen in H. Z. III.; p. 141: „Er (Euklid) fällt so zu sagen mit der Thüre ins Haus, fängt gerade mit dem Schwierigsten, mit dem Punkte an, während uns doch die gesamte Natur darauf hinweist, die Raumwissenschaft mit dem Körper zu beginnen."

[4]) Die ausführliche Behandlung der Grundbegriffe möge ihre Rechtfertigung u. a. finden in den Ausführungen des Aufsatzes: Mahnung an die Mathematiker von Dir. Dr. Müller (Neustrelitz) in H. Z. VI. p. 261 —278. — Der Aufsatz enthält aufserordentlich viel Beherzigenswertes

besonderen Gebilden wird besonders gehandelt werden müssen, von der Ebene und der geraden Linie; diese sind noch mannigfach der Gegenstand der besonderen Betrachtung gewesen, dafs sie aufserhalb der allgemeinen Behandlung einen Platz für sich haben müssen.

Die schon oben vorangestellte Erklärung des geometrischen Körpers sei der Übersicht halber hier noch einmal erwähnt.

Geometrischer Körper ist der durch Abstraktion gewonnene ideelle Raumteil, dessen reelles Substrat ein Körper der uns umgebenden Sinnenwelt ist.[1]) Beim Körper haben wir — aber auch nur bei ihm allein — wirklich reelle Bilder in der Aufsenwelt,[2]) so dafs man behaupten darf, der Körper allein ist wirklich vorstellbar, rein anschaulich auch in der äufseren Anschauung.[3])

---

und sollte keinem Lehrer der Mathematik unbekannt sein. — Man vergl. II. Z. VI.; p. 457/58. — Ferner V. Schlegel, Über Ziele und Methoden der Schulgeometrie; in H. Z. VII. p. 179—184.

[1]) Die analytische Definition des festen Körpers ist folgende: Helmholtz, Gött. Nachr. 1868.

p. 199: „Zwischen den $2n$ Koordinaten eines jeden Punktpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle kongruenten Punktpaare die gleiche ist.“

[2]) Helmholtz, Göttinger Nachrichten, 1868.

p. 198: „.... da wir es in der Geometrie stets mit idealen Gebilden zu thun haben, deren körperliche Darstellung in der Wirklichkeit immer nur eine Annäherung an die Forderungen des Begriffes ist, und wir darüber, ob ein Körper fest, ob seine Flächen eben, seine Kanten gerade sind, erst mittels derselben Sätze entscheiden, deren thatsächliche Richtigkeit durch die Prüfung zu erweisen wäre.“

[3]) Helmholtz, Pop.-wiss. Vortr. III. 2. „Über den Ursprung etc.“

p. 28: „Unter dem viel gemifsbrauchten Ausdrucke „sich vorstellen“ oder „sich denken können, wie etwas geschieht“ verstehe ich — und ich sehe nicht, wie man etwas anderes darunter verstehen könne, ohne allen Sinn des Ausdrucks aufzugeben —, dafs man sich die Reihe der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne, die man haben würde, wenn so etwas in einem einzelnen Falle vor sich ginge. Ist nun gar kein sinnlicher Eindruck bekannt, der sich auf einen solchen nie beobachteten Vorgang bezöge, wie für uns eine Bewegung nach einer vierten, für (jene) Flächenwesen eine Bewegung nach der uns bekannten dritten Dimension

Bretschneider geht noch weiter und spricht auch der Vorstellung der Körper jede Anschaulichkeit ab, wie aus dem folgenden Zitat hervorgeht, das hier seine Stelle finden möge, wenn auch einige Punkte darin berührt werden, die erst später besprochen werden.

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie.

„Unbegrenzte geometrische Gröfsen können wir schon ihrer endlosen Ausdehnung halber nicht sinnlich darstellen, aber ebensowenig ist dies mit den vollbegrenzten möglich. Wir vermögen nur uns Bilder derselben zu verschaffen, indem wir physische Körper so formen, dafs ihre räumliche Ausdehnung der der abzubildenden geometrischen Gröfsen möglichst genau entspricht, und dafs diejenigen Abmessungen, welche etwa den letzteren mangeln, so gering als möglich ausfallen. Dies thun wir z. B., wenn wir einen Punkt durch ein Tüpfelchen Tusche, eine Linie durch einen feinen Faden, eine Fläche durch einen dünnen Papierbogen u. s. w. darstellen. Alle diese Dinge haben stets drei Abmessungen und können schon um deswillen keine wahren geometrischen Punkte, Linien und Flächen sein. Allein auch nicht einmal geometrische Körper lassen sich auf diese Art zur Anschauung bringen, weil sich die Form von dem zu dem physischen Körper verwendeten Stoffe nicht trennen läfst. Es fehlt daher allen diesen Bildern gleich die erste Eigenschaft geometrischer Gröfsen, die Durchdringlichkeit."

Es läfst sich diesen Ausführungen eine gewisse Berechtigung nicht absprechen; so ist z. B. auch die Farbe eine Eigenschaft, die sich von der Vorstellung eines Körpers schwer oder gar nicht trennen läfst. Es scheint mir aber der Schwerpunkt bei diesen Betrachtungen auf einem anderen Gebiete zu liegen; nicht darauf kommt es an, ob wir die physischen Eigen-

---

des Raumes wäre, so ist ein solches „Vorstellen" nicht möglich, ebensowenig als ein von Jugend auf absolut Blinder sich wird die Farben „vorstellen" können, wenn man ihm auch eine begriffliche Beschreibung derselben geben würde."

Man vergl. Lotze, Psychologie p. 327 und Deinhardt, Gymnasialunterricht p. 177 oben.

schaften von einem Körper wegdenken können, sondern darauf, dafs es wirklich räumliche oder körperliche Gebilde in der Aufsenwelt giebt, dafs wir von den mathematischen Körpern wirklich reelle Bilder haben: was diese Bilder sonst noch, aufser der Körperlichkeit, für Eigenschaften haben, das kommt gar nicht in Betracht; deshalb gelingt es uns auch, in geringerem oder höherem Mafse, von diesen Eigenschaften zu abstrahieren und uns geometrische Körper vorzustellen.

Da es sich bei der Betrachtung von Körpern auch um ein Messen derselben handelt, so möge gleich hier erwähnt werden, dafs wir dieses Messen der nach allen Richtungen ausgedehnten Körper nur nach drei Hauptrichtungen auszuführen haben, um über die Gröfse der Körper unterrichtet zu sein. Diese drei Hauptrichtungen heifsen Dimensionen oder Abmessungen."[1])

Die Grenzen des Körpers heifsen Flächen.[2]) Diese sind nicht Teile des Körpers; denn, wenn sie Teile des Körpers wären, so müfsten sie wiederum von dem übrigen Körper abgegrenzt sein und es würde sich um die Grenzen dieser Teile handeln und so in infinitum. Die Grenzfläche eines Körpers gehört weder zum Körper selbst, noch zu dem Raum, von dem der Körper abgegrenzt ist; sie ist die Stelle, wo Körper und übriger Raum aneinander stofsen; eine Fläche nimmt keinen Teil des Raumes ein, die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit (Festigkeit) läfst sich ihr auch nicht einmal in Gedanken beilegen. Die Flächen sind daher vollständig unvorstellbar. Auf alle äufsere und innere Anschaulichkeit mufs jetzt verzichtet werden. Unser ganzes Anschauungsvermögen ist ein dreidimensionales.[3])

[1]) Man vergleiche den Artikel Dimension.

[2]) Jedoch mufs auch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dafs es Flächen giebt, welche nicht vollständige Körper begrenzen, gewissermafsen aus dem Raum ein Stück ausschneiden, sondern die nur einen Teil des Raumes von dem anderen Teil des Raumes abgrenzen; dahin gehört z. B. die unbegrenzte, unendliche Ebene.

[3]) Wundt, System der Philosophie, p. 121: „Zunächst kann eine solche Gliederung nur an einem Ganzen der Anschauung vorgenommen werden, welches eine Mannigfaltigkeit von Elementen enthält, die zu einander in bestimmten Relationen stehen, um dann weiterhin auch auf

Gebilde von einer anderen Anzahl von Dimensionen können wir uns weder in der äufseren noch in der inneren Anschauung vorstellen, wir können sie nur in Gedanken setzen. An die Stelle von Vorstellungen treten Begriffe. Für die Flächen giebt es keine reellen Bilder. Die Flächen begrenzen also Raumteile, d. h. Körper, trennen sie von dem übrigen Raum. Der Körper liegt auf der einen Seite von der Fläche aus, der Raum auf der anderen. Die Fläche selbst aber hat keine Seiten; man kann nicht von einer linken und rechten Seite der Fläche sprechen, sondern nur sagen links von ihr, rechts von ihr oder oberhalb und unterhalb; bei der Fläche selbst fallen gewissermafsen linke und rechte (resp. obere und untere, vordere und hintere) Seite zusammen.[1]) Da die Flächen Grenzen nicht Teile des Körpers sind, so nehmen sie auch wie gesagt gar keinen Raum ein, sie sind genau genommen eine Negierung des Raumes.[2]) Wenn sie trotzdem als nach zwei Dimensionen ausgedehnt angesehen und demgemäfs betrachtet werden, so ergiebt sich hier eine aufserordentliche Schwierigkeit. Sie sind zugleich Null und doch auch zugleich Gröfsen, denn wir können sie teilen und können sie aus Teilen zusammensetzen; aber da sie nach einer Dimension keine Ausdehnung haben, so sind sie Null, denn wir können andererseits uns Flächen aufeinander gelegt denken in beliebiger Anzahl, ohne dafs ein Körper

---

solche Mannigfaltigkeiten übertragen zu werden, welche nur begrifflich zu denken, in der Anschauung aber blofs in der Form stellvertretender Vorstellungen festzuhalten sind.“ Zu den Mannigfaltigkeiten, die nur „begrifflich zu denken“ sind, gehören aber unstreitig auch die zweifache und einfache und nullfache Mannigfaltigkeit des Raumes: Flächen, Linien und Punkte.

[1]) Hierzu zu vergleichen: E. Müller, Elemente der Geometrie. I. 8. 16—17. 25. 31—32. — II. Einleitung.

[2]) Auf folgende Veranschaulichungsmittel, deren eines sich im Lehrbuch von Wunder findet, während das zweite Reidt in seiner Anleitung zum mathematischen Unterricht anführt, sei ganz besonders hingewiesen, da sie von vorzüglichem Werte erscheinen. 1) In einem Glase Wasser und Öl: die Grenzfläche ist weder Wasser noch Öl; auch nicht etwa irgend etwas den Raum erfüllendes, sondern nur der Ort (die Stelle), wo Wasser und Öl aneinander grenzen, die Berührungsfläche. — 2) Wie weit kann man in einen Körper hineinstechen, ohne aus der Grenzfläche heraus zu gehen?

daraus entsteht: man würde deshalb auch richtiger sagen, in einander legen; es handelt sich also um Gröfsen ganz besonderer Art. Aufserdem ist der Ausdruck, dafs die Flächen nur nach zwei Richtungen (Hauptrichtungen) ausgedehnt sind (zwei Dimensionen haben), in dieser Form offenbar falsch. Es mufs vielmehr heifsen, ein unendlich kleiner Teil einer Fläche (ein Flächenelement, vergl. weiter unten) ist nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt (hat nur zwei Dimensionen) [analog ein unendlich kleiner Teil einer Linie (ein Linienelement) ist nur nach einer Dimension ausgedehnt (hat nur eine Dimension). Man denke nur an die Raumkurven, so wird man diesen Ausführungen zustimmen müssen]. Nur eine Fläche giebt es, von der wir schlechtweg sagen können, sie ist nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt, das ist die Ebene, und nur eine Linie giebt es, die nur nach einer Dimension ausgedehnt ist, das ist die gerade Linie. Für alle anderen Raumgebilde von der Art der Flächen und Linien gilt diese Bestimmung nur in der oben präzisierten, genauen Ausdrucksweise. Doch von der Ebene und geraden Linie soll weiter unten ausführlich gehandelt werden.

Die Grenzen der Flächenteile sind Linien. Was von den Flächen gesagt ist, gilt auch von den Linien, sie sind unvorstellbar, ohne reelle Bilder.[1]) Sie begrenzen Flächenstücke,

---

[1]) Man vergl. J. C. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Math. etc. III.

„Während wohl niemand ernstlich behaupten wird, er habe von einer Fläche eine anschauliche Vorstellung, ohne auf beiden Seiten den Raum mit vorzustellen, so dürfte doch mancher glauben, mit der Linie verhalte es sich anders; d. h. diese sei auch unabhängig von irgend einer Fläche, deren Grenze sie ist, gewissermafsen frei im Raume schwebend vorstellbar. Dies ist aber nur Selbsttäuschung. Ich frage jeden auf sein Gewissen, ob das wirklich eine Linie ist, was er so anschaulich und unabhängig von jeder Fläche frei im Raume sich vorzustellen vermag, und nicht vielmehr ein sehr dünner Faden, dem, wenn auch nur eine sehr geringe, aber doch immer noch eine Breite zukommt, und der gänzlich verschwindet, sobald die Breite verschwindet? . . . Wie in der empirischen, so kann auch in der reinen Anschauung eine Linie nur als Grenze einer Fläche oder eines Teils derselben vorgestellt werden. Sie ist durchaus nichts als die Grenze einer Fläche.

d. h. Felder, trennen diese von der übrigen Fläche. Das Feld liegt auf der einen Seite von der Linie aus, die unendliche Fläche auf der anderen. Auch die Linie hat selbst keine Seiten (vergl. die Ausführungen bei den Flächen).

Die Grenzen der Linienteile sind Punkte. Ihnen fehlt auch die letzte noch übrig gebliebene Dimension. Sie sind ohne jegliche Ausdehnung. Auch sie sind unvorstellbar, ohne reelle Bilder. Sie begrenzen Linienteile, d. h. Strecken, trennen diese von der übrigen Linie. Auf der einen Seite vom Punkt aus liegt die Strecke, auf der anderen die übrige Linie. Der Punkt selbst hat keine Seiten (s. o.).[1])

Beim Punkte findet sich gewöhnlich in den Lehrbüchern die Bemerkung, dafs er unvorstellbar sei. Als wenn nicht auch schon Flächen und Linien unvorstellbar wären. Dafs wir uns Bilder, aber keine reellen, von diesen Raumgebilden machen, geschieht auf die Weise, dafs wir einen Körper uns vorstellen, der nach einer resp. zwei Dimensionen im Verhältnis zu der resp. den übrigen entweder sehr klein oder sehr grofs gedacht wird. Dabei behalten wir aber immer die Vorstellung eines Körpers. Ein Gebilde, das nach einer oder mehreren Dimensionen wirklich Null ist, bleibt absolut unvorstellbar. Je gröfser wir die bleibenden Dimensionen im Verhältnis zum weggedachten annehmen, um so mehr nähert sich die Vorstellung des Körpers derjenigen einer Fläche oder Linie, aber in sie übergehen würde sie erst beim wirklichen Nullwerden einer Dimension — und dies ist in der Anschauung, auch in der inneren, unmöglich.[2])

Im Verlaufe der Ausbildung des geometrischen Denkens kam man nun so weit, dafs man auch die nicht vorstellbaren Raumgebilde Fläche, Linie, Punkt — nicht vorstellbar, weil sie keine reellen Bilder besitzen — als selbständige Gebilde auffafste, sie von ihrer ursprünglichen Eigenschaft als Grenzen befreite und ihre logische Möglichkeit annahm und damit überhaupt die logische Möglichkeit von Gebilden von anderer, aller-

---

[1]) Vergl. Du Bois-Reymond, Reden. I. Folge. 1886. p. 112: „Der Punkt ist die im Raume vorgestellte Negation des Raumes."

[2]) Vergl. Herbart, Psychologie p. 122.

dings geringerer als dreifacher Mannigfaltigkeit.[1]) Aber die Betrachtung dieser Gebilde von zweifacher, einfacher und nullfacher Mannigfaltigkeit ist im dreifachen Raume logisch möglich und in gewisser Hinsicht mit der Anschauung in einen gewissen Einklang zu bringen, und so werden diese Gebilde auch schon in der Elementargeometrie als Begriffe, die unserem Denken a priori gegeben sind, angesehen werden dürfen.[2])

Es dürfte nicht ohne Interesse sein an dieser Stelle auf die bekannte Hypothese Helmholtz' von zweidimensionalen Wesen näher einzugehen, um die Folgerungen aus ihr auf ihre Richtigkeit zu prüfen und festzustellen, inwiefern diese Betrachtungen von Wert sind für die Erörterung der räumlichen Grenzgebilde, wenn wir dieselben als selbständige Objekte unserer geometrischen Betrachtung auffassen. Es heifst da:

Helmholtz, Popul.-wissensch. Vorträge. III. 2, „Über den Ursprung etc.“[3])

p. 27. „Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und sich bewegen. Wir nehmen an, dafs sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas aufserhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber Wahrnehmungen, ähnlich den unsrigen, innerhalb der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen. Wenn sich solche Wesen ihre Geometrie ausbilden, so würden sie ihrem Raume natürlich nur zwei Dimensionen zuschreiben. Sie würden ermitteln, dafs ein Punkt, der sich bewegt, eine Linie beschreibt, und eine Linie, die sich bewegt, eine Fläche, was für sie das vollständigste Raumgebilde wäre, was sie kennen. Aber sie würden

---

[1]) Man vergleiche das obige Zitat aus Wundt, System der Philosophie.

[2]) Man vergleiche hierzu die Ausführungen von Schmitz-Dumont in „Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie“ im Zitat auf Seite 183, Fufsnote 1.

[3]) Man vergleiche hierzu den Aufsatz von Gilles: Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, in H. Z. XI, p. 5—24 und die dazu gelieferten Bemerkungen in demselben Bande p. 274—281. p. 435/36.

sich ebensowenig von einem weiteren räumlichen Gebilde, was entstände, wenn eine Fläche sich aus ihrem flächenhaften Raume herausbewegte, eine Vorstellung machen können, als wir es können von einem Gebilde, das durch Herausbewegung eines Körpers aus dem uns bekannten Raume entstände."

An diese Ausführungen Helmholtz' möchte ich folgende Bemerkungen knüpfen. Wenn diese Helmholtzschen Flächenwesen sich Linien aus der Bewegung von Punkten entstanden vorstellten, so würde schon hier ein Unterschied mit unserem Vorstellungsvermögen zu tage treten, denn offenbar würden sich diese Flächenwesen doch nur solche Linien vorstellen können, die auf ihrer Fläche möglich sind, nicht aber Linien ganz beliebiger Art. Alle sogenannten doppeltgekrümmten Linien z. B. würden ausgeschlossen sein. Denken wir uns die Fläche krumm, so würden unter Umständen unsere geraden Linien wegfallen. Ferner würde die Unendlichkeit der Linien nicht allgemein gedacht werden können, z. B. bei Flächenwesen, die auf der Oberfläche eines Würfels lebten, würden die geraden Linien am Ende ihres Flächenstückes begrenzt sein. Und wie müfsten sie über ihre Fläche selbst denken? Ein bewufstes Übergehen auf eine andere Fläche des Würfels ist unmöglich anzunehmen, da hiermit dreidimensionales Denken verbunden sein würde. Ferner würden diese Flächenwesen nicht ermitteln, dafs die Linien bei der Bewegung Flächen beschreiben, wie Helmholtz meint, sondern diese Fähigkeit müfste dahin ganz bedeutend eingeschränkt werden; sie würden nur ermitteln können, dafs Linien Stücke ihrer Fläche beschreiben. Sie würden sich überhaupt keine beliebigen, unbegrenzten Flächen resp. unendliche Flächen denken oder vorstellen können, sondern nur die eine einzige, auf der oder in der sie leben.[1])

Unseren Körpern entsprechen bei diesen Flächenwesen Figuren, aber nicht solche von beliebiger Art, sondern solche, die der Bedingung unterworfen sind, Teile der bestimmten Fläche zu sein.

---

[1]) Denn die Vorstellung beliebiger unendlicher Flächen ist nur im dreidimensionalen Raume möglich und dieser fehlt ja dem Denken der Flächenwesen.

Wir sehen also, dafs die Vorstellungen dieser Flächenwesen von den unsrigen ganz verschieden sein würden. Die Vorstellungen derselben würden von einer grofsen Zahl von Bedingungen abhängig sein, die Bewegung würde nicht mehr eine beliebige sein, sondern nur eine solche, die den Gesetzen der Fläche unterworfen wäre, kurz das Vorstellen oder Denken geometrischer Gebilde ist mit dem unsrigen nicht zu vergleichen und es fallen damit die Folgerungen, die Helmholtz aus seinen Ausführungen zieht.

Diese meine Bedenken werden bestätigt durch folgende Stellen der Helmholtzschen Abhandlung selbst:

p. 30. „Es ist klar, dafs die Wesen auf der Kugel bei denselben logischen Fähigkeiten, wie die auf der Ebene, doch ein ganz anderes System geometrischer Axiome aufstellen müfsten, als jene und wir selbst in unserem Raume von drei Dimensionen."

Ebenda: „Daraus geht hervor, dafs an einer solchen Fläche (der Oberfläche eines eiförmigen Körpers) sich nicht einmal ein so einfaches Raumgebilde, wie das Dreieck ist, ohne Änderung seiner Form von einem Orte nach jedem andern fortbewegen lassen würde."[1])

Ebenda: „Daraus folgt weiter, dafs es eine besondere geometrische Eigenschaft einer Fläche ist, wenn sich in ihr liegende Figuren ohne Veränderung ihrer sämtlichen längs der Fläche gemessenen Linien und Winkel frei verschieben lassen, und dafs dies nicht auf jeder Art von Fläche der Fall sein wird. Die Bedingung dafür, dafs eine Fläche diese wichtige Eigenschaft habe, hatte schon Gaufs in seiner berühmten Abhandlung über die Krümmung der Flächen nachgewiesen. Sie ist, dafs das, was er das „Mafs der Krümmung" genannt hat $\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right)$, überall längs der ganzen Ausdehnung der Fläche gleiche Gröfse habe."

---

[1]) Wie ist es mit unendlich kleinen Gebilden? Ziehen wir endliche Gebilde in Betracht, so würden doch schon Strecken, d. h. hier Stücke von Linien, nicht ohne Änderung ihrer Form bewegt gedacht werden können; diese ganze Betrachtungsweise ist aber überhaupt nur für ein dreidimensional denkendes Wesen möglich.

p. 35. „Wir als Bewohner eines Raumes von drei Dimensionen und begabt mit Sinneswerkzeugen, um alle diese Dimensionen wahrzunehmen, können uns die verschiedenen Fälle, in denen flächenhafte Wesen ihre Raumanschauung auszubilden hätten, allerdings anschaulich vorstellen,[1]) weil wir zu diesem Ende nur unsere eigenen Anschauungen auf ein engeres Gebiet zu beschränken haben. Anschauungen, die man hat, sich wegdenken ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen ist sehr schwer. Wenn wir deshalb zum Raume von vier Dimensionen übergehen, so sind wir in unserem Vorstellungsvermögen gehemmt durch den Bau unserer Organe und die damit gewonnenen Erfahrungen, welche nur zu dem Raume passen, in dem wir leben."

Der Ansicht Helmholtz', dafs wir uns die Raumanschauungen flächenhafter Wesen anschaulich vorstellen könnten, „weil wir zu diesem Ende nur unsere eigenen Anschauungen auf ein engeres Gebiet zu beschränken haben", kann ich nicht zustimmen. Auch bin ich nicht der Meinung, dafs „Anschauungen, die man hat, wegdenken" leicht ist. Im Gegenteil, ich halte dies für thatsächlich unmöglich und halte daran fest, dafs unser anschauliches Denken nur ein dreidimensionales ist, dafs die Mannigfaltigkeiten von geringerer Anzahl ebensowenig vorstellbar sind, als die von höherer,[2]) und dafs es sich bei räum-

[1]) Jedenfalls aber doch nur so lange, als wir uns die betreffende Fläche anschaulich vorstellen können. Abgesehen davon geht aus den Helmholtzschen Ausführungen meines Erachtens nicht hervor, dafs wir uns die Raumanschauungen flächenhafter Wesen anschaulich vorstellen könnten. Allerdings die Fälle, in denen die Flächenwesen ihre Raumanschauung auszubilden hätten, sind anschaulich vorstellbar — man vergleiche die obigen Ausführungen über die Vorstellbarkeit der räumlichen Gebilde —, damit aber noch keineswegs diese Raumanschauungen selbst.

[2]) Vergl. Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889.

„Ja selbst unsere Zeichnungen von Linien und Figuren auf einer Ebene entsprechen ja keineswegs genau den reinen geometrischen Konstruktionen unserer Phantasie, sondern sind nur mehr oder weniger grobe Veranschaulichungsmittel für das Auge. Und der einzige Unterschied

lichen Gebilden von anderer Dimensionenzahl als drei um begriffliche, nicht anschauliche Denkobjekte handelt. Der Gegenstand erscheint wichtig genug, um noch folgendem Zitat zu den Ausführungen von Helmholtz aus Donadt, Das mathematische Raumproblem, hier eine Stelle zu geben, das von besonderem Werte erscheint. Die Äufserung Kants: „Wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen geknüpft seien, welche unsere Anschauungen einschränken und für uns allgemein gültig sind," weist mit Recht darauf hin, dafs die Denkbedingungen für anders denkende Wesen wahrscheinlich ganz andere sind und dafs den Ausführungen Helmholtz' stillschweigend die Voraussetzung zum Grunde liegt, dafs die Flächenwesen ebenso denken wie wir, mit dem einzigen Unterschiede, dafs ihnen die dritte Dimension verschlossen ist. Aber diese Voraussetzung ist ganz unberechtigt, wenigstens liegt kein Grund für ihre Annahme vor. Der Denkprozefs anderer Wesen kann ein von dem unsrigen wesentlich verschiedener sein, so dafs er infolge dessen auch mit unserem Denken gar nicht erfafst werden könnte.

Weitere berechtigte Einwürfe gegen die Hypostasierung solcher fingierten Wesen und ihrer Geometrie haben Weifsenborn (Über die neueren Ansichten vom Raume und den geometrischen Axiomen; Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, herausgegeben von Avenarius. Bd. II. p. 222) und Krause in seiner Schrift „Kant und Helmholtz" (Lahr 1878) gemacht. — Eine fernere Würdigung der Helmholtzschen Hypothese findet sich bei Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. „Man brauchte

---

zwischen den oben genannten Arten von Konstruktionen und denjenigen, welche den vierdimensionalen Raum zu Hilfe nehmen, besteht darin, dafs wir uns die letzteren eben nicht vorzustellen und daher auch nicht, ihrer richtigen Beschaffenheit entsprechend, zu veranschaulichen im Stande sind."

Es scheint mir von Bedeutung, auf den Ausdruck „Veranschaulichungsmittel", den Schlegel hier gebraucht, besonders aufmerksam zu machen, da darin liegt, dafs es sich nicht um eine thatsächliche Anschauung — weder eine äufsere noch innere — handelt.

sich ja nur Flächenwesen vorzustellen, in deren Welt eine körperliche Ausdehnung nicht bestand; sollten diese nicht auch nur in zwei Dimensionen vorstellen? Die empiristische Auffassung forderte dies apriorisch; weil ja alle Vorstellung nur durch Wahrnehmung entstehen sollte.

Es wurde hier wieder einmal Vorstellung und Begriff verwechselt, verleitet durch das alte Erbteil der Sprachmetaphysik, welche von „geometrischen Vorstellungen" spricht.

Allerdings, wenn solche Wesen nur Wahrnehmungen in zwei Dimensionen machen, so wird auch die einfache sinnliche Reproduktion nur diesen gleiche Vorstellungen erzeugen;[1]) denken werden sie jedoch wie jedes denkende Wesen überhaupt, nämlich nach drei Dimensionen, (oder es handelt sich um einen von unserem Denken völlig verschiedenen und daher für uns durch unser Denken nicht zu erkennenden Denkprozeſs. D. Verf., vergl. meine obigen Ausführungen) und je nach Veranlassung auch die zweidimensionalen Wahrnehmungen zu dreidimensionalen Vorstellungen kombinieren können."

Schmitz-Dumont geht dann näher auf die Planimetrie dieser Flächenwesen ein, die er als eine ideelle schildert, die sich nirgendwo auf die ihnen wahrnehmbaren Gegenstände anwenden läſst, und identifiziert ihr Axiomensystem mit dem unseren. Besonders geht der Beweis noch darauf aus, daſs

---

[1]) Der gemessene Kreis ist kein Gegenstand, sondern ein Begriff (gezeichnete Linien sind keine graphischen Repräsentationen von Vorstellungen, sondern von Begriffen); denn eine geometrische Vorstellung ist unmöglich. Was man gemeiniglich geometrische Vorstellung nennt, hat weder Farbe, noch sonst ein sinnliches Merkmal, weil die Geometrie vorschreibt, von allen solchen zu abstrahieren. Wir können die Vorstellung eines Körpers, eines Stückes Papier, Holz oder feurige Linien in dieser oder jener geometrischen Figur fassen; die geometrische Figur als solche ist aber niemals etwas anderes, als die leere Form jener Vorstellung, eine Kombination von Denkbegriffen; und läſst sich deshalb nicht vorstellen, sondern nur denkend bestimmen. Das übliche „ich stelle mir eine Figur anschaulich vor" heiſst logisch gesprochen: ich stelle mir einen Gegenstand vor, konstruiert aus sehr dünnen Drähten oder leuchtenden Bändern, oder ein Raumvolum, begrenzt von sehr dünnen Blättern; aber so, daſs deren Begrenzungen möglichst genau den geometrischen Begriffen von der geforderten Figur entsprechen."

die ideellen Flächenwesen eine ideelle gerade Linie sich konstruieren würden, welche mit der unsrigen identisch sein würde, „weil sie allein dem logischen Begriffe identische Richtung genügt.“

Ich habe mich mit der Widerlegung der Helmholtzschen Hypothese eingehender beschäftigt, um darzuthun, dafs es sich bei den räumlichen Gebilden Fläche, Linie und Punkt nicht um anschauliche Vorstellungen, sondern um Begriffe unseres Denkens handelt, schon da, wo sie als Grenzen, vielmehr aber noch da, wo sie als selbständige Gebilde betrachtet werden.

Werden diese Raumgebilde losgetrennt von der ursprünglichen Vorstellung an und für sich betrachtet, so erweitert sich zwar damit im allgemeinen der Begriff der geometrischen Gröfse, des räumlichen Gebildes, aber ohne dafs wir dadurch etwa neue Eigenschaften erhalten; noch ferner liegt es, dafs sie durch diese Betrachtungsweise an Anschaulichkeit gewinnen, wie aus den Ausführungen hervorgeht.

Durch die Betrachtungsweise der nicht körperlichen räumlichen Gebilde findet auch meine oben ausgesprochene Behauptung, dafs der Punkt das abstrakteste Element der Geometrie sei, ihre Bestätigung. Wir gelangen vom Körper zur Fläche, von der Fläche zur Linie, von der Linie zum Punkt, indem wir successive von einer Ausdehnung (Dimension) abstrahieren (eine Ausdehnung nach der andern zu Null werden lassen), so dafs also für den Punkt das gröfste Mafs von Abstraktion erforderlich ist.

Es erübrigt noch auf den Begriff Element näher einzugehen; wir verstehen unter Element eines räumlichen Gebildes einen unendlich kleinen Teil desselben, jedoch schon von der ganz bestimmten Art des entsprechenden Gebildes. Ein Flächenelement ist daher ein Stück Fläche, allerdings unendlich klein gedacht, aber doch schon von denselben Eigenschaften, die die Fläche selbst hat, also vor allen Dingen von zweifacher Ausdehnung. Es geht schon aus dieser allgemein gültigen Begriffsbestimmung hervor, dafs es falsch ist, den Punkt als das Raumelement zu bezeichnen. Der Punkt ist ein Element *κατ' ἐξοχήν*, das wir durch Integration zu nichts anderem

summieren können, als wieder zum Punkt. Der Punkt ist die absolute Negation des Raumes, seine Ausdehnung nach allen Richtungen gleich Null — und so wenig wie wir in der Arithmetik durch Addition von Null etwas anderes als Null erhalten, können wir durch Vervielfältigung des Punktes etwas anderes als den Punkt erhalten. Denken wir uns zwei voneinander getrennte Punkte, so wird, auch wenn sie nur durch einen unendlich kleinen Abstand getrennt sind, doch schon eben in diesem unendlich kleinen Abstand das Linienelement gedacht, und es handelt sich nicht mehr um den Begriff Punkt. Der Punkt hat in einer Beziehung mit dem, was er negiert, dem Raum, Ähnlichkeit, nämlich in der Gestaltlosigkeit. Wie wir den unendlichen Raum ohne Gestalt oder Form denken — denn sonst würden wir ja Grenzen denken — so ist auch der Punkt gestaltlos; wir können nicht von einem runden oder eckigen Punkte sprechen, und es wird sich empfehlen, hierauf im Unterrichte besonders aufmerksam zu machen, um das Wesen des Punktes klar zu legen. Die Extreme unendlicher Raum und Punkt berühren sich in der gemeinsamen Eigenschaft der Gestaltlosigkeit.

Ganz verschieden vom Punkte ist das Linienelement, es hat schon eine Dimension und durch Integration erhalten wir die Linie selbst oder ein Stück derselben, je nachdem wir die Grenzen der Integration wählen. Es fragt sich nun, ob das Linienelement auch schon als von der bestimmten Art der Linie gedacht werden müsse, ob es schon von bestimmter Gestalt ist, oder ob jedes Linienelement als gerade aufzufassen ist. Ich bin der Meinung, dafs schon das Element als von bestimmter Art zu denken ist, dafs also z. B. das Element der Kreislinie verschieden ist von dem Elemente der Ellipse oder demjenigen der geraden Linie. Die gegenteilige Meinung vertritt Helmholtz, wie aus der folgenden Stelle hervorgeht. In dem Aufsatze über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, in den Göttinger Nachrichten 1868, sagt er: „In der That sind die unendlich kleinen Flächenelemente einer beliebigen krummen Fläche alle als eben zu betrachten, und also alle einander kongruent, wenn von ihrer Begrenzung abgesehen wird.“

Helmholtz tritt dadurch in Widerspruch zu der an anderer Stelle zitierten Äufserung, dafs wir auf einem eiförmigen Körper ein Dreieck nicht von einem Orte an einen anderen bewegt denken können ohne Änderung der Form, sonst hätte er das unendlich kleine Dreieck ausdrücklich ausnehmen müssen. Ich trete, wie schon aus meinen Ausführungen bei der Betrachtung des Linienelementes hervorgeht, für die Meinung ein, dafs auch das Flächenelement schon eine besondere Gestalt oder Form habe — dieser Ausdruck darf nicht mifsverstanden werden; es handelt sich nicht darum, ob das Flächenelement dreieckig oder viereckig gedacht wird, sondern ob es eben oder von bestimmter Krümmung ist —; eine weitere Frage würde die sein, in welcher Gestalt — in anderem Sinne — das Flächenelement zu denken sei, als Dreieck, Viereck oder etwa als kleine Kreisfläche. Entsprechend der Betrachtung endlicher Figuren wird man die einfachste Gestalt zu wählen haben und das Flächenelement als Dreieck, ebenes oder sphärisches zu denken haben; je nachdem es sich um das Element einer Ebene oder einer krummen Fläche handelt. Vielleicht wäre es denkbar, das Flächenelement aller krummen Flächen als ein unendlich kleines Kugeldreieck aufzufassen im Gegensatz zum ebenen Flächenelement; aber schon hierbei würde eine Ungenauigkeit unterlaufen, die gerade bei diesen Betrachtungen vermieden werden mufs, da unstreitig der Ausspruch Riemanns wohl zu beachten ist: „Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen ins Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Kausalzusammenhangs.“

Man vergleiche hiermit auch den folgenden Ausspruch desselben Forschers:

„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Mafsverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dafs bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Mafsverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders-

woher hinzukommen mufs. Es mufs also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Mafsverhältnisse aufserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden."

Das Element des geometrischen Körpers ist identisch mit dem des Raumes; es handelt sich hier nur um die Grenzen der Integration. Fassen wir das hier in Betracht kommende Element als Raumelement auf, so ist sicherlich die Gestalt des Elementes ohne jegliche Bedeutung, und so wird es auch erlaubt sein von der Form des Körperelementes als einer wesentlichen Begriffsbestimmung abzusehen.

Als gemeinsamen Namen aller dieser Elemente, des Punktes, des Linienelementes, des Flächenelementes, des räumlichen (körperlichen) Elementes darf man wohl dann die Bezeichnung Raumelemente wählen, wobei man jedoch sich bewufst sein mufs der Bedeutung dieses Ausdrucks im Vergleich mit dem Raumelement.

Ist man vom Körper ausgehend zur Erkenntnis von Flächen, Linien und Punkten gekommen, indem man successive die Grenzen der Raumgebilde betrachtet hat, und hat man durch Abstraktion die Grenzgebilde Fläche, Linie und Punkt als selbständige Gebilde, als Raumelemente, gewonnen, so wird nun eine zweite Betrachtungsweise ihre Stelle finden dürfen, diejenige, die die Raumelemente auseinander durch Bewegung[1]) entstehen läfst.

Die hauptsächlichsten Darstellungen dieser Betrachtungsweise werden aus den Zitaten hervorgehen. Sie sind wesentlich nicht voneinander verschieden und wir können in Übereinstimmung mit denselben kurz etwa folgendes aufstellen.

Denkt man sich einen Punkt in Bewegung und nimmt an, dafs er eine Spur seines Weges hinterläfst, so wird diese Spur eine Linie sein.[2])

---

[1]) Man vergleiche den Artikel Bewegung; doch sei auch hier schon auf Wundt, System der Philosophie, p. 127—134, hingewiesen.

[2]) Der Punkt beschreibt eine Linie, so lautet der gewöhnliche kürzere Ausdruck für den genaueren, wie er im Text steht. Genommen ist der Ausdruck wohl von dem Beispiel, das wir zu dieser Erklärung beifügen. Der Ausdruck, der Punkt erzeugt eine Linie, dürfte am besten vermieden

(So hinterläfst ein sich rasch bewegender glühender Körper auf der Netzhaut ein Bild der verschiedenen Lagen, die er nach und nach eingenommen, und wir haben infolge dessen das Bild einer Linie.)

Denkt man sich eine Linie (Stück einer Linie, Strecke) in Bewegung, so wird diese unter Umständen, wenn man wiederum annimmt, dafs eine Spur ihres Weges zurückbliebe, eine Fläche beschreiben.

Denkt man sich eine Fläche (Stück einer Fläche) in Bewegung, so wird diese unter Umständen einen Körper beschreiben.

Der Körper beschreibt wieder einen Körper.[1])

Warum der breitere Ausdruck „Denkt man sich in Bewegung" anstatt „bewegt sich" gewählt ist, wird aus den folgenden Betrachtungen hervorgehen, die vorläufig hier eine Stelle finden mögen, während später dem Begriffe der Bewegung noch eine ausführlichere Behandlung zu teil werden soll.

Die mechanische Bewegung kann im wesentlichen eine dreifache sein, die Ortsveränderung eines starren Körpers z. B. fliegender Ball, eine drehende Bewegung um eine Axe z. B. Thüren, Blätter eines Buches (Rotation), drittens eine drehende Bewegung um einen Punkt z. B. Bewegung eines an einen Faden gebundenen Steines.

Zur Kenntnis einer mechanischen Bewegung gehört, dafs wir ihre Richtung, Geschwindigkeit, Dauer (Gröfse) kennen. In der Geometrie abstrahieren wir von zweien dieser Eigenschaften vollständig, von der Geschwindigkeit und der Dauer,

---

werden, da er zu falschen Vorstellungen Anlafs geben könnte; es sei übrigens darauf hingewiesen, dafs der Ausdruck: denkt man sich einen Punkt in Bewegung, zwar allgemein gebräuchlich, aber ungenau ist. — S. Artikel Bewegung und die folgenden vorläufigen Betrachtungen.

[1]) Es mufs aber ausdrücklich erwähnt werden, dafs weder alle Flächen als durch Bewegung von Linien, noch alle Körper als durch Bewegung von Flächen beschrieben angesehen werden können. Dafs noch hinzugesetzt ist „unter Umständen" wird gerechtfertigt durch die Erwägung, dafs z. B. eine gerade Strecke in ihrer Richtung bewegt gedacht, keine Fläche beschreiben würde, sondern die betreffende Gerade, der sie angehört. Als Beispiel diene ein fliegender Pfeil, also eine Strecke, die wiederum eine Linie beschreibt.

und betrachten nur die Richtung, wir können es vielleicht so ausdrücken, dafs wir sagen, es handelt sich nur um das Resultat der Bewegung, nicht um den Vorgang selbst. Damit sind wir auch über die Schwierigkeit, die raumlosen Raumgebilde uns bewegt zu denken, hinweg, denn in Wirklichkeit können wir uns einen abstrakten Raumteil, einen mathematischen Körper gar nicht in Bewegung denken, viel weniger noch eine Fläche, Linie oder einen Punkt. Wir können uns nur ein kongruentes Raumgebilde an einer andern Stelle des Raumes vorstellen; es handelt sich also in der Geometrie eigentlich nur darum ein bestimmtes Gebilde uns an einer bestimmten Stelle im Raume zu denken, an einer andern Stelle des Raumes, als an der, wo wir es erst betrachtet haben[1]. Da die mathematischen Raumgebilde, wie auseinandergesetzt ist, dem Gesetze der Undurchdringlichkeit nicht unterworfen sind, so können wir uns ferner an ein und derselben Stelle mehr als ein Raumgebilde denken, können in Gedanken Raumgebilde zur Deckung bringen (Kongruenz).

Von den Betrachtungen, die sich an diese Art der Bewegung knüpfen, vollständig verschieden sind nun diejenigen, die sich nicht mit Raumveränderungen, um uns kurz so auszudrücken, starrer Gebilde beschäftigen, sondern die Gebilde selbst in Bewegung sehen, so z. B. die Veränderungen, die mit einer Figur vor sich gehen, wenn wir ein Element derselben verändern. Diese letzteren Erwägungen geben uns eine Reihe von Sätzen als Grundvorstellungen aus der reinen Anschauung, die bisher eines weitläufigen Beweises für bedürftig angesehen wurden.

---

[1]) Nicht handelt es sich um eine Bewegung im eigentlichen Wortsinne, z. B. wenn gesagt wird, dafs ein Punkt eine Linie beschreibe, so haben wir uns das genau nicht so zu denken, dafs der Punkt sich von der Stelle bewege und nach und nach eine Reihe von Lagen annehme, — denn das ist ja nicht möglich, da der Punkt ja nichts ist, als eine Stelle, ein Ort im Raume — sondern wir betrachten in Wirklichkeit eine Reihe von unendlich vielen verschiedenen Punkten in ihrer Gesamtheit, indem wir sie in Gedanken zum Bild einer Linie zusammenfassen. Es erscheinen daher die Ausdrücke der neueren Geometrie P u n k t r e i h e und T r ä g e r der Punktreihe besonders glücklich gewählt.

Als hauptsächlichstes Merkmal der Bewegung geometrischer Gebilde hat jedenfalls zu gelten, dafs wir von der ursächlichen Kraft ganz abstrahieren, daher denn auch die Bewegung genau genommen nicht eine Bewegung der Objekte ist, sondern eine von dem denkenden Subjekt willkürlich dem geometrischen Gebilde substituierte Bewegung. Es wird später auf den Begriff der Bewegung noch tiefer eingegangen werden, hier mögen diese wenigen Bemerkungen genügen, um den Standpunkt des Verfassers im allgemeinen kurz zu charakterisieren.

Es folgen nun die Zitate:

August, L. d. M. I. — Berlin 1852.

„§ 1. Die Geometrie, d. i. Lehre von den Raumgröfsen, geht von gewissen Grundvorstellungen aus, welche im Bewufstsein eines jeden Menschen leicht hervorgerufen werden.

§ 2. Erste Grundvorstellung.

Die erste einfachste Grundvorstellung ist die des mathematischen Punktes, der sich von jedem noch so kleinen im Raume befindlichen Gegenstande dadurch unterscheidet, dafs er keinen Stoff und keine Gröfse, also auch keine Teile hat.

§ 3. Zweite Grundvorstellung.

Die zweite Grundvorstellung ist die der Linie, einer blofsen Länge ohne Breite, die man sich durch Bewegung eines Punktes im Raume, als Spur desselben, entstanden denken kann. [Wenn der in Bewegung gedachte Punkt seine Richtung nie ändert, so entsteht eine gerade Linie; wenn er nie dieselbe Richtung behält, so entsteht eine krumme Linie.]

§ 4. Dritte Grundvorstellung.

Die dritte Grundvorstellung ist die Fläche, welche Länge und Breite hat. Gewisse Flächen können durch Fortbewegung einer Linie entstanden gedacht werden. [Ist dabei die bewegte Linie eine gerade und wird sie so bewegt, dafs jeder ihrer Punkte wieder eine gerade Linie aber in einer andern Richtung bildet, so ensteht eine ebene Fläche oder Ebene. Eine Fläche ist krumm, wenn kein Teil derselben eben ist.]

§ 5. Vierte Grundvorstellung.

Die vierte Grundvorstellung ist die des geometrischen Körpers d. i. eines von allen Seiten begrenzten Raumes, der also ausser der Länge und Breite noch eine dritte Ausdehnung

in die Tiefe oder Höhe hat. Man gelangt zu der Vorstellung des mathematischen Körpers, wenn man sich von einem besondern physikalischen d. h. in der Natur ausser uns wahrgenommenen Körper den Stoff wegdenkt, so dafs nur noch die Gestalt im Raume zurückbliebe.

§ 6. Man sieht leicht ein, dafs die Grenzen eines geometrischen Körpers Flächen, dafs die Grenzen der Flächen Linien und die Grenzen der Linien Punkte sind."

Ich habe diese Auseinandersetzungen in dieser ausführlichen Weise angeführt, weil erstens der Gang hier gerade der entgegengesetzte des unsrigen ist, und zweitens weil uns dieselben als Typus einer grofsen Anzahl von Lehrbüchern dienen können. Es soll nun auf dieselben näher eingegangen werden.

Ad § 1. Der Ausdruck „leicht hervorgerufen werden" dürfte als ein glücklicher zu bezeichnen sein, wenn damit angedeutet werden soll, dafs die Grundvorstellungen a priori im menschlichen Bewufstsein vorhanden sind und nur der Weckung bedürfen; allerdings müfsten dann die Grundvorstellungen selbst andere resp. anders angeordnete sein als die vom Verfasser angegebenen.

Ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um gleich hier — ohne den nachherigen Betrachtungen über Ebene und gerade Linie vorzugreifen — meine Ansicht auszusprechen, dafs Ebene und gerade Linie allerdings Grundvorstellungen sind d. h. a priori im menschlichen Bewufstsein vorhandene Vorstellungen, dafs aber die Verallgemeinerung dieser Ansicht auf Flächen und Linien überhaupt durchaus unstatthaft ist. Damit ist zugleich mein Standpunkt gegenüber den Augustschen Grundvorstellungen ausgesprochen.

ad § 2. August bezeichnet als einfachste Grundvorstellung die des mathematischen Punktes. Es stimmt das damit überein, dafs er den Punkt als Grundvorstellung überhaupt ansieht und diese Ansicht liefse sich wohl an und für sich nicht eben bestreiten. Aber wir gelangen zu den gröfsten Schwierigkeiten, wenn wir nun aus diesem einfachsten Grundbegriff die andern systematisch entwickeln wollen. Aufserdem erscheint es ungeheuer schwierig, wenn wir den Punkt als

einen Grundbegriff[1]) oder als eine Grundvorstellung annehmen, für diesen Begriff eine positive Definition zu finden. Überall da, wo der Punkt definiert wird, anders als aus dem Grenzbegriff der Linie, ist die Definition eine negative, wie wir aus verschiedenen der folgenden Zitate sehen werden. Damit liegt aber die Unzulänglichkeit der Definition zu Tage und mit der Definition zugleich fällt die Möglichkeit des Punktes als erste Grundvorstellung. — August fügt ferner Eigenschaften an, die er für Definition ausgiebt — nebenbei ein Fehler, den wir ausserordentlich häufig finden, und der hauptsächlich zur Verwirrung der Grundbegriffe beigetragen hat — Eigenschaften, die dem Punkte nicht allein zukommen. Was den Ausdruck betrifft „er hat keine Gröſse, also auch keine Teile", so verweise ich auf meine obigen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

ad § 3. Im allgemeinen gilt auch hier, was ich zur Definition des Punktes bemerkt habe. Ausserdem, was lässt sich wohl denken unter den Worten „eine bloſse Länge ohne Breite"? Sind Länge und Breite hier als Qualitäten oder Quantitäten zu verstehen? Doch jedenfalls als Quantitäten, aber hier wird ja geantwortet auf die Frage, was ist eine Linie, wir könnten also nur eine Qualität bekommen, wenn es sich nicht um eine Definition handelte. — Die übrigen Worte des § 3 gehören in die Betrachtungen über die gerade Linie.

ad § 5. Aus den Worten des Verfassers „Man gelangt" bis zum Schluſs des § geht hervor, daſs auch er die Vorstellung des Körpers allein für möglich hält, denn bei Punkt, Linie und Fläche hat er eine derartige Angabe, wie man zur Vorstellung des räumlichen Gebildes gelange, unterlassen. Daſs dies richtig ist, wenn auch August es nicht ausdrücklich ausspricht, geht auserdem auch daraus hervor, daſs es in der That nichts in der Natur auſser uns Wahrgenommenes giebt, bei dem wir durch Wegdenken des Stoffs zur Vorstellung der Fläche oder der Linie oder des Punktes gelangten. —

[1]) Dieser Ausdruck ist der genauere; denn nicht um Grundvorstellungen handelt es sich, sondern um Grundbegriffe. Der mathematische Punkt ist ein durch Abstraktion erhaltener Begriff, keine Vorstellung.

ad § 6. Was hier als eine Folge der vorhergehenden Betrachtungen hingestellt wird, ist, wie nachgewiesen, das Ursprüngliche der Betrachtung, die Grundlage. Nach den Ausführungen von August ist es gar nicht leicht einzusehen, dafs die Flächen die Grenzen der Körper sind etc., sondern man bringt bei dieser Betrachtungsweise zu dem Begriffe, resp. der Grundvorstellung Fläche etwas ganz neues hinzu, was nicht einmal als eine allgemein gültige Eigenschaft aufgefasst werden darf: sonst würden durch diesen § 6 nachträglich die Fläche und die übrigen Grundvorstellungen als unselbständig hingestellt.

Baltzer, Elem. d. Math. — Leipzig 1874.

„1. Der Raum ist ohne Unterbrechung und über jede Grenze hinaus ausgedehnt. Ein Ort im Raume ohne Ausdehnung gedacht, heifst ein Punkt. Ein Ausgedehntes ist entweder eine Linie, oder eine Fläche, oder ein Raum im engeren Sinne (Körper, στερεόν, solidum).

Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Punkte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen. Eine Linie ist zu beiden Seiten eines auf ihr liegenden Punktes ausgedehnt (in die Länge), eine Fläche ist zu beiden Seiten einer auf ihr liegenden Linie ausgedehnt (in die Länge und Breite[1]), ein Raum ist zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt (in die Länge, Breite und Dicke); Linie, Fläche, Raum heifsen deshalb nach 1, 2, 3 Dimensionen ausgedehnt. Eine Linie kann als Bahn (Ort, τόπος) eines bewegten Punktes, eine Fläche als Bahn einer bewegten Linie, ein Raum als Bahn einer Fläche betrachtet werden."

„2. Linien werden begrenzt durch Punkte (Endpunkte), Flächen durch Linien (Umfang, περίμετρος, περιφέρεια), Räume durch Flächen (Oberfläche, ἐπιφάνεια, superficies), und haben zwischen ihren Grenzen bestimmte Gröfse. Die Gröfse einer

---

[1]) Genau genommen dürfte doch nur gesagt werden, dafs die Fläche zu beiden Seiten der Linie nach der Breite ausgedehnt sei, denn die Ausdehnung nach der Länge ergiebt sich doch schon daraus, dass sie entlang der ganzen Linie nach beiden Seiten ausgedehnt ist.

Linie heifst ihre Länge, die Gröfse einer Fläche ihre Fläche (Fächeninhalt, area, ἐμβαδόν, ἐπιφάνεια), die Gröfse eines Raumes sein Volum (Körperinhalt, volumen, capacitas, στερεόν); diese Grössen werden extensive genannt im Gegensatz zu nicht ausgedehnten (intensiven) Gröfsen."

Baltzer geht also auch, wie es früher allgemein üblich gewesen zu sein scheint, vom Punkt aus und bezeichnet ihn als „einen Ort im Raume ohne Ausdehnung gedacht". Man findet diese Erklärung auch bei andren nicht gerade selten und fast ebenso oft die im wesentlichen mit ihr übereinstimmende Erklärung des Punktes als einer blofsen Stelle im Raume.

Es kann nicht geleugnet werden, dafs beide Erklärungen auf den ersten Blick etwas Bestechendes haben und als sehr glücklich gewählt erscheinen. Wenn man aber genauer darüber nachdenkt, so handelt es sich doch nur um ein Spiel mit Worten, eine vielleicht zur Anschaulichkeit dienende Erklärung, aber keine wirkliche Definition.[1])

Es geht mit dieser Erklärung wie mit den andern Erklärungen des Punktes — wenn man ihn nicht aus dem Grenzbegriff der Linie erhält — sie enthält ein negatives Moment, die Bestimmung „ohne Ausdehnung im Raume gedacht". Ob wir nun dafür Punkt oder Stelle oder Ort sagen, bleibt an sich gleichgültig, wir haben es hier nur mit verschiedenen Ausdrücken (Worten) zu thun, aber nicht mit wirklichen Sacherklärungen.

Bei dem Ausgedehnten unterscheidet Baltzer nicht sofort nach den Dimensionen, sondern führt als ganz gleich nebeneinander Linie, Fläche, Raum an. Ebenso tritt in dem folgenden Satz: „Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Punkte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen" die Existenz einer mehrfachen Mannigfaltigkeit gar nicht hervor. Auch sonst scheint mir dieser Satz nicht glücklich zu sein, oder wenigstens der Ausdruck „unterscheiden". Ich mufs offen gestehen, dafs ich mich ver-

---

[1]) Dafs man im Unterrichte z. B. die Schüler durch derartige Bemerkungen, wie blofser Ort, blofse Stelle, zu einer anschaulichen Vorstellung des Punktes hinzuleiten suche, erscheint mir durchaus erlaubt; nur dürfen sie nicht als wirkliche Erklärungen angesehen werden.

geblich bemüht habe zu finden, welchen Sinn es haben soll, z. B. auf einer Fläche lassen sich unendlich viele Linien unterscheiden. Vielleicht „denken“? Das Wort „unterscheiden“ läſst fast den Gedanken aufkommen, als wenn die Fläche aus Linien zusammengesetzt sei.

Zu 2. möchte ich für eine schärfere Ausdrucksweise eintreten, die in den neueren Lehrbüchern auch fast allgemein gehandhabt wird, in den älteren aber fast durchweg vernachlässigt erscheint. Es ist der vielleicht bequeme, aber miſsverständliche Gebrauch des totum pro parte, Linie statt Teil der Linie (Strecke), Fläche statt Flächenteil (Feld), Raum für Raumteil (Körper).

Demnach müſste es dann heiſsen, nicht „Linien werden begrenzt durch Punkte“, sondern Linienteile werden begrenzt durch Punkte etc. Ebenso ferner: „Die Gröſse eines Linienteils heiſst seine Länge“ etc.[1])

Bartholomäi,[2]) Philosophie der Mathematik. p. 13. geht von den getrennten Dingen aus, deren Zusammenfassung den Begriff der Richtung hervorruft; aus dem letztern resultiert wiederum der Begriff der Distanz. Losgelöst von den Objekten wird die Distanz zu Null, verschwindet alle Ausdehnung, resultiert der Punkt.[3])

„Der Punkt ist also das absolut Einfache des Raumes, er ist räumlich, aber raumlos. Er ist bloſs der Ort, den es einem Etwas darbietet, das leere Bild, an welches ein Ding angeheftet werden kann.“

Vom Begriffe der Distanz (unendlich viele) gelangt Bartholomäi zum Begriffe des Körpers als des „Begriffes dessen, das nach allen Richtungen Distanzen zeigt.“

Vom Körper gelangt er zum Grenzpunkt, deren Gesamtheit er die Grenze nennt. Diese wird näher erörtert. Dann heiſst es: „Wird nun eine Grenze, welche vom Körper

[1]) S. oben.

[2]) Besprochen in Schl. Z. VI, 7.

[3]) Man vergleiche Kapitel V, worin ich mich ausführlich über die Begriffe Richtung und Abstand äuſsern werde.

abhängig ist, von demselben losgelöst, so entsteht dasjenige Räumliche, welches nicht nach allen Richtungen Distanzen hat."

Die philosophische Berechtigung dieser Betrachtungsweise möge hier unerörtert bleiben, für den Unterricht ist sie weder direkt, noch indirekt verwertbar, da hier zwei neue Begriffe vorausgesetzt werden, die in der Form, wie sie Bartholomäi giebt, jedenfalls für den Schüler unverständlich bleiben. Auch die Erklärung des Punktes leidet an schon bekannten Mängeln; der Zusammenhang aber der verschiedenen Raumgebilde ist in dieser Behandlung ganz aus dem Auge gelassen, Richtung, Distanz, Punkt, Körper, Fläche (und konsequenterweise weiter Linie, Punkt), wo liegt da der systematische Zusammenhang?

Beck, die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842. giebt die Erklärungen von Körper, Fläche, Linie und Punkt in dieser Reihenfolge ohne besonders Erwähnenswertes. Die Betrachtungsweise knüpft an die Grenzbegriffe an.

Becker, J. K., Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage.[1]) — Berlin 1877.

„Was wir als im Raume befindlich uns vorstellen oder wirklich darin wahrnehmen,[2]) ist entweder ein Körper, eine Fläche, eine Linie oder ein Punkt."

„Unter Körper verstehen wir einen allseitig begrenzten Teil des Raumes (einerlei, ob er mit Materie erfüllt oder leer ist). — Fläche heifst eine Stelle im Raume, die einen Teil desselben vom übrigen absondert, also z. B. die Grenze eines Körpers (dessen Oberfläche). Die Stelle, in der eine Fläche geteilt oder begrenzt wird, heifst Linie. Eine Linie endlich wird vom Punkte geteilt und begrenzt. Dieser ist selbst nicht mehr ausgedehnt, und wenn man von der Linie, welche er

---

[1]) Eine ausführliche Besprechung findet sich in H. Z. VIII. p. 411—420. — Dem Buche wird eine weite Verbreitung gewünscht. — Vergleiche: Beckers Replik in H. Z. IX, p. 17—20.

[2]) Dafs wir eine Fläche, Linie oder Punkt als wirklich im Raume befindlich wahrnehmen könnten, ist wohl zu viel behauptet.

begrenzt, abstrahiert, kann in ihm nichts mehr gedacht werden als eine ausdehnungslose Stelle im Raume oder an einem Raumgebilde, die sich von einer andern derselben Art nur noch der Lage nach unterscheiden kann."

Es werden dann noch die drei Dimensionen entwickelt.

Man sieht Becker hat sich förmlich auf den Ausdruck „Stelle" kapriziert, in allen Erklärungen finden wir diesen vor. Wie schon oben erwähnt, scheint mir dadurch die eigentliche Schwierigkeit der Sacherklärung bei den Grundbegriffen mehr umgangen als gelöst, nun gar wenn wir das Wort Stelle auch bei der Definition von Fläche und Linie verwenden; denn die Stelle ist hier gar nicht denkbar ohne dafs man schon eine Vorstellung von Fläche und Linie hat.[1]) Stelle und Punkt sind identisch, aber, wenn wir eine Fläche als eine Stelle bezeichnen, so wird dabei die Vorstellung (Begriff) der Fläche vorausgesetzt, denn es handelt sich hier um eine Form der Stelle, etwas was an und für sich gar nicht im Begriff Stelle liegt. Ich erinnere an meine obigen Ausführungen über den Punkt; wie man bei ihm (d. h. bei der Stelle *κατ' ἐξοχήν*) von jeder Form oder Gestalt abstrahiert, — denn mit dem Begriff der Form oder Gestalt ist unerlässlich die Vorstellung der Ausdehnung verbunden — also nicht von einem vieleckigen oder runden Punkt sprechen darf, ebensowenig ist es möglich die Stelle mit Linie oder Fläche zu identifizieren, weil wir damit der Stelle eine Form geben würden.

Becker fährt fort:

„§ 2. Nicht der Teil des Raumes oder die Stelle in demselben, als welche uns ein Körper, eine Fläche oder Linie erscheint, ist Gegenstand geometrischer Betrachtung, sondern die Gestalt (Figur), unter der dieser Raum begrenzt oder jene Stelle im Raume ausgedehnt erscheint."

Auch diese Erklärung mufs mit gewisser Vorsicht aufgefafst werden, scheint es doch fast, als wenn Stelle und Raumteil identifiziert würden, was jedenfalls nicht geschehen darf.[2])

---

[1]) Oder genauer ausgedrückt, dafs wir uns des Begriffes Fläche etc. klar bewufst sind.

[2]) Denn die Stelle ist ausdehnungslos, direkte Negation des Raumes.

Becker, J. K.,[1]) Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 4. Flächen, Linien und Punkte können nicht nur an Körpern, als deren Grenzen, wahrgenommen, sondern auch selbständig als Stellen (Örter) im Raume gedacht werden.

Behl, Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. Hildesheim 1886.

„Denkt man sich einen beliebigen Teil des Raumes allseitig begrenzt, so wird dieser allseitig begrenzte Teil des Raumes „Körper" genannt. Während der Raum eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen (Dimensionen) gestattet, fasst man bei den Körpern diese unendlich vielen Richtungen in drei zusammen, nämlich in Länge, Breite und Höhe."

„Die Begrenzungen der Körper sind die Flächen. Diese sind aber nicht als zu den Körpern gehörig zu betrachten, sondern sie sind etwas für sich selbst Bestehendes.[2]) Während die Körper nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, tritt bei den Flächen eine Dimension zurück, sie sind nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt, nach der Länge und Breite. Die Grenzen der Flächen sind die Linien ......"

„Der mathematische Punkt ist nur etwas Gedachtes; er existiert nur in der Vorstellung."

Behl läfst vollständig im Unklaren, wie man von den unendlich vielen Richtungen im Raume zu den drei Richtungen des Körpers gelangt, warum man gerade drei herausgreift.[3])

---

[1]) Man vergleiche auch: Becker, J. C., Die Grundlagen der Geometrie. — Schl. Z. XX. 445. — und: Becker, J. C., Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. — Schl. Z. XVII, 314; besprochen ist das Werk in H. Z. X. p. 422—427.

[2]) Das ist doch per primum nicht richtig.

[3]) Auch ist die gewählte Ausdrucksweise geeignet, zu irrtümlicher Auffassung zu verleiten. Nicht nur im Körper ist von einem Punkte aus eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen möglich, sondern sogar auch noch in der Fläche. Eine genauere Untersuchung würde auf den Unterschied von einfacher und mehrfacher Unendlichkeit (Mannigfaltigkeit) Bezug nehmen müssen. Jedenfalls ist auch noch in der Fläche eine Bewegung nach unendlich vielen Richtungen möglich.

Hier ist offenbar eine Lücke in der Erläuterung, wodurch allerdings eine Schwierigkeit leicht übersprungen wird. Wenn Behl sagt, dafs die Flächen nicht als „zum Körper gehörig zu betrachten“ sind, so meint er wohl, dafs sie nicht als Teile des Körpers aufzufassen sind. Denn de natu gehören die Flächen allerdings zum Körper und sind nicht ursprünglich, wie Behl sagt, als „etwas für sich selbst Bestehendes“ aufzufassen, so wenig wie Linien und Punkte. Schliefslich sagt Behl vom Punkte, er sei nur etwas Gedachtes, er existiere nur in der Vorstellung: gilt denn von mathematischen Körpern, von der Fläche und Linie etwas anderes? Existieren diese etwa wirklich? Sie sind doch ebenso wie der Punkt nur etwas Gedachtes und existieren, wie der Punkt, auch nicht einmal in der Vorstellung.[1]) Der Punkt steht in seinem Verhältnis zur menschlichen Vorstellung auf derselben Stufe wie Flächen und Linien, sie sind allesamt unvorstellbar, weil keine reellen Bilder derselben existieren; anders ist es mit dem mathematischen Körper.

Brewer, Lehrbuch der Geometrie — Düsseldorf 1822.

Nach der üblichen Erklärung vom Körper und dem Übergang zur Fläche als der Grenze des Körpers fährt Brewer fort:

„Die Schwierigkeit, welche die Anfänger bei dem Begriffe der geometrischen Fläche finden, rührt daher, dafs sie sich dieselbe abgesondert von dem Körper, unter irgend einem körperlichen Bilde vorstellen wollen.

Allein es ist unmöglich, sich dasjenige unter einem körperlichen Bilde vorzustellen, dessen Wesen darin besteht, dafs es kein Körper ist. Die geometrische Fläche ist wirklich, aber nur an den Körpern; sie läfst sich ebensowenig von dem Körper trennen, als sich die Grenze vom Begrenzten trennen läfst.“

„Legt man zwei genau abgeschliffene Lineale mit der flachen Seite aufeinander, so werden sie sich überall berühren; das, was sie trennt, ist eine geometrische Fläche im strengsten Sinne des Wortes.“[2])

---

[1]) Wenn sie als selbständige Gebilde aufgefasst werden.

[2]) Man vergleiche das oben angeführte Beispiel von Wasser und Öl in einem Gefäfse.

„Obschon wir durch keines unserer Werkzeuge eine geometrische Linie abgesondert von der Fläche darstellen können, so giebt es doch an den von uns physisch dargestellten Linien wirklich geometrische, z. B. die linke oder rechte Seite einer Bleistiftlinie ist eine geometrische Linie.“[1])

Dronke, Die Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach, — geht vom Punkte aus, der „keine Ausdehnung, sondern nur eine Lage im Raume“ hat.[2])

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850. — entwickelt die Raumgebilde vom Körper[3]) ausgehend, als Grenzen. — Er fährt dann fort:

§ 4. „Körper, Flächen und Linien können vergröfsert und verkleinert werden und sind also Gröfsen. Der Punkt, welcher nicht vergröfsert oder verkleinert werden kann, ist demnach keine Gröfse; er kann nur gedacht werden[4]) und bezeichnet blofs eine Stelle im Raume.“

Euklid, Elemente. — ed. Dippe. Halle, — geht bekanntlich vom Punkte aus, den er definiert:

„Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“ Dafs diese Definition ungenügend und unhaltbar, ist schon daraus erwiesen,

---

[1]) Die Darstellung Brewers stimmt mit meinen Ausführungen im wesentlichen überein; auch hier wird der Hauptpunkt der Schwierigkeit darin gefunden, dafs eben nur Körper vorstellbar sind und dafs alle vermeintlichen Vorstellungen von Flächen, Linien und Punkten nichts anderes als körperliche Bilder oder stellvertretende Vorstellungen sind.

[2]) Die Definition des Punktes ist nicht ohne Geschick umgangen.

[3]) Der definirt wird als: „eine Gröfse, welche nach drei Richtungen ausgedehnt ist.“ „Ein physischer Körper ist zugleich ein geometrischer, aber nicht umgekehrt.“ — Diese Bemerkung ist recht gut.

[4]) Flächen und Linien können auch nur gedacht werden. — Darauf dafs Flächen und Linien nicht ganz beliebig — nach allen Richtungen — vergröfsert resp. verkleinert werden können: auf diese Hauptschwierigkeit, die zugleich die Raumgebilde als Gröfsen ganz besonderer Art charakterisiert, wird nicht eingegangen.

dafs sie nur ein negatives Moment enthält, das aufserdem dem Punkt nicht einmal allein zukommt. Ebenso sind die folgenden Definitionen von Linie und Fläche wenig klar, aber es ist hier, wie ich in der Einleitung hervorgehoben, zu bedenken, dafs Euklids Elemente sicher kein Schulbuch sein sollten, sondern für schon ausgebildete Mathematiker bestimmt waren. Inwiefern die Erklärungen in dieser Hinsicht zu beurteilen sind, möge hier unerörtert bleiben.

Kober spricht sich in einem Aufsatz in der Hoffmannschen Zeitschrift, Band I, p. 228—236 über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe aus, den er mit folgenden Worten einleitet: „Die Geometrie soll durch die Schärfe ihrer Entwicklungen den übrigen Wissenschaften als Muster dienen; es ist also vom wissenschaftlichen, wie ganz besonders vom pädagogischen Standpunkte unabweisbare Forderung, dafs alle Sätze und Erklärungen vollkommen klar gedacht und korrekt ausgedrückt, dafs die ersten Grundwahrheiten zur vollen Evidenz und geistigen Befriedigung des Schülers gebracht werden müssen.“

Es werden dann folgende Definitionen des Punktes verworfen: 1. „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“ (Euklid).

Kober wendet sich gegen diese Definition erstens wegen ihrer sprachlichen Unvollkommenheit und zweitens wegen ihrer Inhaltsleere, da sie viel zu allgemein ist. Es heifst dann weiter: „Ferner spricht diese Definition eine blofse Negation aus; bevor man aber negieren kann, mufs man Vorstellung und Begriff haben von dem, was man negiert, man müfste also hier die teilbaren geometrischen Gebilde bereits kennen.“

2. „Ein Punkt ist, was keine Ausdehnung hat.“

3. „Punkt ist, was keine Gröfse hat.“

Diese Definitionen sind im wesentlichen mit denjenigen Euklids identisch und unterliegen daher denselben Einwendungen.[1])

Auch Hoffmann selbst widmet in seiner Zeitschrift unter dem Titel: Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen,

---

[1]) Man vergleiche: Friedlein, Untersuchung der sogenannten Definitionen Hero's, in H. Z. II. p. 180.

den Grundbegriffen ausführliche Betrachtungen,[1]) aus denen hier das Wesentlichste wiedergegeben werden soll. Zuerst handelt es sich um die Euklidische Definition des Punktes. „Dies ist eine Definition mit verneinender Bestimmung, sie ist also fehlerhaft; sie sagt nur was der Punkt nicht ist, aber nicht was er ist.

„Überdies ist die Definition in Ermangelung des Gattungsbegriffes zu weit. Vergl. Drobisch Logik § 119, 4." In einer längeren Anmerkung polemisiert Hoffmann bei dieser Gelegenheit gegen „die gangbare Ansicht, dafs der Punkt ohne Ausdehnung und Gestalt" sei, entsprechend seinen Ausführungen in der Vorschule.[2]) — Dann wird Euklids Definition der Linien besprochen. Hoffmanns Bemerkung, dafs „die Erklärung so klingt, als gäbe es auch eine Linie mit Breite" scheint mir nicht zuzutreffen, dagegen ist es richtig, wenn er sagt: „Wenn dem Begriff Linie das Merkmal Breite überhaupt und schlechterdings nicht zukommt, dann hat es keinen Sinn, dieses Merkmal im Denken wegzunehmen, es zu negieren."

Die spätere Definition Euklids, die Grenzen der Linien sind Punkte, erkennt Hoffmann zwar als positiv an, spricht ihr aber die Berechtigung ab, „da sie nur erkläre, was ein Ding (Punkt) an einem andern (Linie) oder in Beziehung auf ein andres ist, nicht aber, was es an sich sei." Hieran schliefsen sich unter Berufung auf Trendelenburg Bemerkungen gegen die „gangbare Ansicht", die die Raumgebilde (nur) als Grenzen auffafst. Besonders stehe dieser Auffassung die Erzeugung von Gebilden durch Bewegung entgegen.[3]) Es heifst gegen Ende des Artikels: „Zuvörderst fehlt Euklid die metaphysische Grundlage, die Entwicklung der Eigenschaften des Raumes, ohne welche in unserer Zeit ein Grundlegung der Geometrie gar nicht mehr möglich ist."

Speziell mit dem Punkt beschäftigt sich auch eine kleinere

---

[1]) H. Z. III. p. 114—143. — Man vergl. den offenen Brief E. Müllers an Hoffmann in H. Z. III. p. 370—375. — ferner Hoffmann: Zu den geometrischen Grundbegriffen; in H. Z. XVI. p. 339/42.

[2]) Man vergleiche das betreffende Zitat und meine Anmerkungen dazu.

[3]) Man vergleiche meine eigenen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Abhandlung von Fresenius,[1]) worin er „Rechenschaft ablegt über den Gedankengang, der ihn zu folgender Definition des Punktes verleitet hat“:

„Er (der Punkt) ist im Raume das objektive Abbild der im Subjekt empfundenen Unteilbarkeit des Bewufstseins.“ Als entscheidend bezeichnet Fresenius die Beantwortung der Frage: „Welchen Einflufs auf die Art, wie uns die ganze Aufsenwelt erscheint, hat der subjektive, der Einzelstandpunkt, den das Ich einnimmt?“ Der Artikel schliefst mit den Worten: „der obige Satz ist allerdings keine Definition des Punktes. Aber dafs dieser Satz die Erklärung enthalten dürfte, wie wohl einzig eine so bestimmte und allgemein anerkannte Thatsache eines Orts im Raume, der absolut keinen Teil des Raumes ausmacht, in unser Bewufstsein gelangen konnte, das mufs ich noch immer festhalten. Einer Definition im strengen Sinne scheint mir allerdings, wie gesagt, der Punkt nicht fähig zu sein. Sie wäre Abgrenzung von Dingen gleicher Gattung. Er aber gehört wohl zu keiner Gattung, sondern ist sui generis und ein Ursprüngliches.“

Fabian,[2]) Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876, sagt vom Punkt „er bildet keinen Teil des Raumes und besitzt keine Ausdehnung.“ Da diese Bemerkung bei den Flächen und Linien nicht gemacht wird, so mufs angenommen werden, dafs Flächen und Linien nach der Ansicht Fabians Teile des Raumes bilden, d. h. nach der eigenen Erklärung Fabians Körper. Das ist doch ein arger Widerspruch. Man sieht, dafs man bei den Grundbegriffen ungeheuer vorsichtig sein mufs, da selbst durch eine Auslassung oder durch einen

[1]) In H. Z. IV. p. 350—354. — Man vergleiche: Fresenius: Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur. Entwurf zu einer genetischen Schulmethode der Elementargeometrie. — Besprochen in H. Z. VII. p. 64—67. — Es heifst in der Rezension: „Nirgends wird definiert, nur angeschaut,“ und an einer andern Stelle: „Der Verfasser ist kein wissenschaftlicher Skrupulant, sondern nimmt diese Definitionen (der aus der Anschauung abgeleiteten Begriffe von Körper, Fläche, Linie, Punkt) einfach, wie sie sich dem beschauenden Geiste ergeben.“

[2]) Besprochen in H. Z. VII. p. 296—299.

an sich richtigen Zusatz ein Mifsverständnis hervorgerufen werden kann.

Dafs Fabian dies nicht wirklich so verstanden wissen wollte, geht aus einer späteren Stelle hervor, wo er sagt: „Ein Punkt kann aus keinem Stoffe gemacht, er kann nur gedacht werden.“ „Ebensowenig kann eine Linie aus einem Stoffe gemacht oder auch nur gezeichnet werden. Man kann sie nur in Gedanken begreifen.“[1])

Féaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Paderborn 1882. — geht vom Punkte aus und läfst die übrigen Gebilde durch Bewegung entstehen, ohne überhaupt auf die Grenzbeziehungen einzugehen. Bei der Definition des Punktes fügt er hinzu „der Punkt ist in der Raumlehre gleichsam das, was die Null in der Zahlenlehre ist.“ Ob diese Anmerkung eine glückliche ist und dieser Vergleich geeignet, den Begriff Punkt klarer zu machen, scheint mir doch zweifelhaft, wenn auch die Berechtigung eines derartigen Vergleiches anerkannt werden soll.[2])

Frischauf,[3]) Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

„Da die Fläche Grenze eines Körpers ist, so hat sie zwei Seiten,[4]) eine gegen den Körper zugewandte und eine von demselben abgewandte. Dasselbe gilt auch von der Linie

1) Die Bezeichnung der räumlichen Gebilde als Begriffe unserers Denkens ist die allein richtige; der falsche Ausdruck Vorstellungen — der aus Bequemlichkeit vielleicht mehr, als aus wirklicher Überzeugung meist angewendet wird, — sollte möglichst vermieden werden.

2) Doch müfste diese Vergleichung schon oder auch bei Fläche und Linie angestellt werden.

3) Besprochen in H. Z. II. p. 57—61.

4) Man vergleiche hierzu meine Ausführungen über den Begriff der Seite bei den Flächen, Linien und Punkten. — Was man sich unter den beiden entgegengesetzten Seiten eines Punktes zu denken habe, ist mir unklar. Bei der Fläche ist diese Betrachtung ja in gewissem Sinne richtig — wenn man sich des eigentlichen Begriffes Seite bewufst ist, wird man vor falscher Auffassung bewahrt — aber bei Linie und Punkt verliert sie jede Berechtigung: wenigstens dürfte man dann doch nicht von den beiden entgegengesetzten Seiten sprechen.

und dem Punkte. Diese beiden Seiten werden entgegengesetzte Seiten genannt."

Während zuerst die räumlichen Gebilde aus dem Begriff der Grenze entwickelt werden, wird dann auch ihre Erzeugung durch Bewegung angegeben.

Gauss, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Bunzlau 1885.

„Der Raum ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil des Raumes von dem andern trennt, heifst eine Fläche."

„Jede Fläche ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil der Fläche von dem andern trennt, heifst eine Linie."

„Jede Linie ist teilbar. Dasjenige, was einen Teil einer Linie von dem andern trennt, heifst ein Punkt."

„Jeder Punkt ist unteilbar."

„Die beiden Teile einer Linie, welche durch einen Punkt voneinander getrennt werden, heifsen die Seiten des Punktes. Die Linie erstreckt sich zu beiden Seiten des Punktes in die Länge; sie hat eine Dimension: Länge."

Analog wird denn auch für Linien und Flächen der Ausdruck „Seiten" gebraucht; jedenfalls ein eigentümlicher Gebrauch, der sich wohl kaum empfehlen dürfte.[1])

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

Nach Betrachtung der Flächen etc. als Grenzen heifst es, „die Grenzen einer Raumgröfse geben nur an, wo diese Raumgröfse ihr Ende hat, ohne selbst ein Teil dieser Raumgröfse zu sein. Daraus folgt: „Es kann kein Teil eines Körpers eine Fläche, kein Teil einer Fläche eine Linie, kein Teil einer Linie ein Punkt sein, weshalb sich auch aus Flächen kein Körper, aus Linien keine Fläche, aus Punkten keine Linie zusammensetzen läfst."

Die Entstehung der höheren (mehrfach dimensionalen) Gebilde durch Bewegung der um 1 niederen wird dann noch

---

[1]) Man vergleiche die vorhergehende Anmerkung.

wegung. Da wo ein Gebilde ruht ist seine Stelle; wenn diese in Bezug auf ein anderes Gebilde bestimmt wird, heifst sie seine Lage."

Bei der genaueren Betrachtung der Gebilde durch Bewegung entstanden heifst es unter anderem:

„Denkt man sich einen Punkt stetig bewegt und fafst man die Lagen, in welchen er sich nacheinander befindet, alle zusammen, so gewinnt man die Vorstellung einer Linie: unter Linie versteht man also die Gesamtheit der Lagen eines bewegten Punktes, den sog. geometrischen Ort desselben."[1])

Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884.

Nach der Erklärung von Flächen etc. als Grenzen heifst es:

„Die Körper, Flächen und Linien sind die einzigen im Raume ausgedehnten Dinge und heifsen daher Raumgröfsen." „Die Körper, Flächen und Linien können nach Gestalt, Gröfse und Lage miteinander verglichen werden. Die Punkte jedoch, als Grenzen von Linien, haben keine Gestalt und Gröfse, können demnach nur in Bezug auf ihre Lage miteinander verglichen werden."

„Hinterläfst ein Punkt bei seiner Bewegung eine Spur, so erzeugt er eine Linie" etc.

Hoffmann, J. C. V.,[2]) Vorschule der Geometrie. — Halle 1874 sagt unter anderem, indem er den Grundbegriffen sehr ausführliche Betrachtungen widmet:

---

[1]) Darauf, dafs genau genommen ein Punkt überhaupt nicht in Bewegung gedacht werden kann, wird gar nicht eingegangen. Nicht die Gesamtheit der Lagen eines und desselben Punktes giebt den geometrischen Ort, sondern die Gesamtheit aller verschiedenen Punkte, die einer bestimmten Bedingung genügen. Ebenso entsteht die Linie nicht durch Bewegung eines Punktes, sondern dadurch, dafs das denkende Subjekt eine Vielheit von verschiedenen Punkten als einheitliches Gebilde erfafst; die Punktreihe wird in Gedanken identifiziert mit ihrem Träger, der Linie. Man vergleiche weiter oben die kurzen Bemerkungen über Bewegung und später den Artikel „Bewegung".

[2]) Besprochen in H. Z. V. p. 237—243.

„Willst du dir aber die Fläche abgesondert vom Körper (isoliert) vorstellen, so kann sie dir schon ein feines Papierblatt veranschaulichen; denke dir aber die Dicke desselben, die doch ohnehin schon sehr gering ist, so unermeſslich (unendlich) klein, daſs, wenn man sie noch kleiner oder das Blatt noch dünner machen wollte, die ganze Fläche verschwinden (oder der Null gleich werden) würde (man sagt auch, die Dicke grenzt an Null). Man nennt dieses „unendlich dünn machen" in der Gröſsenlehre „von der Dicke abstrahieren" (sie wegdenken)."[1])

Ähnliche Betrachtungen stellt H. bei der Linie und dem Punkt an. Bei dem letzteren fügt er noch hinzu „er (der Punkt) ist gewissermaſsen der Keim (Embryo) der Linie."[2]) Ferner: „Hat er Ausdehnung? Nur die kleinstmögliche." „Er hat die Ausdehnung eines Atoms. Sonst — wäre er ein reines Nichts."[3])

„Das anschauliche und bewegbare[4]) Bild eines solchen

---

[1]) Die Ausführungen Hoffmanns müssen mit groſser Vorsicht aufgenommen werden. Soll der Begriff Fläche erläutert werden, so sind sie entschieden falsch, ebenso wie die Bemerkung, daſs „von der Dicke abstrahieren" bedeute „unendlich dünn denken". Soll dagegen die Vorstellbarkeit geschildert werden, so können die Bemerkungen von Nutzen sein; immer aber hätte hervorgehoben werden müssen, daſs auch dieses unendlich dünn gedachte Blatt in Wahrheit noch einen Körper repräsentiere, und daſs es sich auch in diesem Falle nur um ein Veranschaulichen handle. Selbst in einer Vorschule der Geometrie muſs auf diesen wesentlichen Unterschied von unendlich dünn und Null eingegangen werden, da durch ihre Gleichsetzung von vornherein falsche Vorstellungen hervorgerufen werden.

[2]) Auch diese Bemerkung ist entschieden falsch; denn wenn der Punkt der Keim der Linie genannt wird, so geht daraus hervor, daſs wir durch Zusammensetzung von Punkten eine Linie erhalten, was dann konsequenter Weise dazu führen würde, aus Linien Flächen und aus Flächen Körper zusammenzusetzen. Man vergleiche meine obigen Ausführungen über die Elemente der geometrischen Gebilde.

[3]) Das ist er auch, ebenso wie in gewisser Hinsicht Flächen und Linien auch. — Zudem hätte der Punkt diese kleinstmögliche Ausdehnung doch nach allen Richtungen, er hätte drei Dimensionen, d. h. das was uns hier geschildert wird, ist ein unendlich kleiner Körper, aber kein Punkt.

[4]) Auch dies widerspricht meiner Auffassung — die übrigens von

unteilbaren Raumpunktes in deiner Vorstellung ist der ideal-mathematische Punkt."[1])

In zwei besonderen Abschnitten geht dann H. noch genauer ein auf die Erzeugung der *n*fach ausgedehnten Gebilde durch Bewegung eines $(n - 1)$fach ausgedehnten, sowie umgekehrt auf die Erzeugung der *n*fach ausgedehnten Gebilde durch die Annahme, dafs eine der Dimensionen des $(n + 1)$fach ausgedehnten Gebildes zu Null wird oder vielmehr sich der Grenze 0 nähert. Er sagt: „Nur darfst du die Begrenzungselemente (Fläche, Linie[2])) nicht bis zum völligen Verschwinden abnehmen lassen, weil du sonst ein Nichts (eine Null) erhältst, sondern du darfst sie nur abnehmen lassen sozusagen bis zur Schwelle des Verschwindens."[3])

Kambly,[4]) Die Elementar-Mathematik. II. — Breslau 1884.

Der Gang der Betrachtung ist der naturgemäfse. Dann wird noch hinzugefügt: „Es besteht also der Körper nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, die Linie nicht aus Punkten. Wohl aber entsteht ein Körper durch Bewegung einer Fläche, eine Fläche durch Bewegung einer Linie, eine Linie durch Bewegung eines Punktes."

„Eine Linie ist demnach der Weg eines sich bewegenden Punktes."

Kober[5]) giebt die beiden Ableitungen der räumlichen Gebilde 1) aus dem Grenzbegriff, 2) aus der Bewegung.[6])

---

sehr Vielen ebenfalls ausgesprochen wird. Vergl. die Bemerkung zu Henrici und Treutlein.

[1]) Nicht der Punkt ist ein Bild von einer Vorstellung, sondern gerade umgekehrt die Vorstellung des Punktes ein Bild des Begriffes Punkt.

[2]) Warum nicht auch Punkt?

[3]) Man vergleiche meine früheren Bemerkungen zu Hoffmanns Vorschule.

[4]) Besprochen in Schl. Z. IV, 21 und in H. Z. VI, 304. Vergl. H. Z. VII. p. 449—459. — Ferner H. Z. IX. 190—194.

[5]) J. Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Besprochen in H. Z. V. p. 446—449.

[6]) Man vergleiche J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. — H. Z. I. p. 228—236.

Köstler, Vorschule der Geometrie. — Halle 1887. — Desgleichen.

Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Halle 1889. — Desgl.

Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

„Jeder Körper wird von Flächen begrenzt."

„Wo zwei Flächen sich begegnen, entsteht eine Linie; Linien bilden demnach die Grenzen der Flächen."

„Durch den Schnitt von Linien entstehen Punkte."

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817 behandelt Flächen und Linien durchaus als selbständige Gebilde.

„Es ist aber nicht notwendig, sich bei Gegenständen der Ausdehnung jedesmal alle drei Abmessungen in Verbindung vorzustellen. Wir können von einzelnen Abmessungen abstrahieren."

So gelangt K. durch Abstraktion zum Begriff der Flächen und Linien, ohne sie in Verbindung mit dem Körper, d. h. als Grenzen des Körpers überhaupt anzusehen. Von Interesse möchte noch der folgende Zusatz sein: „Länge, Breite und Dicke bezeichnen nicht bestimmte Richtungen der Ausdehnung, sondern drücken nur die Verschiedenheit derselben überhaupt aus. Wo alle drei Abmessungen zugleich vorkommen, da werden sie durch die genannten Ausdrücke bezeichnet, wobei es ganz einerlei ist, welche der drei Abmessungen man mit dem einen oder anderen Namen belegen will. Wo nur zwei Abmessungen vorkommen, werden sie durch Länge und Breite unterschieden, ihre absolute Richtung im Raum oder gegen unsern Horizont mag übrigens sein, welche es wolle. Und so bezeichnet Länge bei der Linie die Einfachheit in der Richtung der Ausdehnung, sie mag übrigens hingehen, wohin sie will."

„Der Punkt bezeichnet nur eine Stelle im Raum, ohne selbst einen Teil[1]) des Raumes auszumachen."

[1]) Flächen und Linien nehmen doch auch keinen Teil des Raumes ein.

Kröger, Leitfaden für den Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886. — Vergl. Kober.

Kruse,[1]) Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875 fügt der Entwicklung der Raumgröſsen und des Punktes aus der Betrachtung des Körpers noch folgendes hinzu:

„Da die Fläche als Grenze eines Raumteils kein Teil desselben, die Linie als Flächengrenze kein Teil der Fläche sein kann, so ist die Ausdehnung der Fläche beschränkter als die des Raumes, die der Linie beschränkter als die der Fläche. Diese Unterschiede will man ausdrücken, wenn man Linie, Fläche und Raum als Gröſsen von einer, zwei oder drei Dimensionen bezeichnet."

„Punkt, Linie, Fläche, Körper sind die Raumelemente. Irgend eine Verbindung von Raumelementen wird ein geometrisches Gebilde genannt."

Der folgende §, in dem Kruse über die Erzeugung mittels der Bewegung handelt, wird wegen seiner allgemeinen Betrachtungen weiter unten, wo ich den Begriff der Bewegung selbständig behandeln will, eine passendere Stelle finden.

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 fügt den üblichen Betrachtungen, die er in naturgemäſser Folge giebt, hinzu:

„Bei jeder Fläche lassen sich im Raum zwei Seiten unterscheiden; ebenso bei jeder Linie in einer Fläche, und bei jedem Punkt in einer Linie."[2])

„Das Unterscheiden der beiden Seiten[3]) einer Fläche verdient vornehmlich für die Körperlehre beachtet zu werden. Es ist hier wichtig, sich die Oberfläche eines Körpers nicht

---

[1]) Besprochen in H. Z. VII. p. 212—222.

„Wir haben es hier mit einer sehr tüchtigen Arbeit zu thun." „Im ersten Hauptstücke werden die Grundbegriffe entwickelt, die aus den drei Eigenschaften materieller Körper: der Ausdehnung im Raume, der Teilbarkeit und Beweglichkeit abgeleitet werden. Auf eine Definition des Raumes selbst läſst sich der Verfasser mit Recht nicht ein."

[2]) Vergl. meine obigen Ausführungen über den Begriff der Seite bei der Betrachtung der Flächen.

[3]) Vergl. die vorhergehende Erklärung.

blofs von der äufseren Seite vorzustellen, wie sehr oft geschieht, sondern auch von der inneren Seite, wo sie ganz anders[1]) erscheint. Eine Kugelfläche z. B. ist an der äufseren Seite erhaben, an der inneren hohl."[2])

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie.[3]) — Kassel 1879 — geht vom Punkt aus, von dem er sagt:

„Ein Ort im Raume ohne jede Ausdehnung heifst Punkt."

Die übrigen Gebilde läfst er durch Bewegung entstehen, wobei er sich des Ausdrucks „Weg" bedient.

Legendre, ed. Crelle. — Berlin 1844 — bringt die Definitionen Euklids über Fläche und Linie. Dafs diese unzureichend sind, geht auch hier wieder hervor aus der Erklärung VIII, die Legendre im Euklidschen Sinne von dem Körper giebt:

„Körper heifst, was drei Abmessungen hat."

Man vergl. hiermit Erkl. I.:

„Die Ausdehnung hat drei Abmessungen, Länge, Breite und Höhe."

So kommt man zu dem merkwürdigen Resultat: Die Ausdehnung ist ein Körper.

Lieber u. v. Lühmann, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1877.

„Man erkennt eine Raumgröfse daran, dafs sie Ausdehnungen oder Dimensionen hat."

„Deren können im Maximum drei vorkommen, aber es können auch weniger sein."

„Eine nach allen Seiten rings begrenzte Raumgröfse, welche drei Dimensionen besitzt, heifst ein Körper." „Stellt

---

[1]) Auch bei der Ebene?

[2]) Besser würde es heifsen: von der äufseren Seite (dem Raume aufserhalb) betrachtet erhaben, von der inneren Seite (dem Raume innerhalb) betrachtet hohl.

[3]) Besprochen in H. Z. XII. p. 120/21.

man sich einen Körper vor, der sich zusammenzieht, so dafs seine Dimensionen kleiner werden als jede noch so kleine Gröfse, so nähert man sich der Vorstellung eines Punktes."[1])

Die Entstehung der Raumgebilde aus der Bewegung der um eine Dimension niederen schliefst sich hieran an.

Liese, Angewandte Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1875.

„Der allgemeine Raum hat unendlich viele Ausdehnungen oder Dimensionen, unter denen drei senkrecht auf einander stehende die Hauptrichtungen angeben; diese heifsen Länge, Breite, Höhe."[2])

„Ein allseitig begrenztes Stück des allgemeinen Raumes heifst ein mathematischer Körper."

„Er hat also auch drei Hauptausdehnungen." Die Flächen und Linien werden richtig erklärt.

Mehler, Menger, vergl. Kober.

Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien.[3]) — Leipzig 1881.

„Punkt, Gerade, Ebene sind die Grundgebilde der Geometrie."

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879. — Vergl. Kober.

E. Müller, Lehrbuch der Geometrie.[4]) I. — Braunschweig 1879.

---

[1]) Man nähert sich der Vorstellung, die aber unmöglich ist. Jedenfalls ist aber dieser Ausdruck sehr viel besser, als die Ausführungen Hoffmanns. Vergl. oben.

[2]) Der Unterschied von Richtungen und Hauptrichtungen, nach denen gemessen wird, ist richtig hervorgehoben.

[3]) Besprochen in H. Z. XIII. p. 40/41.

[4]) Es können aus diesem vorzüglichen Buche, das für die Grundbegriffe der Geometrie äufserst wertvoll ist, nur kurze Angaben gemacht werden. Wer sich für diesen Teil der Geometrie interessiert, dem sei das Werkchen selbst aufs angelegentlichste empfohlen. Eine ausführ-

Nach einer Erklärung der Entstehung der Fläche (Oberfläche, Grenzfläche) heifst es weiter:

„Eine Oberfläche wie auch eine Grenzfläche ist Grenze der Extension des geometrischen Körpers nach je zwei entgegengesetzten Gegenden. Die so begrenzte Ausdehnung nach zwei Gegenden verschwindet in ihr, wird in ihr aufgehoben und es bleibt statt der Ausdehnung des Körpers nach sechs Gegenden für die Oberfläche und Grenzfläche, also für die Fläche eines geometrischen Körpers überhaupt nur eine Ausdehnung nach vier Gegenden[1]) oder vier Ausdehnungen nach Gegenden, oder je zwei der Ausdehnungen nach entgegengesetzten Gegenden wieder als eine Ausdehnung betrachtet, zwei Ausdehnungen schlechtweg.“

„Mit der Ausdehnung nach einer Gegend wird diese Gegend selbst in der Oberfläche oder Grenzfläche eines geometrischen Körpers überhaupt aufgehoben als Seite,[2]) ganz so wie sich das Aufserhalb und Innerhalb in der äufseren und inneren Seite aufhebt. — Die Seite ist die der Oberfläche oder Grenzfläche gebliebene Spur *der* Gegend, nach welcher die Ausdehnung des Innen- und Aufsenraumes des geometrischen Körpers aufgehoben ist.“

Der Ausführlichkeit der Betrachtungen wegen können diejenigen über Fläche, Linie und Punkt nicht weiter hier angeführt werden, ein kurzer Überblick ist aber wegen der Eigenartigkeit der Behandlung kaum möglich, wenigstens würde wahrscheinlich ein kurzes Referat unverständlich bleiben. Es

---

liche Rezension findet sich in H. Z. I. p. 323—332. Dieselbe schliefst mit den Worten: „Referent ist der Ansicht, dafs vorliegendes Buch, dessen vortreffliche Seiten schon mehrfach angedeutet worden sind, für den Lehrer der Mathematik von ganz besonderem Werte sein kann, wenn er einmal die Grundvorstellungen seiner Wissenschaft philosophisch feststellen will . . . .“

[1]) So unterscheidet man an der Fläche des Horizonts vier Himmelsgegenden.

[2]) Die Seite ist an der Fläche und mittels dieser am Körper. Die Gegend ist aufser ihm. Dieser Unterschied ist unbeachtet gelassen, wenn man sagt, der Raum dehne sich nach allen Seiten hin aus, statt von allen Seiten eines Körpers nach allen Gegenden. — Man vergl. meine obigen Ausführungen.

sei daher nochmals auf das Buch selbst hingewiesen, sowohl auf Teil I, dem diese Auszüge entnommen sind, wie auf Teil II Einleitung, wo sie zu kürzerem Ausdruck kommen. Von besonderem Werte ist auch die genaue Bestimmung des Begriffes Grenze, die das Verständnis der geometrischen Raumgebilde wesentlich erleichtert.

H. Müller,[1]) Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874 giebt die beiden üblichen Ableitungen (s. Kober) allerdings nach dem Prinzip der Dualität, das er sogleich an die Spitze seines Werkes stellt.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaeen Planimetrie. — Bremen 1870[2]) bezeichnet die Vorstellung des Ortes — ebenso wie die des Raumes und der Richtung — als eine einfache Grundvorstellung und sagt dann an einer anderen Stelle: „Indem man die Vorstellung des Ortes soviel als möglich vereinfacht, erhält man den einfachen Ort, welcher Punkt genannt wird.“ „Der Punkt hat keine Ausdehnung; denn ein Raumgebilde, welches Ausdehnung hat, enthält mehrere einfache Örter und ist deswegen selbst kein einfacher Ort.“

Die Raumgebilde stellt er zuerst als durch Bewegung erzeugt dar, dann erst als Grenzen. Drittens werden die Gebilde als abstrakte Gröfsen (Begriffe) behandelt.

„Die Fläche ist nach unendlich vielen, doch nicht mehr nach allen Richtungen ausgedehnt.“ . . .

„Die Linie ist an jeder Stelle[3]) nur nach einer Richtung ausgedehnt und teilbar.

---

[1]) Besprochen in H. Z. V. — p. 449—454.

[2]) Besprochen in Schl. Z. V, 61 und in H. Z. I. p. 155. In der letzteren Rezension (von Schwarz-Elmshorn) heifst es u. a.: „Die allgemeine Einführung in den Gegenstand der Betrachtung oder, wenn man will, die metaphysische Grundlage ist gerade die schwache Seite auch dieses Buches. (Als besondere Beispiele werden die Gerade und die Ebene erwähnt.) — Sonst verdient übrigens auch die Einleitung die Anerkennung, welche dem Werke im allgemeinen zukommt. Sie giebt eine klare Auseinandersetzung über das Wesen der Sätze, und der Begriff der Bewegung . . . . wird sogleich näher festgelegt und als ein wichtiges Beweismittel mit Recht festgehalten.“

[3]) Wie es scheint, geht diese Bemerkung darauf hin, dafs man dic

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844.

Müller giebt in klarer Darstellung die übliche Grenzableitung, wobei er durch eingestreute gut gewählte Fragen den Gegenstand dem Verständnis nahe zu bringen sucht.

Von besonderem Interesse für den Begriff der Seite ist folgende Bemerkung:

„So lange die Linie in der unbegrenzten Fläche liegend gedacht wird, so lange lassen sich auch an ihr zwei Seiten unterscheiden.[1]) Denkt man sich dagegen die Linie abgesondert und im Raume liegend, so giebt es unendlich viele Seiten, von denen *aus* sie sich ansehen läſst.“

Sämtliche Raumgebilde werden dann noch weiteren, sehr eingehenden Betrachtungen unterzogen, die geeignet erscheinen, indem sie die Begriffe von verschiedenen Seiten beleuchten, das Verständnis auſserordentlich zu fördern.

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873 giebt das Übliche in richtiger Darstellung.

Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827.

Körper, Flächen, Linien werden nach üblicher Erklärung angegeben. Dann heiſst es weiter:

„Die Grenzen endlich einer begrenzten geraden Linie, so wie die Zeichen eines genau bestimmten Orts auf einer Linie, Fläche oder Körper, welche man also ohne alle Ausdehnung denken muſs, heiſsen Punkte. Daher definiert sie Savilius

---

Linie im allgemeinen nicht als nach nur einer Richtung ausgedehnt bezeichnen darf, sondern daſs man nur für das Linienelement diesen Ausdruck wählen darf. Aber auch hier muſs man noch genau unterscheiden, wie aus meinen obigen Ausführungen über die Elemente der Raumgebilde hervorgeht. — Vergl. auch Kapitel IV u. V.

[1]) Diese Seiten lassen sich aber doch nicht an der Linie unterscheiden, sondern an der Fläche, in der die Linie liegt, d. h. auf der einen Seite von der Linie aus liegt der eine Teil der Fläche, auf der anderen der andere.

(Lect. III) nicht unpassend als Merkzeichen einer unteilbaren Lage (Notas situs indivisibilis)."

Mit dem Satze: „Die Begriffe von der Ausdehnung sind den Geometern nicht eigentümlich, sondern schon in der gemeinen Sprache und Verkehr geläufig" stellt sich Pfleiderer auf den Standpunkt des a priori im Menschen liegenden Raumes. Besonders geht dies auch aus den angeführten Beispielen hervor, so u. a.: „Wer eine Elle gebraucht, giebt nur auf ihre Länge acht, nicht auf den Stoff, aus dem sie gemacht ist, ihre Dicke und übrigen Eigenschaften." Punkte und Linien, die wir darstellen, sind immer Körper, bei dem einen abstrahieren wir von aller Ausdehnung, bei dem anderen von jeder aufser der in die Länge. — (Robert Simson nach Matthias Auszug. Magdeburg 1799. — Hauber Chrestomathia geometrica. — Tübingen 1820.)

Aus Kästners Abhandlungen wird u. a. zitiert: Die mathematischen Raumgebilde Punkt, Linie, Fläche werden „freilich vom Auge nicht gesehen, aber bei dem, das das Auge sieht, können sie vom Verstande gedacht werden."[1])

Da die Benennungen der geometrischen Gebilde „nichts in ihrer Bildung haben, das auf äufseres Erscheinen an einem Körper deutet", so ist es „methodischer, von der körperlichen Ausdehnung anzufangen", und von ihnen ausgehend „die Grenzen wahrzunehmen".

„Euklid scheint von einem Nichts anzufangen." „Die Definition (des Punktes) scheint blofs zu sagen, was das Ding nicht ist; und sollte doch sagen, was es ist."

„Also setzt sie zum voraus, man verbinde mit dem Worte einen klaren Begriff . . ."[2])

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc.[3]) — Leipzig 1887.

Auf die Grenzbetrachtungen folgt die Bemerkung:

---

[1]) Sehr richtig!

[2]) Die übrigen Zitate Pfleiderers an dieser Stelle werden von mir anderweitig verwertet.

[3]) Ausführlich besprochen in H. Z. XX, 517—520.

„Wie uns die Anschauung lehrt, ist ein Punkt keiner weiteren Zerlegung fähig; er ist das letzte Element, zu dem uns unsere Betrachtung[1]) führt."

Es heifst dann weiter:

„Sowie wir der Anschauung die Begriffe des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers entlehnen mufsten, ohne eine eigentliche Definition derselben, d. h. eine logische Zurückführung auf einfachere Begriffe geben zu können, so . . ."

Recknagel,[2]) Ebene Geometrie. — München 1885.

„Für die Vorstellung einer Fläche, die nicht Grenze (Oberfläche) eines Körpers wäre, giebt uns die Erfahrung keinen Anhaltspunkt. Doch pflegt man in der Geometrie auch an Flächen zu denken, ohne sich den Körper, den sie begrenzen, zugleich vorzustellen, d. h. man abstrahiert vom Körper."

„Es läfst sich der Punkt auch unabhängig von der Linie denken als einzelne Stelle im Raume; Linie . . . als Spur eines bewegten Punktes etc."

Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht.[3]) — Berlin 1886.

„Der Unterricht beginnt in der Regel mit einer Erörterung der Begriffe Körper, Fläche etc."

„Man hüte sich hierbei vor dem Bestreben, diese Begriffe metaphysisch-abstrakt festzustellen und begründen zu wollen; dafür hat der Anfänger absolut kein Verständnis. Es mufs hier genügen, dieselben anschaulich klar zu machen."[4])

---

[1]) Aber doch die denkende Betrachtung, nicht die anschauende. Es kann uns also auch nicht die Anschauung über den Punkt belehren. Man vergleiche die weitere Ausführung Rausenbergers, worin er mit sich im Widerspruch erscheint, wenn er sagt, dafs wir der Anschauung einen Begriff entlehnen.

[2]) Besprochen in H. Z. III. p. 282. — Referent (Hoffmann) empfiehlt das Buch angelegentlichst.

[3]) Ausführlich und sehr anerkennend besprochen von H. Stade in H. Z. XIX. p. 191—202.

[4]) Mit dieser Weisung des ausgezeichneten Pädagogen wird wohl jeder Lehrer einverstanden sein; aber irgend wann im Laufe des geo-

„Dafs eine Fläche die Grenze eines Körpers ist, dafs dieselbe keine Dicke, wie die Linie keine Breite, der Punkt keine Länge hat, das versteht der Schüler leicht, zumal wenn ihm nicht von vornherein zugemutet wird, bei der Fläche vom Körper zu abstrahieren[1]), jene also von diesem gelöst sich vorzustellen. Vielmehr ist hier ausdrücklich zu bemerken, dafs Flächen nur an Körpern u. s. w. vorkommen können. Der Schüler wird dann auf erläuternde Fragen, z. B.[2]) wie tief man mit einer Nadel in einen Körper hineinstechen dürfe, damit die Spitze derselben nicht aus der Grenzfläche heraus und in das Innere des Körpers hinein gelange, von selbst die Antwort finden: gar nicht.“

Die Entstehung der Gebilde durch Bewegung ist verständlich, jedoch mufs besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dafs es sich nicht um ein „Aneinanderreihen“ von Punkten handelt, oder um ein „Aufeinanderlegen“ von Flächen resp. dafs wir auf solche Weise nicht zu Gebilden höherer Ordnung gelangen.“

Dagegen verwirft mit Recht Reidt für den Anfang alle abstrakten Untersuchungen und unklaren Definitionen, wie die Euklidsche vom Punkt, indem er auf deren Schwierigkeit hinweist. Es heifst dann weiter:

„Wir müssen vielmehr im Unterricht eine Anzahl von Grundbegriffen als durch die äufsere und innere Anschauung gegeben annehmen . . .“

Die einfachsten Grundbegriffe[3]) dürfen als gegeben vorausgesetzt werden und bedürfen höchstens der Erläuterung und Erklärung.

---

metrischen Unterrichts müfste doch einmal wieder auf die Grundbegriffe zurückgegriffen werden und ihnen eine eingehendere Behandlung als die angegebene gewidmet werden.

[1]) Mir erscheint auch diese Forderung erfüllbar. Würde man die Fläche etc. nur als Grenze den Schüler auffassen lassen, so würde doch zu viel Unklarheit in der Vorstellung zurückbleiben.

[2]) Die Vorzüglichkeit dieses Beispiels ist schon an anderer Stelle hervorgehoben.

[3]) Reidt rechnet dazu auch den Winkel. — Man vergleiche meine Abhandlung, Zur Definition des Winkels, in H. Z. XX. p. 481 (Anm.) und die dem vorliegenden Bande vorangehende Studie p. 27.

Reidt, Die Elemente der Mathematik.[1]) II. — Berlin 1888.

Nach Vorübungen an bestimmten Körpern behandelt Reidt die Grundbegriffe nach den von ihm in der Anleitung gegebenen Grundsätzen, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen.

Rottock, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888. — Vergl. Kober.

Rummer, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Heidelberg 1869. — Vergl. Kober.

Sadebeck, Elemente der Geometrie. — Breslau 1872. — Vergl. Kober.

Schindler, Elemente der Planimetrie.[2]) — Berlin 1883.

„Geometrischer Körper heifst die Ausdehnung eines Körpers.“[3])

„Ein jeder geometrische Körper läfst unterscheiden sein erkennbares Äufsere und sein nicht erkennbares Innere.[4]) Die Wahrnehmung seines Äufseren rührt her von seiner oben befindlichen äufsersten Schicht.“

„Oberfläche heifst die oberste Grenzschicht[5]) eines geometrischen Körpers.“

Analog werden die Linien und Punkte behandelt.

„Oberfläche und Volumen sind die Glieder eines geometrischen Körpers.“

„Umfang und Fläche sind die Glieder einer Figur.“

„Länge und Punkt sind die Glieder einer Linie.“

„Die Punkte lassen Glieder nicht mehr unterscheiden. Sie sind daher einfache Raum-Wahrnehmungen.“

---

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXV, 194 und in H. Z. VI. p. 174—175; Bardey empfiehlt sie bestens.

[2]) Eine ausführliche Besprechung voller Anerkennung findet sich in H. Z. XVII. p. 46—57.

[3]) Besser würde es heifsen, geometrischer Körper wird der physische genannt, wenn man ihn nur in Bezug auf seine Ausdehnung betrachtet.

[4]) Der Sinn dieses Satzes ist meinem Verständnis leider verborgen geblieben. Vielleicht ist der physische Körper gemeint.

[5]) Damit wäre denn die Fläche ein Teil des Körpers.

„Punkte sind die einfachsten Glieder eines geometrischen Körpers.“

Diese Ableitung bezeichnet Schindler als Analyse;[1]) als Synthese fügt er den Aufbau der Gebilde aus ihren Gliedern hinzu, die Entstehung der Gebilde durch Bewegung der nächst niederen. Dabei stellt er folgenden Grundsatz auf:

„Der Punkt ist eine unendlich kleine ausgedehnte Gröfse.“[2])

Demgemäfs definiert er:

„Eine Linie ist eine stetige Punkten-Folge in der Längenausdehnung.“[3])

„Eine Fläche ist eine stetige Linien-Folge in der Breitenausdehnung.“

„Das Volumen ist eine stetige Flächen-Folge in der Ausdehnung der Dicke.“

Daraus ergeben sich für ihn die Folgerungen:

„Eine Fläche ist ein geometrischer Körper, dessen Dicke unendlich klein ist.“[4])

„Eine Linie ist ein geometrischer Körper, dessen Breite und Dicke unendlich klein sind.“

„Ein Punkt ist ein geometrischer Körper, dessen Breite, Dicke und Länge unendlich klein sind.“

Schlegel, System der Raumlehre.[5]) — Leipzig 1872.

---

[1]) „Analyse heifst die Methode, durch welche die Glieder eines Körpers bestimmt werden.“

„Synthese heifst die Methode, nach welcher die Körper aus ihren Gliedern gebildet werden.“

[2]) Das ist ganz entsprechend der Auffassung der Fläche als einer Schicht. Aber was ist das für eine Erklärung der Grundbegriffe! Richtig würde es sein, wenn es hiefse: Unsere Vorstellung des Begriffes Punkt ist die einer unendlich kleinen ausgedehnten Gröfse.

[3]) Wenn der Punkt als eine zwar unendlich kleine, aber doch immerhin ausgedehnte Gröfse definiert wird, so kann sich aus Punkten auch wirklich eine Linie zusammensetzen. Man vergleiche damit das Zitat aus Reidts Anleitung weiter oben, wo ausdrücklich davor gewarnt wird, nicht an ein Aneinanderreihen von Punkten oder ein Aufeinanderlegen von Flächen zu denken.

[4]) Man vergleiche Hoffmanns Ansichten, die in dem Zitate aus seiner Vorschule weiter oben zu ersehen sind.

[5]) Eine ausführliche Besprechung und Würdigung dieses Buches findet sich in H. Z. VIII. p. 45—59.

Auf dieses „nach den Prinzipien der Grafsmannschen Ausdehnungslehre“ bearbeitete Werk sei hier mit Nachdruck aufmerksam gemacht, auf ein Anführen von Zitaten mufs verzichtet werden, da bei der total verschiedenen Behandlung des Stoffes dieselben zu ausführlich sein müfsten. Vorläufig scheint diese Bearbeitung auch nicht für den Unterricht einführbar und also aufserhalb des Rahmens des vorliegenden Werkes.

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik.[1]) II. – Wolfenbüttel 1879.

Nach der Definition des Körpers heifst es:

„Von dem umgebenden Raume wird der Körper getrennt durch eine Fläche (Oberfläche), welche den Körper vollständig begrenzt und gewöhnlich[2]) aus mehreren gleichartigen Teilen besteht, welche Figuren heifsen.“

„Der Körper ist ein vollständig begrenzter Teil des Raumes, und die Fläche ist die Grenze des Körpers.“

Umgekehrt: „Jedes durch Figuren vollständig begrenzte Gebilde ist ein Körper.“

Analog: „Die Figur ist ein vollständig begrenzter Teil der Fläche, und die Linie ist die Grenze der Figur.“

Umgekehrt: „Jedes durch Strecken vollständig begrenzte Gebilde ist eine Figur.“

„Die Strecke ist ein vollständig begrenzter Teil der Linie, und der Punkt ist eine Grenze der Strecke.“

Umgekehrt: „Jedes durch Punkte vollständig begrenzte Gebilde ist eine Strecke.“

Diese Definitionen werden dann [illegible]
Auch Schlegel betont, dafs Punkte, [illegible]
für sich aufser uns existieren, [illegible]

---

[1]) Besprochen in H. Z. [illegible]
„Besonderer Fleifs wird auf [illegible]
mentaleigenschaften aller [illegible]
auf entsprechende Beispiele [illegible]
ist.“ Günther sagt [illegible]
sprechen für sich selbst.“

[2]) Schlegel hat also [illegible]

„Punkte sind die einfachsten Glieder eines geometrischen Körpers."

Diese Ableitung bezeichnet Schindler als Analyse;[1]) als Synthese fügt er den Aufbau der Gebilde aus ihren Gliedern hinzu, die Entstehung der Gebilde durch Bewegung der nächst niederen. Dabei stellt er folgenden Grundsatz auf:

„Der Punkt ist eine unendlich kleine ausgedehnte Gröfse."[2])

Demgemäfs definiert er:

„Eine Linie ist eine stetige Punkten-Folge in der Längenausdehnung."[3])

„Eine Fläche ist eine stetige Linien-Folge in der Breitenausdehnung."

„Das Volumen ist eine stetige Flächen-Folge in der Ausdehnung der Dicke."

Daraus ergeben sich für ihn die Folgerungen:

„Eine Fläche ist ein geometrischer Körper, dessen Dicke unendlich klein ist."[4])

„Eine Linie ist ein geometrischer Körper, dessen Breite und Dicke unendlich klein sind."

„Ein Punkt ist ein geometrischer Körper, dessen Breite, Dicke und Länge unendlich klein sind."

Schlegel, System der Raumlehre.[5]) — Leipzig 1872.

---

[1]) „Analyse heifst die Methode, durch welche die Glieder eines Körpers bestimmt werden."

„Synthese heifst die Methode, nach welcher die Körper aus ihren Gliedern gebildet werden."

[2]) Das ist ganz entsprechend der Auffassung der Fläche als einer Schicht. Aber was ist das für eine Erklärung der Grundbegriffe! Richtig würde es sein, wenn es hiefse: Unsere Vorstellung des Begriffes Punkt ist die einer unendlich kleinen ausgedehnten Gröfse.

[3]) Wenn der Punkt als eine zwar unendlich kleine, aber doch immerhin ausgedehnte Gröfse definiert wird, so kann sich aus Punkten auch wirklich eine Linie zusammensetzen. Man vergleiche damit das Zitat aus Reidts Anleitung weiter oben, wo ausdrücklich davor gewarnt wird, nicht an ein Aneinanderreihen von Punkten oder ein Aufeinanderlegen von Flächen zu denken.

[4]) Man vergleiche Hoffmanns Ansichten, die in dem Zitate aus seiner Vorschule weiter oben zu ersehen sind.

[5]) Eine ausführliche Besprechung und Würdigung dieses Buches findet sich in H. Z. VIII. p. 45—59.

Auf dieses „nach den Prinzipien der Grafsmannschen Ausdehnungslehre“ bearbeitete Werk sei hier mit Nachdruck aufmerksam gemacht, auf ein Anführen von Zitaten mufs verzichtet werden, da bei der total verschiedenen Behandlung des Stoffes dieselben zu ausführlich sein müfsten. Vorläufig scheint diese Bearbeitung auch nicht für den Unterricht einführbar und also aufserhalb des Rahmens des vorliegenden Werkes.

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik.[1]) II. — Wolfenbüttel 1879.

Nach der Definition des Körpers heifst es:

„Von dem umgebenden Raume wird der Körper getrennt durch eine Fläche (Oberfläche), welche den Körper vollständig begrenzt und gewöhnlich[2]) aus mehreren gleichartigen Teilen besteht, welche Figuren heifsen.“

„Der Körper ist ein vollständig begrenzter Teil des Raumes, und die Fläche ist die Grenze des Körpers.“

Umgekehrt: „Jedes durch Figuren vollständig begrenzte Gebilde ist ein Körper.“

Analog: „Die Figur ist ein vollständig begrenzter Teil der Fläche, und die Linie ist die Grenze der Figur.“

Umgekehrt: „Jedes durch Strecken vollständig begrenzte Gebilde ist eine Figur.“

„Die Strecke ist ein vollständig begrenzter Teil der Linie, und der Punkt ist eine Grenze der Strecke.“

Umgekehrt: „Jedes durch Punkte vollständig begrenzte Gebilde ist eine Strecke.“

Diese Definitionen werden dann dual gegenübergestellt. Auch Schlegel betont, dafs Punkte, Linien und Flächen nicht für sich aufser uns existieren, sondern nur an Körpern, dafs

---

[1]) Besprochen in H. Z. XI. p. 208—213. — Es heifst davon p. 210: „Besonderer Fleifs wird auf die Definition und Klarstellung der Fundamentaleigenschaften aller geometrischen Gebilde verwendet, wobei auch auf entsprechende Beispiele aus dem täglichen Leben Bedacht genommen ist.“ Günther sagt zum Schlufs der Rezension: „Solche Leistungen sprechen für sich selbst.“

[2]) Schlegel hat also in erster Linie an die Polyeder gedacht.

Grenze, welche den Raum des Körpers von den umgebenden unendlichen absondert. Der Fläche selbst kommt noch eine Ausdehnung zu; sie besteht auf eine ähnliche Art wie der Raum aus gleichartigen Teilen, und eben deswegen lassen sich an Flächen selbst noch wieder bestimmte Grenzen denken (brauchen aber nicht gedacht zu werden). Diese werden Linien genannt. Auch die Linie ist ausgedehnt und besteht aus gleichartigen Teilen, es giebt also insofern notwendig eine Grenze für Linien, den Punkt. Die Ausdehnung des Körpers hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke, die der Fläche zwei, Länge und Breite, die der Linie nur eine einzige, Länge; dem Punkte, als der letzten Grenze aller Ausdehnung, wird Einfachheit und Unteilbarkeit beigelegt; bei ihm also findet die Reflexion ein gänzliches Ende. Wenn die Vorstellung eines best. Körpers erzeugt werden soll, so ist das Setzen des Punktes das Erste, wovon die ganze Konstruktion ausgeht" (durch ihn und von ihm aus wird die Linie beschrieben etc.).

.... „Die letzte Vorstellungsart ist die eigentlich geometrische."

Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Kassel 1881 giebt nur die Herleitung aus dem Grenzbegriff.

Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. I. — Halle 1863. — Vergl. Kober.

Wohlgemuth,[1]) Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877 unterscheidet drei Klassen räumlicher Gröfsen. Er geht vom Körper aus und benutzt den Begriff der Grenze in der üblichen Weise, dann wird die Erzeugung ebenfalls in der üblichen Weise durch Bewegung behandelt.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 betont ausdrücklich, dafs Flächen, Linien, Punkte für sich bestehend

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXIII. p. 187.

„Die Geometrie geht vom mathematischen Punkte, als der einfachsten Grundvorstellung aus. Er dient zur Bezeichnung eines Ortes im Raume."

Darauf folgt dann die Erzeugung der räumlichen Gebilde durch Bewegung.

Spieker,[1]) Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Potsdam 1873. — Vergl. Kober.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888. — Desgl.

Stegmann, Grundlehre der ebenen Geometrie. — Kempten 1886. — Desgl.

---

v. Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. — Jena 1834.

„1. Erklärung. Wenn man an dem Raume blofs eine Dimension, die Länge, betrachtet, ohne auf die beiden anderen Breite und Dicke (oder Höhe) Rücksicht zu nehmen, so gelangt man zu der Vorstellung einer Linie." (Eukl. I. Erkl. 2. — L. G. I. Erkl. 1.)

„2. Erklärung. Die Grenzen der Linien und deren gegenseitige Durchschnitte heifsen Punkte." (Eukl. I. Erkl. 1 u. 3. — L. G. I, Erkl. 1.)

„14. Erklärung. Fläche heifst diejenige Raumgröfse, zu deren Vorstellung man gelangt, indem man an dem Raum blofs die Dimensionen der Länge und Breite betrachtet, und von der Dicke oder Höhe ganz absieht." (Eukl. I. Erkl. 5. — L. G. Erkl. 5.)

„Zus. Die Grenzen einer Fläche sind Linien, gerade oder krumme."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

„Durch die Vorstellung des Körpers, wenn man sie als schon vollendet zum Grunde legt, gelangt man reflektierend zur Vorstellung der Fläche, oder der bestimmten

---

[1]) Besprochen in H. Z. III. p. 173; 499.

Grenze, welche den Raum des Körpers von den umgebenden unendlichen absondert. Der Fläche selbst kommt noch eine Ausdehnung zu; sie besteht auf eine ähnliche Art wie der Raum aus gleichartigen Teilen, und eben deswegen lassen sich an Flächen selbst noch wieder bestimmte Grenzen denken (brauchen aber nicht gedacht zu werden). Diese werden Linien genannt. Auch die Linie ist ausgedehnt und besteht aus gleichartigen Teilen, es giebt also insofern notwendig eine Grenze für Linien, den Punkt. Die Ausdehnung des Körpers hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke, die der Fläche zwei, Länge und Breite, die der Linie nur eine einzige, Länge; dem Punkte, als der letzten Grenze aller Ausdehnung, wird Einfachheit und Unteilbarkeit beigelegt; bei ihm also findet die Reflexion ein gänzliches Ende. Wenn die Vorstellung eines best. Körpers erzeugt werden soll, so ist das Setzen des Punktes das Erste, wovon die ganze Konstruktion ausgeht" (durch ihn und von ihm aus wird die Linie beschrieben etc.).

.... „Die letzte Vorstellungsart ist die eigentlich geometrische."

Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Kassel 1881 giebt nur die Herleitung aus dem Grenzbegriff.

Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. I. — Halle 1863. — Vergl. Kober.

Wohlgemuth,[1]) Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877 unterscheidet drei Klassen räumlicher Gröfsen. Er geht vom Körper aus und benutzt den Begriff der Grenze in der üblichen Weise, dann wird die Erzeugung ebenfalls in der üblichen Weise durch Bewegung behandelt.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 betont ausdrücklich, dafs Flächen, Linien, Punkte für sich bestehend

[1]) Besprochen in Schl. Z. XXIII. p. 187.

gedacht werden können; dafs die Teile einer räumlichen Gröfse unter sich und mit dem Ganzen gleichartig sind und dafs deshalb „niemals Körper hervorgehen können durch Zusammensetzung von Flächen, Flächen durch Zusammensetzung von Linien, oder Linien durch Zusammensetzung von Punkten.“

Worpitzky,[1]) Elem. d. M. III. — Berlin 1874.

Der Grenzbegriff wird benutzt. Vom Punkte stellt Worpitzky folgendes Axiom auf:

„Kein Punkt ist in solcher Weise teilbar, dafs die Teile sich untereinander und vom Ganzen unterscheiden,“ während von den übrigen Gebilden des Raumes die unbeschränkte Teilbarkeit als Axiom aufgestellt wird.

In einer Scholie wird dann besonders darauf aufmerksam gemacht, dafs die Punkte nicht Teile der Linie sind etc., dafs mithin durch Summation von Punkten keine Linien entstehen etc., dafs aber durch die Summation von Körpern ein bel. ausgedehnter Raumteil[2]) erzeugt wird.

Nach der Erörterung des Begriffes Bewegung wird als Zusatz aufgestellt:

„V. Jeder bewegte Punkt beschreibt eine Linie, jede nicht in sich selbst gleitende Linie eine Fläche, jede nicht in sich selbst gleitende Fläche einen Raumteil.“

Dazu heifst es in einer Scholie:

„In Betreff des Zus. V. ist die Bemerkung wichtig, dafs man sich nicht jede Linie als durch Bewegung eines Punktes und nicht jede Fläche als durch Bewegung einer Linie (auch wenn man die letztere fortwährend verbiegt) beschrieben vorstellen kann.“[3])

---

[1]) Besprochen in H. Z. VI, p. 232—236. — Es heifst da: „... müssen wir von vornherein dieselbe als ein vorzügliches Werk erklären, welches die allgemeinste Beachtung verdient.“

[2]) Jedoch nicht der Raum selbst, wenigstens nicht durch Summation einer endlichen Zahl von Körpern.

[3]) Es erscheint durchaus nicht überflüssig besonders aufmerksam zu machen darauf, dafs nicht jede Fläche als durch Bewegung einer Linie erzeugt gedacht werden kann.

alles Mechanische[1]) vermieden, das Geistige aber zur klaren Erkenntnis gebracht werde."

Auch die Ausführungen über Punkte (geometrische und physische), sowie über den Unterschied der physischen und geometrischen Linien insofern, als die einen durch nebeneinanderliegende Punkte gebildet werden, die andern nicht, sind sehr klar und im Unterricht gewifs mit Erfolg zu verwerten.

Kästner, Anfangsgründe etc. — Wien 1788.

„Die körperliche Ausdehnung, ein geometrischer Körper (solidum, corpus) heifst eine solche Ausdehnung, die das, was sich innerhalb ihrer Grenzen befindet, überall, nach allen Seiten zu, umgiebt. Die Ausdehnung der Körper an ihren Grenzen heifst eine Fläche (superficies) und die Ausdehnung der Fläche an ihren Grenzen eine Linie (linea)."[2])

„Die Wörter Länge, Breite, Dicke sind dem Sprachgebrauche nach nicht Namen verschiedener Ausdehnungen, sondern einer einzigen, der Länge, die nach verschiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird.[3]) Übrigens enthält die Ausdehnung der Fläche nichts von der körperlichen, welche bei ihr aufhört. Also können übereinander gehäufte Flächen keinen Körper ausmachen, weil vielmal nichts nie etwas ausmacht."

„Man darf überall in der Linie Punkte annehmen. Es ist aber einerlei, ob man in der Linie überall Punkte annimmt, oder ob man sich einen einzigen Punkt, der nach und nach in verschiedene Stellen der Linie gekommen wäre, vorstellt; denn ein Punkt ist von dem andern in nichts unterschieden.[4])

---

[1]) Wohl besser „Materielle".

[2]) Zum mindesten ist die Ausdrucksweise eine sehr eigentümliche: die Ausdehnung der Körper an ihren Grenzen heifst eine Fläche etc.

[3]) Diese Bemerkung ist recht zutreffend und geeignet eine klare Auffassung zu bewirken; wenn wir statt Länge das „Auseinandersein" setzen, so würde die vorliegende Ausführung auch philosophisch brauchbar sein. Dafs es sich bei Länge, Breite und Dicke nicht um verschiedenartige Ausdehnungen handelt und dafs es in der That nur eine Ausdehnung giebt, dies noch ausdrücklich auszusprechen, wird im Unterricht nicht ohne Nutzen sein.

[4]) Aufser durch die Lage.

Daher sagt man: Eine Linie entstehe aus der Bewegung eines Punktes.“

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833.

Die Erklärungen sind selbstverständlich die des Euklid, jedoch fügt der Verfasser noch Anmerkungen hinzu, aus denen einiges entnommen werden soll. Zuerst wird die Identität von Länge, Breite und Höhe oder Tiefe durch den gemeinsamen Namen Richtung oder Dimension festgestellt. Die Linie wird dann als eine einfache Dimension des Raumes definiert, die Fläche als das, was zwei Dimensionen hat. Vom Körper wird überhaupt nicht gehandelt.

Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. I. — Braunschweig 1888.

Fenkner schickt der gewöhnlichen Betrachtung der Grundvorstellungen Vorübungen voraus, in denen von bestimmten Körpern gehandelt wird. [1) Würfel und Quadrat; 2) Gerade quadrat. Säule und Rechteck; 3) Rhomboëder und Rhombus; 4) gerades dreiseitiges Prisma und Dreieck; 5) gerades sechsseitiges Prisma und Vieleck; 6) Pyramide; 7) Kreiszylinder und Kreis; 8) Kreiskegel; 9) Kugel.]

Die Grundvorstellungen selbst werden alsdann aus dem Grenzbegriff entwickelt und darauf der Erzeugung durch Bewegung gedacht; ganz in der üblichen Weise.

Koppe, Die Planimetrie. — Essen 1885.

Vom Körper ausgehend entwickelt K. die Grundvorstellungen aus dem Grenzbegriff. Dafs die Flächen und Linien als selbständige Gebilde nirgends vorkommen, sondern nur in der Vorstellung gesondert betrachtet werden können, wird ausdrücklich betont.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1867.

Die Verfasser gehen vom Punkte aus, den sie definieren: „Punkt ist dasjenige, was einen Ort im Raume bestimmt, ohne

selbst ein Teil des Raumes zu sein. Er hat also weder Ausdehnung noch Teile.“ — Daran knüpft sich die Definition der Linie: „Linie ist das, was ein Punkt durch seine Bewegung im Raume beschreibt; sie hat nur eine Ausdehnung (Dimension), Länge, aber keine Breite.“

Analog werden Flächen und Körper erklärt. Dann erst wird der Zusammenhang der Gröfsen im Grenzbegriff dargestellt.

Kober bemerkt zu der Definition des Punktes in seinem schon bei Euklid zitierten Aufsatz (in H. Z. I. p. 228).

„Was ist Ort? Nur ein anderes (allgemeineres) Wort für Punkt; durch den Reichtum der Sprache ist also nur die Tautologie verhüllt. Und sobald Ort und Punkt nicht als identisch vorausgesetzt werden, gilt dann nicht dieselbe Definition von einer Kugelfläche oder einer Ebene oder einer Linie u. s. w., die auch nicht Teile des Raumes sind? Was soll der Schüler denken, wenn ihm später der Begriff des geometrischen Ortes vorgeführt wird? (Dann hat er hoffentlich die ganze Definition vergessen.)

Sodann ist gleichzeitig auch der Begriff des Raumes und zwar stillschweigend vorausgesetzt; man fängt also mit zwei entgegengesetzten Begriffen zugleich an, um — recht streng wissenschaftlich synthetisch zu Werke zu gehen! Mit der besprochenen Definition teilt die Fehler auch die Definition: „Der Punkt ist eine ausdehnungslose Stelle im Raume.“

Löser, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Weinheim 1882.

Vom Körper und den Grenzen wird ausgegangen.

„Unter Fläche versteht man im allgemeinen die Teil- oder Trennungsstelle, welche einen Raum in zwei Räume zerlegt.“

„Die Teil- oder Trennungsstelle, welche eine Fläche in zwei Flächen zerlegt, oder vielmehr das Bild jener Stelle, heifst Linie.“

„Die Teilstelle einer Linie, oder auch die Trennungsstelle beider Teile derselben, heifst Punkt.“

„Der Punkt hat keine Ausdehnung, obgleich man ihn mit zu den Raumgröfsen rechnet."

Auf den Unterschied der Zusammensetzung und der Bewegungserzeugung wird besonders hingewiesen.

Focke u. Krass, Lehrbuch der Geometrie. I. — München 1878. — Vergl. Kober.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

„Es giebt drei Arten räumlicher Gegenstände: Körper, Flächen und Linien. Die Körper werden von Flächen, die Flächen von Linien, die Linien von Punkten begrenzt. Körper lassen sich zu einem neuen körperlichen Raum auf drei Weisen: nebeneinander, vor- oder hintereinander, und über- oder untereinander; Flächen auf zwei Weisen: nebeneinander und vor- oder hintereinander, aber nicht über- oder untereinander, zu einer neuen Fläche zusammenstellen; Linien können nur auf eine Weise, vor- oder hintereinander, aber nicht neben- oder übereinander, zu einer ähnlichen Linie zusammentreten."

Daraus wird dann die Dimensionalität entwickelt.

Die Unteilbarkeit der Grenze wird ausführlich behandelt und gefolgert, dafs nicht zwei Grenzen nebeneinander liegen können. „Nach der Grundbeschaffenheit dieser (kontinuierlichen) Gröfsen haben deren unmittelbar aufeinander folgende Teile eine gemeinschaftliche Grenze."

Hieraus ergiebt sich die Unmöglichkeit, eine Linie aus einer Reihe nebeneinanderliegender Punkte zusammenzusetzen etc., „obschon in einer Linie unendlich viele Punkte gedacht und angenommen werden können."

„Auch giebt es keine kleinste Linie."

Becker, F., Die ebene Geometrie in neuer Anordnung. — Progr. Hanau 1870.

„Die allgemeinste Eigenschaft des Raumes ist seine (endlose) Ausdehnung nach allen Seiten, sowie seine überall denkbare Begrenzbarkeit."

Durch Verneinung jeglicher Ausdehnung im Raume[1]) wird man zur Vorstellung vom Punkte, als eines blofsen, ausdehnungslosen, unbegrenzbaren, doch aber oft als Grenze dienenden Ortes geführt."[2])

Zwischen Punkt und Raum werden nun angenommen „drei Arten von Raumgebilden, deren Begriffe man in aufsteigender Reihenfolge durch Vermittlung der Bewegungsvorstellung gewinnen kann."

„Eine Linie ist das Ergebnis der Bewegung eines Punktes. Ihr räumlicher Verlauf giebt ihre Lage, Gestalt und Gröfse an. Jede Linie hat eine Lage, bestimmbar durch Beziehung auf andere Raumgebilde. Jede Linie hat eine Gestalt, welche von der Art und Weise abhängt, wie der sie erzeugende Punkt sich bewegt. Jede Linie hat eine Gröfse, welche von der Menge der Bewegung abhängt.[3])

„An jeder Stelle im Verlauf einer Linie liegt ein Punkt. Die Anzahl der Punkte innerhalb einer Linie ist unendlich grofs, einer liegt dem andern unendlich dicht an."[4])

„Der erzeugende Punkt beschreibt alle Punkte der Linie, daher ist sie durch ihn vollständig bestimmt."

Analog werden die Flächen und Körper behandelt.

Dann heifst es weiter (§ 12):

„Hat man zwei Körperräume oder Körper von solcher Lage und Beschaffenheit, dafs wo der eine endigt, der andere beginnt, so haben beide eine Fläche als gemeinschaftliche

---

[1]) Man vergleiche den Ausdruck Du Bois-Reymonds: Der Punkt ist die Negation des Raumes im Raume.

[2]) Sicherlich würde diese Auseinandersetzung im Anfang des planimetrischen Unterrichts unverstanden bleiben. Die zitierte Stelle kann als guter Beleg dienen, dafs es naturwidrig ist mit dem Punkte zu beginnen.

[3]) „Menge der Bewegung" ist doch wohl identisch mit „Dauer der Bewegung". Damit wird aber in die Untersuchung ein Moment eingeführt, von dem man bei der mathematischen resp. geometrischen Betrachtung der Bewegung vollständig abstrahieren kann, die Zeit. Vergl. weiter oben.

[4]) Das ist ein Ausdruck, der sehr leicht zu Mifsverständnis führen kann. Man gewinnt den Eindruck, als wenn die Linie als aus Punkten bestehend angenommen würde.

Grenze. Man kann daher, wenn man vom Körper als einem begrenzten Raumstück ausgeht — ohne ihn aus der Bewegung einer Fläche entstanden zu denken — von hier aus auch zu dem Begriffe der Fläche gelangen, indem man sie als die gemeinschaftliche Grenze zweier zusammenstofsenden Raumteile betrachtet und dann — da sie ja doch nicht ein Teil dieser Körper oder Körperräume ist — von diesen absehend — sie an sich d. h. ohne Rücksicht auf die Körpergebilde, welche sie begrenzt, nimmt. Verfährt man so und hat man vorher bemerkt, dafs das Körpergebilde die drei Dimensionen (der Länge, Breite und Höhe) hat, so gelangt man zu der Fläche, als dem Gebilde mit nur den beiden Dimensionen der Länge und Breite, wenn man von den als aneinander angrenzend angenommenen Körpergebilden beiderseits die Dimensionen der Höhe bis zum Verschwinden abnehmen läfst. Dadurch wird zugleich klar, dass die Fläche zwei Seiten hat, jedoch so, dafs jeder Punkt und jede Linie der einen Seite zugleich auch der andern angehört."[1])

Analog können Linie und Punkt erzeugt werden.

„Der Punkt bleibt als letztes Ergebnis zurück, eine blofse Stelle im Raume ohne alle Ausdehnung. Das Verschwinden einer Dimension erzeugt auf jeder Stufe (beim Körper, der Fläche und der Linie) jedesmal ein Nullgebilde derselben Art. So hat der Körper die Fläche, die Linie und den Punkt zu seinen Nullgebilden, welche man als erster, zweiter und dritter Ordnung voneinander unterscheiden kann;[2]) die Fläche

[1]) Damit ist eine neue Schwierigkeit für die Vorstellung geschaffen; zwei Seiten, aber so dafs sie identisch sind, also jeder Punkt der einen der andern angehört und umgekehrt. Hier kann man doch nicht mehr von Seiten sprechen; das ist eben nur möglich, wenn man die Fläche mit ihrer stellvertretenden Vorstellung d. h. einem sehr dünnen Körper (Blatt Papier) verwechselt. Die Fläche selbst hat keine Seiten, sondern der Raum liegt seitlich von der Fläche, zu beiden Seiten der Fläche. In der Fläche erhalten wir dann zwei Seiten, wenn eine Linie die Fläche teilt, zu deren beiden Seiten die Flächenteile liegen. — Man vergl. die Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[2]) Nullgebilde verschiedener Ordnung scheint mir ein recht glücklich gewählter Ausdruck zu sein, da aus ihm sofort ersichtlich ist, dafs

hat als Nullgebilde die Linie und den Punkt; die Linie als Nullgebilde den Punkt."

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie. — Progr. Braunschweig 1887.

Die sehr ausführlichen Betrachtungen des Verfassers verdienen alle Beachtung. Ihre Ausführlichkeit verbietet es leider sie hier wiederzugeben, andererseits sind sie nicht geeignet im Auszug wiedergegeben zu werden. Nur einige Schlufsergebnisse mögen hier angeführt werden:

„Die Raumkörper mit ihren Grenzflächen, Grenzlinien und Grenzpunkten sind in unserem Geiste vorhandene Abbilder von Körpern der Aufsenwelt und zwar Abbilder von besonderer Einfachheit, da sie mit diesen nur in Form und Inhalt übereinstimmen."

„Diese Abbilder gehören zur Klasse der räumlichen Vorstellungen."

„Wenn man sich die Grenzflächen getrennt von ihren Raumkörpern, etc., vorstellt und dieselben dadurch gewissermafsen selbständig macht, so gelangt man zu einer ganzen Gruppe von räumlichen Vorstellungen."

Eine Anmerkung weist die Idealität der Gebilde nach.

„Selbständig gedachte Grenzflächen, Grenzlinien und Grenzpunkte heifsen Raumgebilde".

„Den Körpern und dem Raume der Aufsenwelt, dem Wirklichen, tritt in unserem Geiste der Raum mit seinen Raumkörpern und mit seinen Raumgebilden gegenüber."

„In synthetischer Betrachtung wird der Punkt als Element[1]) bezeichnet, der „bei der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung eine grundlegende Rolle spielt."

---

auch die Flächen und Linien in der That Null sind und also — insofern sie auch als Gröfsen aufgefafst werden — Gröfsen besondrer Art sind. Gut ist auch, dafs besonders darauf aufmerksam gemacht wird, dafs das Verschwinden irgend einer Dimension das Nullgebilde erzeugt, also bei dem Körper z. B. ebensogut das Verschwinden der Länge oder Breite, als der Dicke, wodurch ein gewifser Gegensatz, der sonst leicht mit diesen Begriffen verbunden wird, wegfällt.

[1]) Man beachte meine Ausführungen weiter oben.

Die Erklärungen werden geteilt in genetische und deskriptive. Die genetischen können wegen ihrer Übereinstimmung mit den üblichen Darstellungen übergangen werden.

„(Deskriptive Definition.) Eine Linie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte des Raumes, welche ein bewegter Punkt bei seiner Bewegung nach und nach durchläuft.“[1])

Analog sind die deskriptiven Betrachtungen bei Linie und Fläche.

Von Interesse ist noch die Bemerkung:

„Die Starrheit der Gebilde ist auch hier (d. h. bei der Bewegung. D. V.) durchgängig Voraussetzung, ebenso die Widerstandslosigkeit derselben gegeneinander und in Bezug auf den Raum.“

„Punktkontinuum,[2]) Linienkontinuum, Flächenkontinuum.“

---

[1]) Zur Charakterisierung des Unterschiedes zwischen den „genetischen“ und den „deskriptiven“ Definitionen soll auch die genetische hier zitiert werden: „Wenn ein Punkt seine Lage im Raume ändert, d. h. sich nicht etwa nur in sich selbst dreht, so zeichnet er bei seiner Bewegung im Raume eine stetige Reihe von Kopieen seiner selbst von deren Umgebung aus und erzeugt damit ein Raumgebilde, welches Linie genannt wird.“

Die Möglichkeit einer wirklichen Bewegung des Punktes wird von Wernicke offenbar angenommen, wie auch schon aus dem Zusatz, wenn er sich nicht etwa nur in sich selbst dreht, hervorgeht. Wie man sich dieses Drehen eines Punktes in sich selbst zu denken habe, ist mir nicht klar. Die beiden Definitionen könnte man auch als objektive und subjektive bezeichnen. Bei der genetischen erzeugt das Objekt Punkt durch seine Bewegung das Raumgebilde Linie, bei der deskriptiven thut es das betrachtende Subjekt durch Zusammenfassung aller Punkte in einer Gesamtheit. In der That handelt es sich in der Geometrie doch nur um subjektive Bewegung und es wäre also nur die deskriptive Definition zu acceptieren. Wernicke selbst giebt folgende Erklärungen: „Die Angabe der Art und Weise, nach welcher bestimmte Raumgebilde erzeugt werden, nennen wir genetische Definition, d. h. wir stellen durch genetische Definition die Existenz dieses oder jenes Raumgebildes fest.“ — „Neben der genetischen Definition, welche nur eine besondere Form der synthetischen Definition ist, benutzen wir auch die analytische Definition, welche in diesem Gebiete lediglich beschreibend zu Werke geht und demnach als deskriptive Definition bezeichnet werden kann.“

[2]) Ausführlich heifst es: „Die Linie tritt jetzt als eine Reihe stetig

„Man unterscheidet Linien, Flächen und Raumstücke als einfach, zweifach und dreifach ausgedehnte Punktkontinua."

„Der Raum selbst stellt sich demnach als ein dreifach ausgedehntes Punktkontinuum oder als ein zweifach ausgedehntes Linienkontinuum oder endlich als ein einfach ausgedehntes Flächenkontinuum dar."

„Der Punkt läfst sich *nicht* als Kontinuum darstellen; man bezeichnet denselben wohl auch, um seinen Charakter als Element hervortreten zu lassen, in Bezug auf die verschiedenen Arten der Ausdehnung als das nullfach ausgedehnte Gebilde."

„Der Punkt ist das erzeugende Element des Raumes und der Raumgebilde."

Da die Erzeugung in drei Stufen geschieht, so resultiert die Existenz der drei Dimensionen resp. zweier, resp. einer.

„Der Raum und die Raumgebilde sind Gröfsen" (ohne Rücksicht auf Quantität oder Mefsbarkeit).

An diese analytischen und synthetischen Betrachtungen knüpft sich noch ein ausführliches analytisch-synthetisches Kapitel.

Der Abschnitt „Die Lehre vom Raum und den Raumgebilden" behandelt die Geometrie als Wissenschaft. Dann erst geht Wernicke („entnommen der analytisch-synthetischen Betrachtung") zur „Euklidischen Geometrie" über. Die Axiome dieses Teils sollen wenigstens kurz angegeben werden.

„I. „Der Raum ist stetig ausgedehnt." (Zerlegbarkeit, Erzeugbarkeit.)

II. „Die Zerlegbarkeit des Raumes findet ihre Grenzen erst, wenn man beim Punkt angekommen ist."

III. „Der Punkt läfst sich als erzeugendes Element aller Raumgebilde und des Raumes selbst benutzen."

IV. „Der Raum ist gleichartig gestaltet."

V. „Der Raum ist als Punktkontinuum dreifach ausgedehnt (oder tridimensional)."

VI. „Der Raum ist in sich kongruent."

---

aufeinander folgender, d. h. ohne Unterbrechung (kontinuierlich) aneinander gefügter Punkte auf, als ein Punktkontinuum."

VII. „Der Raum ist monodrom gestaltet."

VIII. „Der Raum is unerschöpflich."

IX. „Der Raum ist einfach zusammenhängend."

X. „Der Raum ist unbegrenzt ausgedehnt."

Diese Axiome werden zusammengefafst in dem Satze:

„Der Raum ist ein dreifach ins Unbegrenzte ausgedehntes Punktkontinuum von einfachem Zusammenhange, in welchem sich durch Analyse und Synthese starr bewegliche Gebilde von monodromem Charakter in beliebiger Menge als Gröfsen aus einem Element (Punkt) erzeugen lassen."

Durch Aufstellung weiterer besondrer Axiome wird dann die allgemeine Geometrie derartig beschränkt, dafs sie in Übereinstimmung gebracht wird mit der Erkenntnis der Aufsenwelt.

Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Festschrift z. 34. Phil.-Vers. — Trier.

„Alle, auch die verwickeltsten räumlichen Formen (Figuren) können durch gesetzmäfsige Aneinanderreihung, durch bestimmte Drehungen oder fortschreitende Bewegungen dreier absolut einfacher, gewissermafsen atomistischer und daher auch undefinierbarer Grundformen oder Elemente, nämlich des Punktes, der Geraden und der Ebene hergestellt werden. Der Raum ist ebenfalls eine Grundform, aber unbeweglich und deshalb unfähig, zusammengesetzte Formen, welche untersucht werden können, zu bilden."

Klügels Wörterbuch giebt keine besonderen Erklärungen der vorliegenden Begriffe.

L. v. Pfeil, Grunerts Archiv 49. p. 180. Zur Theorie der geraden Linie.

„Ein nach Länge, Breite und Dicke begrenzt gedachter Raum ist ein geometrischer Körper. Einen Flächenraum oder eine Fläche denkt man blofs als Länge und Breite, eine Linie blofs als Länge. Betrachtet man blofs den Ort eines Dinges und denkt diesen ohne Länge, Breite und Dicke, so ist dieser Ort ein Punkt. Ein Punkt nach irgend einer Richtung fort-

bewegt, beschreibt eine Linie. Eine bewegte Linie beschreibt eine Fläche, eine bewegte Fläche einen Körper. Man kann also die Linie als den Weg eines Punktes, die Fläche als den Weg einer Linie, den Körper als den Weg einer Fläche betrachten."

Arneth, System der Geometrie.

„Die Form, die Gestalt, der mathematische Körper, der Raum, welchen der physische Körper einnimmt, ist das aus der äufseren Wahrnehmung durch Abstraktion Erhaltene, Gegebene, Mögliche, Denkbare ...."

„Eine bestimmte Form wird von dem übrigen Raume abgegrenzt durch Flächen, die Grenzen dieser sind Linien, die Grenzen der Linien Punkte."

„Der Punkt hat als Grenze der Linie keine Gröfse mehr. Der Ort im Raume, wo ein Punkt sich befindet oder gedacht wird, heifst sein absoluter Ort. Wird der Ort eines Punktes auf andere gegebene Örter bezogen, so erhält man den relativen Ort oder die Lage des Punktes. Die unmittelbare Beziehung eines Punktes zu einem andern wird Richtung genannt."

Nachdem sich Arneth über die Dimensionen ausgesprochen, fährt er fort:

„Die Form, der mathematische Körper, wird individualisiert durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Stellung der begrenzenden Flächen; die Fläche durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Lage der begrenzenden Linien; die Linie durch die Ausdehnung und Beschaffenheit innerhalb ihrer begrenzenden Punkte."[1])

---

[1]) Setzt man also einen Körper voraus, der nur von einer Fläche begrenzt wird, so kommt es allein an auf die Gröfse und Beschaffenheit dieser Fläche. Unmöglich aber wird diese Erklärung, wenn man sich eine unbegrenzte Fläche denkt, also z. B. eine Kugelfläche. Die Anzahl der begrenzenden Linien ist null; was soll man sich nun in diesem Falle vorstellen unter dem Ausdrucke, die Fläche wird individualisiert durch die Anzahl, Beschaffenheit, Gröfse und gegenseitige Lage der begrenzenden Linien?

Bartholomäi,[1]) Gradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

Die Definitionen der Raumformen sind:

„1) Der Körper ist die Raumform, welche drei Dimensionen hat.

2) Die Fläche ist die Raumform, welche zwei Dimensionen hat.

3) Die Linie ist die Raumform, welche eine Dimension hat.

4) Der Punkt ist die Raumform, welche gar keine Dimension hat."

„Es ist nun die Frage, von welcher Raumform die Entwicklung ausgehen müsse. Nach vorstehender Definition 4) ist der Punkt ohne alle Ausdehnung, ist also zwar räumlich, nimmt aber nicht selbst einen Raum ein; er ist das Raumlose im Raume, das absolut räumlich Einfache. Daher mufs der Punkt der Anfang der Untersuchung sein."[2])

1) Abhängigkeit der Elemente: „Der Punkt ist räumlich absolut einfach, folglich hat er keine Elemente, sondern ist selbst Element; er ist durch sich selbst vollkommen bestimmt. Er ist eine Stelle im Raume, nicht Raum selbst. Kein Punkt ist vom andern verschieden, oder: alle Punkte sind kongruent."[3])

2) Grösse: „Der Punkt ist ohne alle Ausdehnung, folglich hat er keine Gröfse: er läfst sich rücksichtlich der Gröfse nicht mit einem andern Punkte vergleichen."

---

[1]) Bartholomäi teilt seine Betrachtungen immer ein nach folgenden Gesichtspunkten: 1) Abhängigkeit der Elemente; 2) Gröfse; 3) Form; 4) Lage.

[2]) Wie ich am Anfang dieses Kapitels nachgewiesen habe — und worauf schon an verschiedenen Stellen im Verlauf der kritischen Untersuchungen hingewiesen worden, — sind Flächen und Linien ebensogut raumlos als der Punkt; sie nehmen in der That keinen Teil des Raumes ein und daraus, dafs der Punkt keinen Raum einnehme, darf die Berechtigung, ihn an die Spitze zu stellen, nicht gezogen werden. Dafs der Begriff Punkt unter den raumlosen Gebilden wieder eine besondere Stellung einnimmt, die zu der fraglichen Bevorzugung berechtigt, mufs aus andern Gründen abgeleitet werden.

[3]) Da Gröfse und Gestalt nicht in Betracht kommen können, so handelt es sich nur um Verschiedenheit der Lage bei verschiedenen Punkten. Man vergl. die beiden folgenden Sätze des Textes.

3) Form: „Da der Punkt ohne alle Ausdehnung ist, so ist er gestaltlos, d. h. alle Punkte sind ähnlich."[1])

4) Lage: „Liegen mehrere Punkte aufsereinander, so kann blofs von der Ordnung, in welcher sie aufgefafst werden sollen oder können, die Rede sein. Die ganze Frage wird durch die Kombinationsoperationen und Kombinationszahlen beherrscht. Die ersteren sind logisch, die letzteren mathematisch."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. Geometrie der Ebene.[2]) — Köln und Neufs 1877.

Es wird vom Körper ausgegangen und vermittelst Grenzbetrachtungen werden die Begriffe von Fläche, Linie und Punkt gewonnen.

„Der Punkt dient zur völligen Bestimmung eines Ortes im Raume."

„Obgleich hiernach einleuchtet, dafs die Fläche, die Linie, der Punkt nur am Körper vorkommen, so kann und mufs man sich dieselben doch auch abgesondert vom Körper vorstellen".[3])

Alsdann wird der umgekehrte Weg eingeschlagen und die Erzeugung der Gebilde durch Bewegung beschrieben. Es heifst schliefslich:

„Zur Vorstellung des geometrischen Körpers gelangt man mit Hilfe des physischen Körpers, indem man bei diesem von dem Stoffe, aus dem er besteht, absieht. Denn der geometrische Körper hat wie der physische Körper Ausdehnung, Grenze, Gestalt; er unterscheidet sich aber von demselben dadurch, dafs er nicht, wie dieser, aus irgend einem Stoffe besteht."

---

[1]) Etwas, was keine Gestalt hat, kann nicht einem andern ähnlich sein; denn was heifst ähnlich sein anders, als dieselbe Gestalt haben. Der Satz würde also mit andern Worten lauten: Die gestaltlosen Punkte haben dieselbe Gestalt.

[2]) Besprochen in H. Z. IX. p. 209—210.

[3]) Wenn man das nur könnte; später giebt Boymann an, wie man zur Vorstellung des geometrischen Körpers gelange, nicht aber, wie zu derjenigen der Raumgebilde. Daraus geht hervor, dafs auch Boymann die Vorstellung dieser Raumgebilde für nicht möglich hält.

Bretscheider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

„Jeder Form kommen die drei Ausdehnungen (Länge, Breite, Dicke) oder Abmessungen (Dimensionen) zu. Es ist indessen nicht nötig, an einer Form immer alle drei Abmessungen zugleich zu betrachten; man kann vielmehr auch bloſs zwei und selbst nur eine derselben in Untersuchung nehmen. Dadurch entstehen dei verschiedene Gattungen geometrischer Gegenstände, nämlich 1) solche, die bloſs eine Abmessung besitzen, sie werden Linien und ihre Abmessung Länge genannt; 2) solche, die zwei Abmessungen haben, sie heiſsen Flächen und ihre Abmessungen Länge und Breite; und 3) solche, denen alle drei Abmessungen zukommen und die man mit dem Namen Räume bezeichnet. Linien, Flächen und Räume werden unter der allgemeinen Benennung geometrische Gröſsen zusammengefaſst.“[1])

„Linien, Flächen und Räume kann man sich als ohne Aufhören fortgehend denken, oder sich auch vorstellen, daſs irgend ein Teil derselben auf bestimmte Weise von dem übrigen Ganzen abgeschieden sei; im ersten Falle nennt man sie unbegrenzt, im zweiten begrenzt. Da aber die Grenze einer geometrischen Gröſse kein Bestandtteil der letzteren selbst sein darf, so muſs sie immer eine Abmessung weniger haben, als die Gröſse, welche von ihr begrenzt wird.“

„Die Grenze einer Linie dagegen ist ein räumlicher Gegenstand, der gar keine Abmessung besitzen kann, sondern bloſs den Ort im Raume bezeichnen darf, wo die begrenzte Linie aufhört. Jede bestimmte Stelle im Raume aber, wenn sie als solche bezeichnet werden soll, wird ein Punkt genannt.“

Crelle, Über Parallelen-Theorien etc. — Berlin 1816.

„Ein nach allen Seiten ausgedehnter Raum heiſst körperlicher Raum. Eine Grenze, in welcher ein körperlicher Raum an einen andern stöſst, heiſst Fläche. Eine Grenze,

---

[1]) Die umgekehrte Anordnung der Raumgebilde wäre nach den einleitenden Sätzen doch viel natürlicher gewesen.

16*

in welcher ein Flächenraum an einen andern stöfst, heifst Linie. Eine Grenze, in welcher ein Linienraum an einen andern stöfst, heifst Punkt."

Hierzu giebt Crelle folgende wichtige Erläuterungen:[1])

„Die Fläche ist nicht in die körperlichen Räume ausgedehnt, die sie sondert, weil diese körperlichen Räume als Teile einer stetigen Gröfse ohne Zwischenraum aneinander liegen. Aber auch in keinen andren körperlichen Raum, weil sie an keinem andern liegt. Die Fläche ist also überhaupt als körperlicher Raum nicht ausgedehnt." (!)

Analog wird ausgeführt, dafs auch Linie und Punkt als körperlicher Raum nicht ausgedehnt sind; ausdrücklich hebt Crelle dann weiter hervor, dafs, wo Flächen, Linien und Punkte sind, auch körperliche Räume sind, weil die Grenze nicht da ist ohne das Begrenzte. Es heifst weiter:

„Da der Punkt nicht als Linien-, Flächen- oder körperlicher Raum ausgedehnt ist, so ist er gar nicht ausgedehnt. Der Punkt ist also das Unteilbare. Er ist kein Raum, sondern nur ein Ort im Raume."

„Da ein Punkt kein Raum ist und folglich keine Grenzen hat, so unterscheidet sich ein Punkt durch nichts[2]) von einem andern Punkte."

J. C. Becker, Abhandlungen aus den Grenzgebieten der Mathematik und Philosophie. III. Über die Grundbegriffe[3]) etc.

---

[1]) Man vergl. meine Ausführungen über die Raumgebilde.

[2]) Als durch die Lage. — Die erklärenden Worte, die sich für Punkt fast von allen angeführt finden, Ort, Stelle sind — wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben sein möge — nicht etwa Erklärungen (Definitionen) des Punktes, sondern nur andere Namen; sie besitzen jedoch erläuternden Wert.

[3]) Besprochen in Schl. Z. XV, 93 und ausführlich in H. Z. III, p. 465—473. — Sextus Empiricus schliefst seine Rezension (die letztere) trotz mannigfacher Bedenken, die er geäufsert hat, mit den Worten: „Diese Abhandlung scheint Referent als die wichtigste, lehrreichste und darum lesens- und empfehlenswerteste. Sie nötigt zweifelsohne denjenigen, der mit dem ernsten Willen, über geometrische Grundbegriffe klar zu werden, an sie herantritt, zum tieferen Nachdenken und dürfte vorzüglich geeignet sein zur Neubildung oder Befestigung geometrischer Grundbegriffe."

„Wie wir uns des Raumes erst mit der Einwirkung äufserer Objekte auf unsere Sinne als des Ortes, wo wir die Ursache dieser Einwirkungen suchen, bewufst werden, so gelangen wir auch erst durch die Wahrnehmung wirklicher Objekte zu der Vorstellung reiner Raumgebilde, indem wir von allen empirischen Daten derselben abstrahieren. Nur durch Abstraktion aus wirklichen Körpern erhalten wir succesive die Vorstellung von mathematischen Körpern, Flächen, Linien und Punkten. Obwohl durch Abstraktion erhalten, so sind diese Vorstellungen doch noch anschauliche Vorstellungen.[1]) Was wir aus einem angeschauten physischen Körper als mathematischen Körper übrig behalten, nachdem wir von allem, was unsere Sinne an ihm wahrgenommen, abstrahiert haben, ist gerade das, wovon nicht abstrahiert werden darf, ohne dafs das übrig bleibende aufhört, Anschauung zu sein: denn jeder Körper mufs notwendig raumerfüllend vorgestellt werden. Dieser vom Körper gerade eingenommene Raum wird aber nicht selbst als mathematischer Körper festgehalten, sondern das Bild, das wir von diesem Raume erhalten, die räumliche Gestalt, die wir nicht blofs hier, sondern an jeder beliebigen anderen Stelle des Raumes, die wir ebensogut als bewegt d. h. ihre Stelle ändernd, wie als ruhend uns vorstellen können: „Ein mathematischer Körper ist nicht ein begrenzter Raum, sondern das Bild eines begrenzten Raumes.“ Durch weitere Abstraktion gewinnen wir in der Oberfläche des Körpers oder in einem beliebigen Teile derselben die immer noch anschauliche Vorstellung einer Fläche. Anschaulich für sich allein ist dieselbe aber nur, insofern sie eine Gestalt hat, ein Bild ist: eine Fläche erscheint in jedem Momente, wo sie

---

[1]) Wie aus meinen früheren Auseinandersetzungen hervorgeht, befinde ich mich hier nicht in Einklang mit dem berühmten Verfasser. Ich kann durchaus die Raumgebilde Flächen, Linien und Punkte nicht für anschauliche Vorstellungen halten, sondern erkläre sie für Vorstellungen unseres Denkens d. h. für Begriffe. — Übrigens geht Becker an einer andern Stelle (in derselben Abhandlung) auf diese Frage näher ein und kämpft selbst gegen die Auffassung, als wenn die Raumgebilde (aufser Körper) für sich betrachtet anschauliche Vorstellungen wären.

anschaulich vor uns steht, als Trennungsstelle zweier Räume; als Gegenstand der Mathematik ist sie jedoch meist nicht diese Stelle, sondern das Bild dieser Stelle. Auch kann man sie auffassen als Grenze ....

Dasselbe gilt von der Linie, wenn man sie als Bild der Grenze einer Fläche oder als Bild der Trennungsstelle zweier Flächenteile, oder als Begrenzung oder Teilstelle eines Flächenbildes auffafst. Der Punkt endlich ist nur noch als Begrenzung oder als Teilstelle einer Linie oder als Spitze an einer Fläche, nicht mehr für sich allein anschaulich vorstellbar, da er keine Gestalt hat."

Bei allen drei Raumgebilden macht Becker darauf aufmerksam, dafs sie ebenso gut im Zustand der Ruhe, als in demjenigen der Bewegung aufgefafst werden können. „Allerdings ist die Bewegung eines Raumgebildes, wie dieses selbst, eine blofs eingebildete."[1])

„Die Objekte der Geometrie, die reinen Raumgebilde werden aber im Raume nur angetroffen, insofern man sie entweder durch Abstraktion aus wirklichen Objekten übrig behält, oder insofern man sie selbst erst erzeugt."

„Dadurch, dafs wir räumliche Gestalten ihren Ort im Raume stetig ändernd uns vorstellen können, ist es allein uns möglich, selbständig neue Raumgebilde zu erzeugen. Denn ein neues Raumgebilde entsteht vor unserem inneren Auge, indem wir ein anderes bereits bekanntes im Zustande der Bewegung uns vorstellen, und dabei die Bahn dieser Bewegung verfolgen. Denken wir uns einen Punkt bewegt, so erhalten wir in seiner Bahn die Vorstellung einer Linie, und aus der gedachten Bewegung einer Linie geht das Bild einer Fläche hervor etc."

„Insofern also unter Körper, Flächen und Linien nicht

---

[1]) Man vergl. den Artikel „Bewegung" und die kurzen Bemerkungen über Bewegung weiter oben. — Beckers Ausdruck, dafs die Bewegung nur etwas Eingebildetes sei, scheint sich zu decken mit meiner Ansicht, dafs die Bewegung nur als eine Zuthat des betrachtenden Subjektes aufzufassen, dafs sie nicht objektiv wirklich, sondern nur im Denken vorhanden.

Teile des Raumes oder Stellen in demselben, sondern die Bilder, d. h. die anschaulichen Vorstellungen, welche wir von ihnen haben, verstanden werden, können dieselben wirklich durch Bewegung anderer Raumvorstellungen erzeugt werden."

Becker widerlegt alsdann Trendelenburg, der vom Punkt — den er einfach setzt — ausgeht und durch die Annahme, dafs die Bewegung das erste in unserem Bewufstsein sei, zu „sonderbaren Ideen" gekommen ist, die „eine heillose Verwirrung der Begriffe angerichtet haben." Auf Trendelenburgs Ausführungen mufs bei der Behandlung des Begriffs Bewegung noch näher eingegangen werden. — Auch gegen Prof. Wolf in Zürich polemisiert Becker, der, allerdings auch ganz im Gegensatze zu meinen Ausführungen, folgendes in seinem Handbuche sagt: „Früher stellte man gewöhnlich den Begriff der dreifachen Ausdehnung an die Spitze der Geometrie und stieg davon durch Zerlegen zu dem Punkte hinab"; es geht daraus hervor, dafs Wolf mit dem Punkte beginnt. Becker schliefst seine Zurückweisung dieses Verfahrens mit den Worten: „Man geht aber auch nicht 'vom Begriff der dreifachen Ausdehnung', sondern von der anschaulichen Vorstellung des Raumes und seiner Teile aus, um von ihnen zu dem durchaus nicht von selbst klaren Begriff des Punktes zu gelangen. Hat man diesen aber einmal gewonnen, so ist es allerdings das Einfachere und es läfst sich nichts dagegen einwenden, wenn man nun wieder umgekehrt von ihm aus zu dem weniger einfachen stetig fortschreitet."

Der Schlufs der Abhandlung beschäftigt sich noch einmal mit den Riemann-Helmholtzschen Untersuchungen.

J. B. Sturm, Die Grundanschauungen der Mathematik.

„Reale Einheiten sind die geometrischen Gebilde. In ihnen treten die unterständlichen Einse nicht so klar hervor, als in den idealen, aber sie sind vorhanden, jedoch nur idealiter. Der Geist zerlegt nämlich das geometrische Gebilde in Punkte; aber diese Zerlegung ist keine reale, oder eine solche, nach welcher z. B. ein Dreieck in Stücke geteilt wird, sondern nur eine ideale, und eine im Geiste vollzogene. Wenn auch

die Punkte nicht gezählt werden können, ihre Summe ist realiter vorhanden,[1]) sie besteht nämlich in dem geometrischen Gebilde selbst. Diese ideale Zerlegung der geometrischen Gebilde ist es, welche direkt ihre Gleichheit und die Bedingungen dieser aufzeigt. Dasjenige, welches die mehreren Punkte faſst, ist das gröſsere. Unter Grösse eines geometrischen Gebildes ist also der Umfang seines Ausgedehntseins zu verstehen."

„Die Linien, Flächen können aber auch zu Flächen, Körpern zusammengesetzt werden."

„Raum und Zeit entstehen nicht aus der Bewegung; diese setzt vielmehr Raum und Zeit voraus ..... Allein die Erkenntnis des Räumlichen und die Erkenntnis des Punktes existieren zumal; mit der Vorstellung des Ausgedehntseins nach drei Richtungen ist die des Punktes unmittelbar verbunden; ebenso die der Linie,[2]) denn Linie ist nichts anderes als Richtung. Wie kann man also sagen, daſs durch die Bewegung eines Punktes die Linie entstehe? Zudem ist mit dem Begriffe der Bewegung ein wohin verbunden; dieses wohin ist aber nicht denkbar ohne Raum."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie etc.

„Eine Elementarsetzung im Nebeneinander in dem Sinne, daſs sie weiter keine Bestimmung enthalten soll, als den allgemeinen absolut einfachen Akt des Setzens, heiſst in der geometrischen Sprache Punkt. Wir klassifizieren einen Sinneseindruck nach diesem Begriffe, wenn er ein absolut einfacher ist. Der Punkt ist deshalb ebenso Grenze eines jeden geometrischen Gebildes, wie die Einheit Grenze einer jeden arithmetischen Form, und die Null Grenze eines jeden arithmetischen Inhaltes. Zwei Punkte nebeneinander ohne Zwischenraum ist deshalb ein Widerspruch; es wäre ein Nichts,

---

[1]) Damit stellt Sturm sich auf den Standpunkt, den Punkt als etwas Ausgedehntes zu fassen, sonst könnte die Summe von Punkten nicht realiter als Linie existieren.

[2]) D. h. doch nur der geraden Linie.

welches trotz seiner Nicht-Existenz zwei wirkliche Grenzen hätte."[1])

„Ebensowenig wie die Eins eine Zahl,[2]) die Null eine Quantität, kann der Punkt ein geometrisches Element[3]) genannt werden; er ist lediglich Grenzbestimmung und kann nie etwas anderes werden."

„Geometrischen Körper nennen wir das Gebilde, welches durch die Wechselwirkung dreier einfacher Ausdehnungen entsteht, also eine Funktion aus drei Bestimmungen der Ausdehnung."

Beez,[4]) Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen i. V.

„An der Spitze der Euklidischen Geometrie steht die Erklärung: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Bei dieser Definition, wie auch bei einigen anderen vermissen wir vor allen Dingen die Angabe des allgemeinen Begriffs, unter welchem der speziellere Begriff „Punkt" zu subsummieren ist. Wir erfahren nicht, in welcher Beziehung der Punkt, der doch Gegenstand der Raumlehre sein soll, zum Raume steht, ob er überhaupt etwas Räumliches ist. Mit demselben Rechte liefse sich auch die „Null" oder die „Eins" der Algebra, das „Jetzt" in der Zeit oder ein beliebiger anderer Zeitpunkt, ja jeder abstrakte Begriff, der sich nicht in Teile zerlegen läfst, als etwas definieren, was keine Teile hat. Diesen Fehler haben spätere Geometer — aber offenbar nicht im Sinne Euklids — dadurch zu verbessern gesucht, dafs sie definieren: Der Punkt ist ein Ort oder eine Stelle im Raume, die keine Ausdehnung hat. Dann könnte man auch eine Linie, eine Fläche, einen Körper als eine Stelle im Raume erklären, welche bezüglich eine, zwei

[1]) Man vergleiche den Artikel „Abstand". Wird der Begriff „Abstand" als ein a priori gegebener ausdrücklich in die Geometrie eingeführt, so werden sich derartige Untersuchungen, wie die vorliegende, unendlich einfacher gestalten.

[2]) Man wird mit Recht fragen, was denn die Eins sei, wenn nicht eine Zahl.

[3]) Geometrisches Element, sehr wohl, — aber niemals Raumelement.

[4]) Man vergl. auch Beez, Die Elemente der Geometrie; besprochen in Schl. Z. XIV, 46.

oder drei Abmessungen besitzt. Der Punkt kann wohl, wie jedes andere Raumgebilde, eine Stelle im Raume einnehmen, ist aber nicht identisch mit dieser Stelle, da er sich fortbewegen kann, während die Stelle bleibt.[1]) Wollte man aber trotzdem diese Definition beibehalten oder auch zugeben, der Punkt sei ein Raumgebilde — nicht Raumgröfse — welches keine Ausdehnung besitzt, so würde man doch immer die Vorstellung des Raumes neben der des Punktes im Raume einführen, also den Aufbau der Geometrie an beiden entgegengesetzten Enden Punkt und Raum gleichzeitig beginnen, während sich doch zeigen läfst, dafs die Vorstellung des letzteren allein hierzu ausreicht. Dafs aber die Verbesserung der Euklidischen Definition nicht im Sinne Euklids liegt, glaube ich aus folgenden Gründen annehmen zu müssen. Euklid kennt blofs Punkte, Linien, Flächen, Körper. Der Raum, in welchem dieselben existieren, ist ihm als Vorstellung unbekannt, er besteht für ihn blofs als Möglichkeit, Konstruktionen ausführen zu können. Nun ist der Punkt von den genannten vier Dingen das einfachste, eine *μονάς*, etwas Ursprüngliches, Unteilbares und deshalb erscheint es ihm, dem Schüler Platos, als das Wichtigste. Hiermit steht auch die Auffafsung seines Kommentators Proclus, der eine lange Auseinandersetzung zu der ersten Definition Euklids gegeben hat, im Einklang.

„Er schreibt: „Dafs in Bezug auf den Übergang vom Zusammengesetzten zum Einfachen der Geometer vom dreifach Ausgedehnten zur Grenze desselben, zur Fläche, von dieser Fläche zu ihrer Grenze, der Linie, von der Linie zu dem jeglicher Ausdehnung entbehrenden Punkt gelangt, ist oft gesagt worden und allgemein bekannt. Da aber diese Grenzen wegen ihrer Einfachheit oft wichtiger erscheinen als die Natur des Zusammengesetzten, oft aber auch, wenn sie ihre Existenz dem verdanken, was von ihnen begrenzt wird, etwas Zufälligem gleichen, so ist in beiden Fällen festzustellen,

---

[1]) Ich halte Punkt und Stelle (oder Ort) nur für zwei verschiedene Bezeichnungen desselben Begriffs; allerdings nehme ich auch die thatsächliche Bewegungslosigkeit des Punktes an, würde also hier folgern müssen: Punkt und Stelle sind identisch, daher der Punkt sich auch nicht bewegen kann.

in welchen Arten des Seienden das Eine oder das Andere erkannt wird.“ Er führt nun weiter aus, dafs in nichtmateriellen Dingen das Einfache wichtiger sei als das Zusammengesetzte ... — In materiellen Dingen dagegen sei das Zusammengesetzte wichtiger als das Einfache ... — Es mögen diese Ausführungen genügen, um zu zeigen, dafs Euklid als Platoniker notwendig beim Punkte beginnen und von ihm aus die Raumgebilde entwickeln mufste, freilich ohne sich bewufst zu werden, dafs er doch immer den dreidimensionalen Raum stillschweigend postulierte. Daher mifslingen ihm auch die Definitionen der Linie und Fläche, da er den allgemeinen Begriff Raumgröfse nicht kennt. Eine Linie ist nach ihm „eine Länge ohne Breite“ und eine Fläche, was „Länge und Breite hat“, als ob Länge und Breite ursprüngliche, einfache Begriffe wären und nicht vielmehr erst durch Abstraktion aus dem flächenhaften Wahrnehmungsbild unserer Gesichtsempfindung oder aus der Vorstellung des festen Körpers, die wir durch Kombination von Gesichts- und Tastempfindungen erhalten, abgeleitet würden. Die dritte Erklärung: „Das Äufserste einer Linie sind Punkte“ und die sechste: „Das Äufserste einer Fläche sind Linien“ stellen den erfahrungsgemäfsen Zusammenhang des Punktes mit der Linie und der Linie mit der Fläche fest.“

Nachdem Beez dann noch die Gerade und die Ebene besprochen, Ausführungen, die an andrer Stelle zitiert werden, schliefst er folgendermafsen:

„Durch die vorstehenden Betrachtungen glaube ich zu dem Schlufs berechtigt zu sein, dafs man bei der Begründung der Geometrie nicht vom Punkt, sondern vom Körper ausgehen müsse,[1]) an dem wir ja überhaupt unsere Raumvorstellung zuerst erlernt haben und ohne den wir vermutlich dieselbe gar nicht oder wenigstens nicht in gleicher Deutlichkeit besäfsen.“

Crelle, Lehrbuch der Elemente. — Berlin 1826.

[1]) Dafs ich in dieser Frage mit Beez vollständig übereinstimme, geht zwar aus meinen früheren Ausführungen hervor, soll aber auch hier noch einmal ausdrücklich betont werden.

p. 1. „Die Grenzen von Räumen heifsen Flächen. Ein begrenzter Raum heifst körperlicher Raum zum Unterschiede von dem Raume überhaupt, in welchem sich begrenzte Räume befinden. Die begrenzenden Flächen heifsen auch Flächenräume.

Die Durchschnitte von Flächen, welche also Teile der Flächen begrenzen, heifsen Linien.

Die Durchschnitte von Linien, welche nun Teile der Linien begrenzen, heifsen Punkte.

Flächen sind daher Grenzen körperlicher Räume, Linien sind Grenzen von Flächen, und Punkte Grenzen von Linien, und so, wie man aus dem unbegrenzten Raume beliebige körperliche Räume absondern und weiter in dieselben beliebige Flächen legen kann, so kann man in Flächen-Räume beliebige Linien und in Linien beliebige Punkte legen.

Von Flächen begrenzte körperliche Räume, und von Linien begrenzte Flächen-Räume heifsen auch Figuren, auch wohl blofs letztere Figuren, erstere, abgekürzt, Körper.

Je nachdem die Flächen, welche Körper, oder die Linien, welche Flächen, oder die Punkte, welche Linien begrenzen, mehr oder weniger Raum einschliefsen, sind die Körper, Flächen, Linien gröfser oder kleiner. Die Gröfse der Körper, Flächen und Linien in diesem Sinne heifst Ausdehnung.[1])

Da sich Linien nicht in die Flächen, die sie begrenzen, sondern nur in sich ausdehnen, so haben sie nur eine Ausdehnung. Diese eine Ausdehnung heifst Länge. Flächen dehnen sich nicht in die körperlichen Räume aus, die sie begrenzen, wohl aber neben beliebige Linien, die man in sie legen kann. Diese zweifache Ausdehnung wird bezeichnet, wenn man sagt: Flächen dehnen sich in die Länge und in die Breite aus. Körper dehnen sich auch neben beliebige Flächen aus, die man in sie legen kann. Deshalb sagt man, sie dehnen sich in die Länge, in die Breite und in die Höhe aus. Die Ausdehnung der Körper und Flächen über-

---

[1]) Hier ist der Ausdruck, dafs Punkte auf einer Linie, oder Linien auf einer Fläche Raum einschliefsen, zu beanstanden, denn weder Flächen noch Linien nehmen überhaupt Raum ein, also auch nicht Teile von ihnen.

haupt heifst auch Inhalt, auch wohl bei Körpern insbesondere, zum Unterschiede, Volumen.

Die verschiedenen Arten der Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe heifsen Abmessungen. Die Körper haben also drei Abmessungen, die Flächen zwei und die Linien eine.

Da gleich grofse Körper, Flächen und Linien verschiedene Gestalt und gleichgestaltete Körper, Flächen und Linien verschiedene Gröfse haben können, so kommt es nicht auf die Ausdehnung oder Gröfse der Körper, Flächen und Linien allein an, sondern auch auf ihre Gestalt".[1])

Francoeur, Vollständiger Lehrkursus der reinen Mathematik etc. — Bern, Chur und Leipzig 1839. I, 3.

„Jeder Körper hat drei Abmessungen oder Dimensionen, welche man mit den Namen Länge, Breite, Höhe (Dicke oder Tiefe) bezeichnet. Die Grenzen eines Körpers, die ihn vom unendlichen Raume unterscheiden und ohne die er nicht gedacht werden kann, werden Flächen genannt. Treffen die Flächen eines Körpers je zwei zusammen, so haben solche ebenfalls ihre Grenzen, die Linien heifsen. Die Linien endlich haben an dem Ort, wo sie einander begegnen, ihre Grenzen, die Punkte genannt werden.

Diese verschiedenen Arten von Grenzen geben das Mittel ab, wonach wir die Figur des Körpers beurteilen.

Wiewohl es keine Körper ohne diese drei Dimensionen geben kann, so abstrahieren wir jedoch öfters von einer oder zwei derselben. Handelt es sich z. B. von der Gröfse eines Grundstückes, von der Höhe eines Gebäudes, so hat man es nur mit einer Fläche oder einer Linie zu thun.[2])

„Wir unterscheiden den geometrischen Körper von dem physikalischen. Jener ist der blofse Raum, den der andere einnimmt, abgesehen von aller darin enthaltenen Materie.

---

[1]) Insofern man Gebilde für sich betrachtet; bei der Betrachtung mehrerer Gebilde kommt es auch auf die gegenseitige Lage an.

[2]) Diese Bemerkung ist recht gut, da sie uns ein Beispiel aus der Praxis giebt.

Man betrachtet in der Geometrie an dem physikalischen Körper nur seine Form und Gröfse. — Der geometrische Punkt, dem jede Ausdehnung fehlt, ist blofs in der Idee möglich.[1]) Von gröfseren oder kleineren Punkten kann also hier nicht die Rede sein."

„Man kann eine Linie gewissermafsen als die Bahn ansehen, die ein Punkt bei seiner Bewegung im Raume beschreibt."

---

v. Forstner, Grundrifs etc. — Berlin 1826.

„Stellen wir uns einen Teil dieses Raumes (s. das betr. Zitat) überall als begrenzt vor, so erhalten wir einen Körper, wie die Geometrie ihn nur betrachtet. Das was den Körper begrenzt, heifst seine Fläche; das was die Fläche begrenzt, heifst Linie, und die Grenze der Linie heifst ein Punkt.

„Der Körper ist ein Teil des Raumes, also mit ihm gleichartig, daher auch er nur Ausdehnung hat.

Die Fläche ist kein Teil des Körpers, sondern nur Grenze desselben; aber sie ist eine stetige Gröfse.

Die Linie ist kein Teil der Fläche, sondern nur die Grenze derselben; doch ist sie eine stetige Gröfse.

Der Punkt ist nur Grenze, aber kein Teil der Linie.

Es kann also nie eine Linie aus der Zusammensetzung von Punkten, nie eine Fläche aus der Zusammensetzung von Linien und nie ein Körper aus der Vereinigung von Flächen entstehen, wenn man auch noch so viele derselben an oder auf einander bringt.[2])

Daher sind Körper und Flächen, Körper und Linien, sowie Flächen und Linien, ungleichartige[3]) Gröfsen."

---

[1]) Ist denn ein geometrischer Körper anders als in der Idee möglich? Er ist doch auch nur etwas Gedachtes.

[2]) Dafs dies so besonders hervorgehoben wird, wie hier geschieht, ist sehr richtig; es wird dadurch einer falschen Vorstellung von vornherein vorgebeugt.

[3]) Es wäre wohl nicht zwecklos gewesen auf diese Ungleichartigkeit noch etwas näher einzugehen, besonders da die Gleichartigkeit des Raumes vielleicht dazu verleiten könnte, auch für die Raumgebilde Gleichartigkeit vorauszusetzen.

Auch die Fläche hat unendlich viele Ausdehnungen, nur nicht nach allen Richtungen hin. Von diesen Ausdehnungen betrachten wir aber nur zwei."[1])

„Die Linie hat nur eine Ausdehnung."

„Der Punkt kann, als Grenze der Linie, gar keine Ausdehnung haben, weshalb er auch keine Gröfse ist."

„Wenn auch Körper, Fläche, Linie ihre Grenzen haben, so kann man sie sich dennoch als unendlich ausgedehnt vorstellen, welche Vorstellung oft ihren Nutzen hat. Der Punkt kann aber durchaus nicht ausgedehnt gedacht werden, ohne dabei gleichsam zur Linie, Fläche oder Körper zu werden, welche Vorstellung hier nicht gültig sein kann."

„Da die Geometrie den Körper nur in Hinsicht seiner Ausdehnung betrachtet, so abstrahiert sie von allem, was wir aufser derselben bei den Körpern, wie sie uns im Leben erscheinen, noch finden, als Materie, Gewicht, Farbe u. s. w." „Es sind daher die vier geometrischen Begriffe: Körper, Fläche, Linie und Punkt nur Ideale, welche wir in der Wirklichkeit nirgend allein finden.

Und dennoch lassen sich die geometrischen Lehren auf alle Körper u. s. w., wie wir sie im Leben finden,[2]) anwenden, eben weil sie das betrachten, was allen Körpern u. s. w. gemein ist, die Ausdehnung nämlich. — Aber eben hierin finden auch viele, bei der Anwendung der Geometrie vorkommenden kleinen Unrichtigkeiten ihren Grund, weil das, was wir im Leben vorfinden, das Ideal nicht[3]) ist, von welchem die Lehren der Geometrie ausgesagt werden . . . ."

„Man vergesse nie, dafs das, was von einer Figur bewiesen wird, nicht von der Figur als solche, sondern stets von dem Ideale gilt, dessen unvollkommenes Bild die Figur ist, die als sinnliches Zeichen nie das Ideal erreichen kann."

[1]) Es ist merkwürdig, dafs die analoge Betrachtung beim Körper fehlt. Vielleicht würde auch ein Eingehen darauf, dafs der Körper nach unendlich vielen Richtungen ausgedehnt ist, dafs die Fläche ebenfalls nach unendlich vielen Richtungen ausgedehnt ist, dafs aber etwas ganz Verschiedenes vorliegt, nicht ohne Nutzen im Unterricht sein.

[2]) Etwas anderes wie Körper finden wir im Leben nicht.

[3]) Wenn wir die Raumgebilde wirklich vorfänden, so wären es eben keine Ideale.

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

Nachdem die geometrischen Gebilde vom Körper aus als Grenzen bestimmt sind, wird auch der umgekehrten Betrachtungsweise, der Entstehung der Gebilde durch Bewegung gedacht.

Grunert, Lehrbuch der Mathematik. II. — Brandenburg 1870.

„Ein Punkt ist das, was gar keine Ausdehnung, gar keine Teile hat.“[1])

„Was man im gemeinen Leben Punkte nennt, sind keine geometrischen Punkte, sondern kleine aus Tinte, Kreide etc. bestehende physische Körper, die aber dem wahren geometrischen Begriffe eines Punktes desto näher kommen, je kleiner sie sind. Den geometrischen Punkt mufs man sich in der That ohne alle Ausdehnung vorstellen, da derselbe vorzüglich gebraucht wird, um im Raume einen Ort bestimmt anzugeben.“

„Unmittelbar ergiebt sich auch hieraus, dafs von gröfseren und kleineren Punkten in der reinen Geometrie gar keine Rede sein kann, dafs aber auch wahre geometrische Punkte blofs in der Vorstellung oder in der Idee möglich sind, mit der Hand sich nicht bilden oder machen lassen.“

„Denkt man sich jetzt, dafs ein Punkt sich auf eine beliebige Weise im Raume bewegt, so nennt man den Weg, auf welchem er sich bewegt, gewissermafsen die Spur, welche er bei seiner Bewegung zurückläfst, eine Linie, woraus sich zugleich unmittelbar ergiebt, dafs, weil der Punkt gar keine Ausdehnung hat, die Linie nur nach einer Richtung oder Dimension, nämlich blofs nach der Länge, ausgedehnt ist, oder dafs die Linie, wie man dieselbe auch wohl zu definieren pflegt, eine Länge ohne Breite ist.“ „Alles,[2]) was nur nach

---

[1]) Grunert schliefst sich nicht nur in der Anordnung (von Punkt zu Körper) an Euklid an, sondern giebt auch hier und da wörtliche Euklidsche Definitionen.

[2]) Die folgenden Ausführungen schliefsen sich ganz unvermittelt an das Vorhergehende an.

zwei Richtungen oder Dimensionen, nämlich nach Länge und Breite, ausgedehnt ist, heifst eine Fläche. Ein sinnliches Bild einer Fläche hat man an der äufsersten Oberfläche eines beliebigen physischen Körpers, indem Jeder, der eine solche Oberfläche betrachtet, offenbar ganz von einer Dicke derselben abstrahiert und blofs ihre Ausdehnung nach der Länge und Breite ins Auge fafst. Man kann sich eine Fläche auch durch die Bewegung einer Linie im Raume entstanden denken . . . ."

„Jeder nach drei Richtungen oder Dimensionen, nach Länge, Breite und Dicke, ausgedehnte und nach allen Seiten hin völlig begrenzte Raum[1]) heifst ein geometrischer Körper . . ."

Erst hierauf kommt Grunert auf die Grenzbetrachtung, erwähnt aber nur, dafs die Fläche die Grenze des Körpers.

Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882.

„Es giebt drei Arten Raumgröfsen: Körper, Flächen, Linien.

Körper werden begrenzt von Flächen (Oberflächen), Flächen werden begrenzt von Linien, Linien werden begrenzt von Punkten. Ein Punkt ist ein im Raum gedachter Ort, keine Gröfse.

Die Bahn eines bewegten Punktes ist eine Linie; die Bahn einer bewegten Linie ist eine Fläche; die Bahn einer bewegten Fläche ist ein Körper.

Eine Linie hat eine Ausdehnung etc. . . . ."

Helmes, Die Elementarmathematik. II.[2]) — Hannover 1874.

„Ein vollständig abgeschlossener oder abgegrenzter Raum[3]) heifst ein geometrischer Körper.

---

[1]) Es würde wohl besser sein zu sagen: Raumteil, damit der Gedanke an verschiedene Räume gar nicht aufkommen kann.

[2]) Besprochen in Schl. Z. IX, 82 und in H. Z. VII. p. 134.

[3]) Vergleiche die betreffende Anmerkung bei Grunert.

Sieht man ab (abstrahiert man) von der Ausdehnung oder Erstreckung des Körpers in sein Inneres hinein, von seiner Dicke oder Tiefe, und betrachtet nur die Gröfse und Gestalt seiner Grenze, so erzeugt man die Vorstellung einer zweiten Art räumlicher Gröfsen, die der Flächen, denen sonach im Vergleich mit den Körpern eine räumliche Ausdehnung, genannt Dicke oder Tiefe, fehlt.

Die Fläche ist die Grenze des Körpers, nicht ein Teil desselben.

Die Fläche ist ein durch Abstraktion gewonnener, ein abstrakter Begriff."

Durch analoge Betrachtungen werden die räumlichen Vorstellungen von Linie und Punkt erzeugt und dieselben als Grenzen bestimmt.

„Der Punkt ist keine räumliche Gröfse mehr. Denn man findet bei der Prüfung der wie oben gewonnenen Vorstellung der Linie nur noch die eine Ausdehnung, genannt Länge, vor, und indem man von ihr aufs neue absieht, bleibt in der Vorstellung für die Grenze der Linie, den Punkt, gar keine räumliche Ausdehnung mehr zurück; es bleibt nichts übrig, von dem Gestalt und Gröfse durch eine mögliche Veränderung desselben erfafst und unterschieden werden könnte; der Punkt ist völlig ausdehnungs- und gestaltlos; er ist wieder ein nur durch Abstraktion gewonnener, ein abstrakter Begriff, er bezeichnet eine gedachte Stelle des Raumes."

Sonach bildet sich die Vorstellung und der Begriff dreier Arten und nur dreier Arten räumlicher Gröfsen, der Körper, der Flächen und der Linien; dazu die Vorstellung und der Begriff der ausdehnungslosen Stelle im Raume, des Punktes.

Bei der Fläche unterscheidet man zwei verschiedene, entgegengesetzte Seiten derselben nach den beiden Körpern, deren gemeinschaftliche Grenze sie ist. Bei der Linie und bei dem Punkte unterscheidet man zwei verschiedene Seiten derselben nach den Flächen und nach den Linien, deren gemeinschaftliche Grenzen sie sind. In Beziehung auf eine bestimmte Fläche, in welcher eine Linie liegt, unterscheidet man die beiden entgegengesetzten Seiten dieser Linie; in Beziehung auf

eine bestimmte Linie, worin ein Punkt liegt, die beiden entgegengesetzten Seiten dieses Punktes."[1])

Alsdann ordnet Heger die Gebilde nach dem Grade ihrer Einfachheit vom Punkt bis Körper und betrachtet die Entstehungsweise der räumlichen Gebilde durch Bewegung.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

„Ein Punkt ist die Vorstellung von einem Teilchen eines natürlichen Körpers, welches so klein gedacht wird, dafs es keinen Raum mehr einnimmt."

Eine Linie ist die Vorstellung von der Spur eines sich bewegenden Punktes.

Eine Fläche heifst die Vorstellung von der Spur einer Linie, welche sich nicht in der Richtung ihrer Länge bewegt.

Der von einer oder mehreren Flächen eingeschlossene Raum heifst ein Körper."

Weitere Literatur:

Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft. — Hannover 1875.
Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Bespr. in Schl. Z. XIV, 4.
Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome. — Bespr. in Schl. Z. XXIV, 34.

Programme:

Fuhrmann, W., Über Abhängigkeit geometrischer Gebilde. — Königsberg 1870.
Kress, H., Zur Elementargeometrie. — Meiningen 1871.
Komeck, Über einige Definitionen in der Geometrie. — Kempen 1872.
Wernekke, Mertschinskys Einleitung zur Geometrie. Übersetzt und mit Anmerkungen. — Borna 1874/75.
Ecke, J. B., Versuch einer heuristischen Behandlung der Planimetrie. — Dillingen 1875.
Kudelka, Über eine planimetrische Grundlage für die neuere Geometrie. Linz 1877.
Müller, E., Versuch einer organ. Entwicklung der Geometrie etc. — Neu-Strelitz 1877.
Dietrich, Anfangsgründe der Geometrie. — Greiffenberg 1878.
Polster, Geometrie der Ebene etc. — Würzburg 1878.

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels

Junghänel, Kursus zur Einführung in die Geometrie. — Döbeln 1879.
Killing, Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. — Brilon 1880.
Hoffmann, J., Die Geometrie in ihrer Abhängigkeit von den Maſsverhältnissen des Raumes. — Graz 1881.
Ballauf, Über die mathematischen Definitionen und Axiome. — Varel 1879.
Bammert, Über das mathematische Unendliche. — Ehingen a/D. 1884.
Casse, Das Unendliche in der Mathematik und das Gröſsenelement. — Osterode a/H. 1879.
Endert, Die logischen Prinzipien der Mathematik. — Detmold 1882.
Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. — Breslau 1885.
Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881.

IV. Kapitel.

Die Ebene.

Von allen Flächen kommt nun für den planimetrischen Unterricht nur eine einzige in Betracht, die Ebene. Wie schon oben angedeutet, möchte ich diese als eine a priori vorhandene Grundanschauung oder Vorstellung (einen Begriff a priori) aufgefaſst und im Unterricht demgemäſs dargestellt wissen.[1]) Es wird höchstens nötig sein den schlummernden Begriff wach zu rufen, ihn durch passende Beispiele und Fragen zum klaren Bewuſstsein, zur Evidenz zu bringen.[2]) Diese Ansicht scheint jetzt auch mehr und mehr durchgedrungen zu sein, da ja eine kurze Definition, die als wirklich genügend

---

[1]) Günther sagt in „Der Thibautsche Beweis für das elfte Axiom" p. 5 in einer Fuſsnote: „Neuerdings sind es besonders die Arbeiten J. C. Beckers, die den sekundären Charakter der früher als ursprünglich angesehenen Begriffe Gerade und Ebene bestimmt hervortreten lieſsen." Man vergleiche das Zitat aus Becker und meine Ausführungen in Kapitel V.

[2]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 236: „Ebene wird nicht definiert. Aus der Drehung der Ebene um eine gerade Linie ergiebt sich, daſs die Ebene bestimmt ist durch eine Gerade und einen Punkt, statt dessen man auch eine Parallele oder eine schneidende Gerade setzen kann. Setzt man statt der ursprünglichen Geraden zwei Punkte, so ergiebt sich, daſs die Ebene durch drei Punkte bestimmt ist. Daraus folgt, daſs kreuzende Gerade nicht in einer Ebene liegen können."

bezeichnet werden konnte, bisher nicht vorhanden war.[1]) Will man eine wissenschaftliche Definition der Ebene aufstellen, so dürfte die folgende die angemessenste sein:

Die Ebene ist diejenige Fläche, welche in ihrer Gesamtheit (in allen ihren Teilen) nur nach zwei Dimensionen überhaupt ausgedehnt ist[2]) (die überall nach denselben beiden Hauptrichtungen ausgedehnt ist).

Diese Definition dürfte, falls der Lehrer eine solche für nötig hält, auch für den Schüler verständlich sein, da sie der Anschauung völlig entspricht.

Die Schwäche auch dieser Definition liegt darin, dafs sie auf den Begriff der Dimension sich stützt. (Der Begriff der Richtung mufs allen geometrischen Untersuchungen zu Grunde liegen. Vergl. Kapitel V.)

Ist erst der Begriff des geometrischen Ortes den Schülern klar geworden — und vielleicht wäre es nicht ganz ohne Vorteil, diesen Begriff sozusagen an die Spitze zu stellen derjenigen Betrachtungen, die sich mit Fläche, Linie, Punkt als selbständigen Gebilden befassen, d. h. alle Flächen, Linien, (Punkte), insofern sie für sich[3]) betrachtet werden, als geometrische Örter zu definieren — so ergiebt sich bekanntlich die einfache Definition der Ebene:

„Die Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten gleich weit entfernt sind."

Die Ebene würde bei dieser Betrachtung allerdings den Charakter als einfachste Fläche einbüfsen, an ihre Stelle würde die Kugelfläche treten als diejenige Fläche, deren sämtliche Punkte von einem Punkte gleich weit entfernt sind.[4])

---

[1]) Meiner Ansicht nach mufs die Ebene jedenfalls ohne Hülfe des Begriffes der geraden Linie definiert werden. Vergl. die Schlufsbemerkung des Kapitels.

[2]) Vergl. meine obigen Bemerkungen in Kapitel III und das Zitat aus Schmitz-Dumont.

[3]) Hierbei würde natürlich der umgekehrte Weg eingeschlagen werden müssen: das abstrakte Raumgebilde Punkt würde den Ausgangspunkt für alle Betrachtungen bilden müssen.

[4]) Man vergleiche hierzu das Zitat aus Frischauf und die dazu gehörende Anmerkung aus Günthers Rezension der Elemente von Frischauf.

Von den Arbeiten, die hier zitiert werden sollen, verdient wohl eine Abhandlung von Crelle an die Spitze gestellt zu werden. Crelle: Zur Theorie der Ebene. (Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Mai 1834.)

„.... Gleichwohl ist darunter ein Gegenstand, der nicht minder unvollkommen, obschon gewiſs nicht minder einfluſsreich auf alles Übrige sein dürfte, als irgend ein anderer; ja! der selbst noch unvollkommener, obgleich ebensowichtig ist, als die Parallelen-Theorie. Dieser Gegenstand ist die Theorie der Ebene. Bei den Parallelen drückt sich Euklid wenigstens völlig bestimmt und klar aus, und die Schwierigkeit ist nur, daſs dort ein Satz ohne Beweis angenommen werden soll, der des Beweises fähig zu sein und zu bedürfen scheint. Bei der Ebene dagegen sind die Worte des groſsen Lehrers der Geometrie völlig unbestimmt, wenigstens dunkel."

Es wird alsdann die Euklidsche Definition angeführt und mit derjenigen von der Geraden verglichen. Crelle fügt hinzu:

„Die Worte 'auf einerlei Art liegt' geben aber offenbar keinen, wenn auch nur einigermaſsen ausschlieſsenden Begriff von irgend einer bestimmten geometrischen Gestalt, und lassen folglich die Vorstellung von der Ebene völlig in Ungewiſsheit."

Die neuere[1]) Definition „eben sei eine Fläche, wenn die geraden Linien, welche je zwei beliebige in der Fläche liegende Punkte verbinden, ganz in der Fläche liegen," wird in geistvoller Weise zurückgewiesen, indem gezeigt wird, daſs bei dieser Erklärung das Sichschneiden der Geraden vorausgesetzt wird, „was nicht aus sich selbst folgt."

Indem nun Crelle auf „die Bemühungen um die Theorie der Ebene" eingeht, schickt er voraus, daſs er „die Überzeugung habe, es sei und werde für immer völlig *unmöglich* bleiben, die Begründung der Elemente der Geometrie, ebenso wie auch diejenigen der Analysis, zur Vollkommenheit[2]) zu bringen."

---

[1]) Nach Crelle zuerst von Robert Simson aufgestellt.

[2]) Also bleibt ebenfalls nichts anderes übrig, wenn anders Mathematik als Wissenschaft bestehen bleiben soll, als die Ebene für eine a priori geg. Vorstellung hinzunehmen. „Aus verborgenen Tiefen heraus entwickeln sich die Elemente einer Vernunft-Wissenschaft, wie z. B. der

Crelle schliefst diesen Passus mit den Worten:

„Alle Vervollkommnung, die möglich ist, besteht nach meiner Meinung darin: Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, die am meisten geeignet sein möchten, unmittelbar bestimmte Vorstellungen und Erkenntnisse zu erzeugen oder zu erregen."

Eine dritte Definition, der Crelle grofse Klarheit und Bestimmtheit nachrühmt, rührt nach ihm von Fourier her und lautet:

„Die Ebene wird von der Gesamtheit aller der geraden Linien gebildet[1]), die, durch einen und denselben Punkt einer geraden Linie im Raume gehend, auf dieser senkrecht stehen."

Abgesehen von dem erwähnten Umstande, dafs die[2]) Gerade zu Grunde gelegt ist, kommt hier in dieser Erklärung auch noch der Begriff der senkrechten Lage vor, der also als bekannt vorausgesetzt wird. Hieran liegt es wohl, dafs es Crelle „trotz aller Mühe" nicht gelungen ist, auf dieser Definition fortzubauen, denn in der That setzt der Begriff des Senkrechten den der Ebene voraus.[3]) Es kommt also in der Definition der Ebene ein Begriff vor, der erst aus dem Begriff der Ebene heraus erklärt werden kann, so dafs daraus die innere Unmöglichkeit der Definition folgt.

Dagegen würde die Fouriersche Erklärung sich zur Darstellung der Ebene als eines geometrischen Ortes eignen, wenn man sie in der folgenden Weise fafste:

„Die Ebene ist der geometrische Ort aller in einem Punkte auf einer Geraden senkrechten Geraden."

Crelle steht auf dem entgegengesetzten Standpunkte als dem oben von mir dargelegten, wenn er sagt: „Da die Theorie der geraden Linie zu derjenigen der Ebene unumgänglich er-

---

Mathematik, und in eine unendliche Höhe hinauf streben sie." „Was in der tieferen Tiefe und in der höheren Höhe liegt, bleibt für immer verborgen."

[1]) Besser, d. h. dem Wesen der Definition entsprechender: „die Ebene ist die Gesamtheit etc."

[2]) Vergl. weiter unten das Zitat aus der Crelleschen Abhandlung (p. 27).

[3]) Vergl. unten das Zitat aus Rausenberger.

forderlich ist" und legt dann seine Erklärung der geraden Linie, wie sie sich in seinem Lehrbuche (1826) findet, zu Grunde.

Der Übelstand, dafs er dabei von Grundvorstellungen ausgeht, für die eine Erklärung gesucht wird, kommt zum Ausdruck in seinen Worten:

„Ein beschwerlicher, fast entmutigender Umstand macht sich hierbei freilich bemerklich. Da nämlich hier von Dingen ausgegangen werden mufs, von welchen sich nichts mehr beweisen läfst, so kann Jedermann gleich die ersten Anfänge durch die blofsen Worte: es gefalle ihm nicht, und dann mit den Anfängen alles Übrige über den Haufen werfen. Allein wie es scheint, läfst sich verlangen, dafs man wenigstens die fernere Entwicklung gestatte, und erst hernach, nicht von vornherein urteile, ob das Ganze, mit seinen Anfängen, einige Berücksichtigung verdiene oder nicht.[1])

Rücksichtlich der Demonstrations-Methode bemerkt Crelle: „Anstatt zu zeigen, wie eine Figur gerade durch Zirkel und Lineal gezeichnet werden könne, wird da, wo die Existenz der Figur zweifelhaft sein könnte, bewiesen werden, dafs sie möglich ist."

Die eigentliche Behandlung der Theorie der Ebene hat folgenden Gang:

§ I.

1) „Wenn, während zwei Punkte einer Linie fest sind, alle ihre übrigen Punkte an demselben Orte im Raume bleiben, wie auch die Linie im Raume durch die beiden Punkte gelegt werden mag, so heifst sie gerade."[2])

---

[1]) Diese Ansicht stimmt ja wohl damit überein, was Kummer gesagt hat: „In der Mechanik (als rein mathematische Wissenschaft nahe verwandt mit der Euklidschen Geometrie) werden Grundsätze aufgestellt, die nicht bewiesen werden können und nicht bewiesen zu werden brauchen, da sie mit der äufseren Natur nicht im Widerspruch stehen. Der Geist der Mathematik besteht eben darin, zu beweisen, dafs, wenn das Eine so ist, so mufs unumstöfslich das Andere so sein; nicht aber zu zeigen, dafs das Erste wirklich so ist, wie wir annehmen. Wir haben es dabei nur mit abstrakten Dingen zu thun. Auch die gerade Linie ist eine Abstraktion."

[2]) Vergl. weiter unten den Abschnitt „gerade Linie".

2) „Es giebt nur eine gerade Linie durch zwei feste Punkte im Raume."[1])

Die folgenden Sätze, auch der 3. und 4., die sich anschliefsen, bauen das Gegebene weiter aus; es wird auf Mafsbeziehungen[2]) eingegangen und die Ausführungen schliefsen mit der Erklärung: „Die Gerade dient zum Mafs der Entfernung zweier Punkte."[3])

§ II.

Die Existenz gleicher Hälften (!) einer geraden Linie (Strecke) wird bewiesen auf einem andern Wege als dem Konstruktionswege Euklids.

§ III.

Dieser § geht von der folgenden Definition des Winkels[4]) aus: „Die Neigung zweier geraden Linien im Raume, die sich treffen, ohne ineinander zu fallen, heifst, am Durchschnittspunkte, Winkel."

Daran schliefsen sich Erklärungen von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln, denen, meiner Ansicht nach, der Begriff der Ebene unbewufst zu Grunde liegt. — Auch die Mafsbeziehungen der Winkel werden durchgeführt. Hieran schliefst sich der Lehrsatz: „Eine gerade Linie, die zwei Punkte in den Schenkeln des Winkels verbindet, kann nicht durch den Scheitel des Winkels gehen.

§ IV.

Beweis der Gleichheit von Scheitelwinkeln mittels der Kongruenz (abweichend von Euklid).

§ V.

Lehrsätze über Dreiecke, die „ohne den Begriff der Ebene stattfinden."[5])

---

[1]) Besser wohl: Alle geraden Linien durch zwei feste Punkte im Raume decken sich vollständig; dann wäre Lehrsatz 3 überflüfsig, ebenso Lehrsatz 4, der auch nur als Zusatz zu 3 betrachtet werden kann.

[2]) Dafs hierbei fortwährend Linie statt Strecke gesetzt wird, sei besonders hervorgehoben.

[3]) Vergleiche Kapitel V „über die Gerade" und über „Abstand".

[4]) Vergl. unten „Winkel".

[5]) Vergl. § III.

Aufser dem Lehrsatz (!), „dafs gleiche Dreiecke gleiche Seiten und gleiche Winkel haben," wird der 1. Kongruenzsatz (2 Seiten und eingeschlossener Winkel) und der Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck behandelt. Der zweite Beweis zu dem letzteren Satze ist bemerkenswert. Er findet sich nur in einigen wenigen Lehrbüchern, der erste Beweis als der einzig naturgemäfse dürfte wohl allmählich alle anderen verdrängen. Beide Beweise weichen von dem Euklidischen, der leider fast noch in allen Lehrbüchern gefunden wird, ab.

§ VI.

„Nunmehr wird die Definition der Ebene folgen müssen. Es wird aber derselben ein Satz vorangehen, welcher beweist, dafs die Fläche, welche Ebene genannt werden soll, möglich ist." Dieser Satz lautet:

(21.) Lehrsatz: „Durch jede gerade Linie und durch einen beliebigen Punkt im Raume, aufserhalb derselben, ist immer eine Fläche möglich, in welcher ohne Ausnahme alle die geraden Linien in ihrer ganzen Ausdehnung liegen, die durch den Punkt und durch die gerade Linie gehen."

Diese Fläche soll Ebene heifsen, der Punkt bestimmender Punkt, die gerade Linie bestimmende Gerade, die anderen Geraden erzeugende Geraden. Crelle fährt fort:

„Diese Definition der Ebene gewährt den wesentlichen Vorteil, dafs durch sie überall, wo drei einander in einem und demselben Punkte schneidende gerade Linien zugleich durch eine und dieselbe vierte gerade Linien gehen, sogleich bestimmt ist, dafs diese Linien in einer und derselben Ebene liegen."

Es schliefsen sich folgende Lehrsätze an:

„Durch eine gerade Linie im Raume und durch einen Punkt aufserhalb desselben kann nur eine Ebene gehen."

„Durch zwei gerade Linien, die sich schneiden, kann immer wenigstens eine Ebene liegen."

§ VII.

Dieser § handelt von der Summation von Winkeln und baut sich auf einen Grundsatz auf, von dem es heifst, dafs „Euklid ihn ebenfalls stillschweigend annehme."

§ VIII.

„Es folgen nun wieder einige Sätze, die zur ferneren Entwicklung notwendig sind. Die Beweise derselben sind den Euklidischen nachgebildet, mufsten aber teils vervollständigt, teils auf das hier Vorhergehende bezogen werden."

(27.) Lehrsatz: „In jedem Dreieck ist jeder Winkel kleiner, als der Nebenwinkel des an der nämlichen Seite liegenden anderen Winkels."

(28.) Lehrsatz: „In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber" und (29.) Umkehrung.

(30.): „In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen länger, als die dritte."

(31.): „II. Kongruenzsatz (1 Seite und 2 Winkel)."

(32.): „III. Kongruenzsatz (3 Seiten)."

Beim Beweis dieses Satzes werden die fünf möglichen Fälle (aufser 2 Winkel gl.) einzeln zurückgewiesen.

§ IX.

„Geometrischer Ort" wird erklärt und das Beispiel der Kugel gegeben. Dann folgen zwei Grundsätze — deren erster lautet: „Eine gerade Linie durch irgend einen Punkt innerhalb einer Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, schneidet, genugsam verlängert, die Fläche notwendig" — einige Lehrsätze — z. B. „es giebt immer eine gerade Linie, die mit einer gegebenen Geraden gleiche Nebenwinkel macht" — und schliefslich eine Erklärung: „Gleiche Nebenwinkel sollen rechte und gerade Linien im Raume, die sich unter gleichen Nebenwinkeln schneiden, auf einander senkrecht oder Perpendikel zu einander heifsen."

§ X.

Nunmehr können die Eigenschaften der Ebene untersucht werden. Es geschieht dies in den folgenden Sätzen, die diese Eigenschaften aussprechen:

(40.) Lehrsatz: „Wenn auf einer geraden Linie im Raume zwei andere gerade Linien in einem und demselben Punkte senkrecht stehen, so dafs also die Nebenwinkel rechte Winkel

sind: so stehen alle erzeugenden Linien jeder beliebigen durch die beiden Geraden gehenden Ebene ebenfalls auf der ersten senkrecht."

(41.) Lehrsatz: „Wenn zwei sich schneidende gerade Linien aufeinander senkrecht stehen, so giebt es im Raume immer eine durch ihren Durchschnittspunkt gehende gerade Linie, die auf den beiden sich schneidenden geraden Linien zugleich senkrecht steht."

(42.) Lehrsatz: „Dasselbe unter der Voraussetzung, dafs die beiden Geraden sich unter beliebigem Winkel schneiden."

Unter 43 findet sich folgende Erklärung:

„Der geometrische Ort aller Perpendikel durch einen festen Punkt einer festen geraden Linie, auf dieselbe, soll Perpendikular-Fläche heifsen; die feste Linie Axe, die Perpendikel Strahlen, der feste Punkt Mittelpunkt." (Eine solche Perpendikular-Fläche ist also das, was Fourier Ebene nennt.)

(44.) Lehrsatz: „Durch keinen Punkt einer geraden Linie giebt es andere Perpendikel auf dieselbe, als diejenigen, welche in der Perpendikular-Fläche durch den bestimmten Punkt liegen."

Aus 44 folgen die Lehrsätze 45 und 46 direkt, eigentlich als Zusätze; 47 aus 42. — Wichtig ist

(48.) Lehrsatz: „Es kann durch zwei sich schneidende gerade Linien nur eine Perpendikular-Fläche gelegt werden, deren Axe durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien geht."

(49.) Lehrsatz: „Jede gerade Linie, die durch zwei beliebige Punkte einer Ebene geht, liegt ganz in dieser Ebene."

(„Dieses ist der in der Vorbemerkung gedachte Satz, der gewöhnlich, ohne Beweis, als Definition der Ebene aufgestellt wird.")

50 folgt direkt aus 48 (ist eigentlich nur eine andere Form der Aussage), 51 konstatiert diese Übereinstimmung von 48 und 50.

Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Identifizierung von Perpendikular-Fläche und Ebene und dem Kongruenzproblem, insofern als z. B. folgende Lehrsätze bewiesen werden:

(58.) Lehrsatz: „Jedes Dreieck kann in eine bestimmte Ebene und an eine bestimmte Linie in derselben gelegt werden.“

(59.) Lehrsatz: „Durch jedes Dreieck kann eine Ebene gelegt werden, in welche die drei Seiten desselben in ihrer ganzen Ausdehnung fallen, aber nur eine.“

(60.) Lehrsatz: „Wenn zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, miteinander gemein haben, so fallen sie ganz ineinander“ — und noch mehrere andere.

§ XI.

Diese angegebenen Sätze werden als die notwendigsten aus der Theorie der Ebene bezeichnet, wie sie sich aus den Grundsätzen ergeben:

1)[1] „Wenn drei gerade Linien, die in einem und demselben Punkte sich treffen, in einer und derselben Ebene liegen, so ist der Winkel zwischen den beiden äußeren Linien so groß, als die Winkel zwischen den beiden äußeren und der inneren Linie zusammengenommen.“

2)[2] „Eine gerade Linie durch irgend einen Punkt innerhalb einer Fläche, die einen Raum ganz umschließt, schneidet, genugsam verlängert, die Fläche notwendig.“

3)[3] „Wenn irgend ein Punkt eine Fläche, die einen Raum ganz umschließt, oder auch irgend ein Punkt einer geraden Linie, innerhalb einer anderen Fläche liegt, die einen Raum ganz umschließt; zugleich aber irgend ein anderer Punkt der ersten Fläche, oder der Linie, außerhalb der zweiten Fläche liegt: so schneiden die erste Fläche, oder die Linie, die zweite Fläche notwendig.“

Dann geht § XI. noch auf die Theorie der Parallelen ein. Was davon erwähnenswert ist, wird zitiert werden in dem Abschnitt, der diesem Problem gewidmet ist.

§ XII.

faßt die Resultate des § XI. noch einmal zusammen

[1]) Vergl. § VII.
[2]) Vergl. § IX.
[3]) Vergl. § IX.

Man wird es mir hoffentlich nicht verdenken, dafs ich diese Abhandlung im Auszuge, aber doch so vollständig mitgeteilt habe. Aber, soweit mir bekannt, ist sie die ausführlichste Bearbeitung der Theorie der Ebene, dann aber möchte auch das Crellesche Journal, dem sie entnommen, gerade den Lesern des vorliegenden Werkes nicht überall zu Gebote stehen. Wessen Interesse durch das Angeführte hinreichend gereizt wird, den mufs ich auf die 41 Quartseiten umfassende Arbeit selbst verweisen.

Von den Lehrbüchern kommen nur wenige in Betracht; die meisten geben entweder die Euklidsche Erklärung selbst oder eine derselben nachgebildete; fast überall also stützt sich die Erklärung auf diejenige der geraden Linie. Unsere Ansicht hierüber ist oben ausführlich gegeben.

Die gebräuchlichsten Erklärungen sind:

1) Gleitet eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, auf einer Geraden, so heifst die erzeugte Fläche eine Ebene.

2) Eine Fläche heifst eine Ebene, wenn jede Gerade, die zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in ihr liegt.

3) Eine Fläche heifst eine Ebene, wenn man von jedem Punkt nach allen (!) Richtungen Gerade ziehen kann, die ganz in ihr liegen.

4) Eine Fläche ist durch eine Gerade und einen Punkt oder durch 3 Punkte bestimmt — und so ähnlich.

Oft wird auch die Ebene als die einfachste Fläche bezeichnet und dann irgend ein bestimmendes Axiom hinzugefügt.

Der Begriff der Einfachheit kann dabei von mehreren Gesichtspunkten aus beleuchtet werden. Entweder man versteht unter dieser Bezeichnung, dafs die Ebene diejenige Fläche sei, welche am einfachsten vorzustellen sei, dem menschlichen Denken am zugänglichsten, dann wäre der Ausdruck identisch mit die leichteste Fläche, die verständlichste Fläche, vielleicht auch die natürlichste Fläche, oder er bezöge sich auf die Erzeugung der Fläche (in dieser Hinsicht würde die Betrachtung mit der ersten im wesentlichen übereinstimmen), oder er bezöge sich darauf, dafs es nur e i n e — sit venia verbo — A r t von Ebenen gäbe, also „Einfachheit“ in dem Sinne von

Singularität oder Unikum. Dieser letztere Standpunkt ist jedenfalls der bei weitem wichtigste; das Charakteristische für die Ebene ist gerade, daſs wir es mit der Ebene, nicht mit Ebenen zu thun haben. In diesem Sinne darf man dann die Ebene aber nicht als einfachste Fläche bezeichnen, sondern als die einfache Fläche κατ' ἐξοχήν (mit anderen Worten ist damit die unbedingte Kongruenz der Ebene ausgesprochen). Damit wäre dann aber auch wieder eine Anknüpfung an die erste Auffassung gewonnen, die uns die Ebene als Begriff a priori giebt. Es lieſse sich philosophisch wohl rechtfertigen, die Einfachheit in diesem Sinne als Merkmal eines Begriffes a priori überhaupt aufzustellen, womit man dann über die Schwierigkeit der Definitionen von Raum, Ebene, Gerade, Punkt hinweg wäre. Am wenigsten paſst der Begriff der Einfachheit bei der zweiten Betrachtung, nämlich in Hinsicht auf ihre Erzeugung, hier würde mit Recht wohl die Kugel als die einfachere Fläche bezeichnet werden.

Baltzer, Elemente. II. § 4 — geht von der Regelfläche aus, die folgendermaſsen definiert wird:

„Eine Fläche heiſst geradlinig (Regelfläche), wenn durch jeden Punkt derselben eine Gerade sich ziehen läſst, die auf der Fläche liegt.[1]) Die Bahn einer irgendwie bewegten Geraden ist eine geradlinige Fläche. Die einfachste unter den geradlinigen Flächen ist die Ebene (ἐπί-πεδος, planum), auf der die Geraden liegen, die durch einen geg. Punkt gehen und mit einer geg. Geraden einen Punkt gemein haben. Wenn eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene (Axiom von der Ebene)."

In einer Anmerkung giebt Baltzer u. a. noch folgende Angaben. Leibniz[2]) habe, etwas deutlicher als Euklid, die Ebene und Gerade dadurch erklärt, daſs jene den unbegrenzten Raum, diese die unbegrenzte Ebene in zwei kongruente Teile zerschneidet (Brief an Giordano, ed. Gerhardt. I. p. 196).

---

[1]) Diese Benennung rührt von Monge her. Vergl. Hachette géom. déscr. 1822. préf. 13.

[2]) Man vergleiche weiter unten das Zitat aus Beez, Über Euklidische und Nicht Euklidische Geometrie.

Bemerkenswerte Versuche, jenes Axiom zum Theorem zu erheben, seien in neuerer Zeit gemacht.

Deahna (Demonstr. theorematis, esse superficiem planam. Marb. 1837) konstruiert die Ebene durch Rotation eines Winkels um einen seiner Schenkel mit der Bedingung, dafs eine konzentrische Kugelschale in zwei kongruente Teile zerschnitten werde.[1])

Gaufs ist der Meinung gewesen, dafs Deahnas Darstellung von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen sind, sich befreien lasse; in seinem Nachlafs befindet sich ein diesen Gegenstand betreffender Aufsatz.

Crelles Aufsatz (Journal 45 p. 15) wird erwähnt, ebenso Gerlings (Crelles Journal 20 p. 332) und Erbs (Die Probleme der Geraden u. s. w. Heidelberg 1846) Versuche, das Axiom der Ebene zu beseitigen.

Da zunächst nur Kreis und Kugel so definierbar sind, dafs deren Möglichkeit einem Zweifel nicht unterliegt, so sind auch Versuche angestellt, diese als geometrische Örter der Betrachtung zu grunde zu legen.[2]) Durch zwei kongruente

---

[1]) Man könnte einwenden, dafs es dann noch einfacher sein würde, die Erzeugung der Ebene durch Rotation eines rechten Winkels um einen seiner Schenkel als Axe anzunehmen. Der andere Schenkel beschreibt dann eine Ebene. Jedoch würde bei dieser Annahme die Ebene stillschweigend vorausgesetzt sein. An und für sich liegt kein Grund vor, den Winkel selbst als einen ebenen zu betrachten, d. h. die Drehung des einen Schenkels zum andern in einer Ebene anzunehmen; spricht man jedoch von einem rechten (oder überhaupt von einem bestimmten) Winkel, so ist der Begriff der Ebene supponiert. — Man vergl. Schotten, Zur Definition des Winkels in H. Z. XX, 481 (und später den Artikel Winkel in diesem Werke II. Band). — Worpitzky giebt übrigens in seinen Elementen die Definition der Ebene unter Zuhülfenahme des rechten Winkels in der angedeuteten Weise.

[2]) Geht man von dem Begriffe des „geometrischen Ortes" aus, so ist die Kugel das einfachste Gebilde im Raume, der Kreis das einfachste Gebilde in der Ebene.

I. Im Raum.

1) Die Kugel ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, die von einem geg. Punkt gleich weit abstehen.

2) Die Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei geg. Punkten gleichweit abstehen.

Scharen von konzentrischen Kugeln entsteht die Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kugeln (Lobatschewsky und Bolyai).[1])

J. K. Becker,[2]) Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

„Die Kegelfläche, welche der eine Schenkel eines rechten Winkels beschreibt, wenn derselbe um den andern als Axe gedreht wird, zeichnet sich vor den übrigen Kegelflächen durch besondere Eigenschaften aus, und hat deshalb den besonderen Namen ebene Fläche oder Ebene erhalten.[3])

Als besonderes Merkmal wird angeführt, dafs diese Kegelfläche mit ihrer Scheitelkegelfläche zusammenfällt, was bei keiner andern Kegelfläche eintreten kann.

„Diese beiden zusammenfallenden Kegelflächen decken sich aber so, dafs die innere Seite der einen die äufsere der anderen ist. Sie sind jedoch auch als Kegelflächen, die von gleichen Winkeln beschrieben werden, kongruent, und können mithin auch so zur Deckung gebracht werden, dafs die Axen zusammenfallen, und damit auch die inneren und äufseren Seiten der Flächen. Eine Ebene kann also dieselbe Stelle auf zwei Arten

---

3) Die Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, die von drei geg. Punkten gleichweit abstehen.

II. In der Ebene.

1) Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem geg. Punkte gleichweit abstehen.

2) Die Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei geg. Punkten gleichweit abstehen.

[1]) Vergleiche das Zitat aus Frischauf.

[2]) Es ist eine geradezu auffallende Erscheinung, dafs in den Rezensionen über die Darstellung der Grundbegriffe fast durchweg kein Urteil abgegeben wird, sondern höchstens das Vorhandensein einer einleitenden Betrachtung der Grundbegriffe konstatiert wird. Selbst bei der Besprechung des vorliegenden Werkes geht Killing über das I. Kapitel kurz hinweg mit der Bemerkung, dafs sich Beckers Ansicht in kürzerer Form in Schlömilchs Zeitschrift Band XX, Seite 445 finde und durch Günther in H. Z. VII. p. 407 bekannt geworden sei.

[3]) Man vergleiche meine Bemerkungen zu Deahnas Konstruktion der Ebene in Baltzers Zitat.

einnehmen, so dafs ein mit ihr fest verbundener aber nicht in ihr liegender Punkt sowohl auf der einen Seite, wie auch auf der andren Seite liegen kann."

„Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, ist eine Ebene, deren Axe durch die beiden Punkte geht."

„Jede Gerade, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, liegt ganz in derselben."

„Zwei Ebenen, welche drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte gemein haben, fallen in allen Punkten zusammen."

„Je drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmen eine Ebene."

„Aus der Definition der Ebene folgt, dafs sie von endloser Ausdehnung ist und mithin den Raum in zwei durch sie völlig getrennte Teile teilt. Ebenso wird sie selbst von einer in ihr liegenden Geraden in zwei Teile geteilt, welche Halbebenen heifsen."

Es wird dann noch gesagt, dafs auch durch eine Gerade und einen Punkt aufserhalb, sowie durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene bestimmt ist; ferner heifst es: „Alle Ebenen und Halbebenen sind kongruent." Daran knüpfen sich dann eine Reihe von stereometrischen Sätzen. Von besonderem Werte ist es, dafs gleich hier bei den Grunddefinitionen der Begriff der Symmetrie verwendet wird. Einige der zugehörigen Sätze lauten:

„Jedem Punkte aufserhalb einer Ebene entspricht immer ein und nur ein Punkt, welcher von jedem Punkte der Ebene denselben Abstand hat wie der gegebene.

Dieser Punkt heifst der symmetrische Gegenpunkt der gegebenen in Bez. auf die Ebene.

Zwei Punkte heifsen also symmetrische Gegenpunkte in Bez. auf eine Ebene, wenn diese der Ort aller von jenen gleich weit abstehender Punkte ist.

Die Ebene heifst die Symmetrieebene der beiden Punkte."

Dronke, Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach 1864.

„Diejenige Fläche, welche durch drei in ihr befindliche Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, vollständig bestimmt wird, heifst ebene Fläche oder Ebene.“ Dazu die Anmerkung: „Es können also zwei Ebenen sich nur in einer Linie schneiden, die schon durch zwei Punkte bestimmt ist, d. h. in einer Geraden.[1]) Da der Schnitt der Ebenen in jeder Richtung stattfinden kann, so lassen sich also in jeder Ebene nach allen Richtungen Gerade ziehen, die ganz in derselben liegen.“

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850.

„Eine Fläche heifst eben oder eine Ebene, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen[2]) und man also nach allen Seiten hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann, welche ganz mit ihr zusammenfallen.“

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877.

„Was zunächst die einfachste dieser Gruppen, die Ebene und die auf dieselbe abwickelbaren Flächen betrifft, so zeigt sich durch die analytische Diskussion, was die anschauliche Beschaffenheit der Grundfläche von vornherein erwarten läfst, dafs ihr Krümmungsmafs den konstanten Wert Null annimmt.“[3])

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr scharfsinnig und giebt uns auf natürlichste Weise die Schnittlinie zweier Ebenen.

[2]) Dieser Ausdruck ist nicht ganz klar. Das folgende „Seiten“ ist hier doch identisch mit Richtungen. Danach würde die Erklärung lauten: „Eine Fläche heifst eben, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen und man also nach allen Richtungen hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann. Der gebrauchte Ausdruck „nach derselben Richtung nebeneinander“ soll das ersetzen, was bei den Linien der Ausdruck Richtung schlechtweg bedeutet; für die Flächen fehlt ein derartiger Ausdruck, er ist mit dem Begriff Ebene identisch.

[3]) Vielleicht wäre es passend, an dieser Stelle auf den Unterschied von Krümmung und Beugung, von Biegen ohne und mit Dehnung näher einzugehen; doch sollen diese Betrachtungen an späterer Stelle ausführlich behandelt werden und es möge daher genügen, hier nur auf diesen Unterschied hingewiesen zu haben.

einnehmen, so dafs ein mit ihr fest verbundener aber nicht in ihr liegender Punkt sowohl auf der einen Seite, wie auch auf der andren Seite liegen kann.“

„Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, ist eine Ebene, deren Axe durch die beiden Punkte geht.“

„Jede Gerade, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, liegt ganz in derselben.“

„Zwei Ebenen, welche drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte gemein haben, fallen in allen Punkten zusammen.“

„Je drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmen eine Ebene.“

„Aus der Definition der Ebene folgt, dafs sie von endloser Ausdehnung ist und mithin den Raum in zwei durch sie völlig getrennte Teile teilt. Ebenso wird sie selbst von einer in ihr liegenden Geraden in zwei Teile geteilt, welche Halbebenen heifsen.“

Es wird dann noch gesagt, dafs auch durch eine Gerade und einen Punkt aufserhalb, sowie durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene bestimmt ist; ferner heifst es: „Alle Ebenen und Halbebenen sind kongruent.“ Daran knüpfen sich dann eine Reihe von stereometrischen Sätzen. Von besonderem Werte ist es, dafs gleich hier bei den Grunddefinitionen der Begriff der Symmetrie verwendet wird. Einige der zugehörigen Sätze lauten:

„Jedem Punkte aufserhalb einer Ebene entspricht immer ein und nur ein Punkt, welcher von jedem Punkte der Ebene denselben Abstand hat wie der gegebene.

Dieser Punkt heifst der symmetrische Gegenpunkt der gegebenen in Bez. auf die Ebene.

Zwei Punkte heifsen also symmetrische Gegenpunkte in Bez. auf eine Ebene, wenn diese der Ort aller von jenen gleich weit abstehender Punkte ist.

Die Ebene heifst die Symmetrieebene der beiden Punkte.“

Dronke, Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach 1864.

„Diejenige Fläche, welche durch drei in ihr befindliche Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, vollständig bestimmt wird, heifst ebene Fläche oder Ebene.“ Dazu die Anmerkung: „Es können also zwei Ebenen sich nur in einer Linie schneiden, die schon durch zwei Punkte bestimmt ist, d. h. in einer Geraden.[1]) Da der Schnitt der Ebenen in jeder Richtung stattfinden kann, so lassen sich also in jeder Ebene nach allen Richtungen Gerade ziehen, die ganz in derselben liegen.“

Ebensperger, Leitfaden der Geometrie. — Nürnberg 1850.

„Eine Fläche heifst eben oder eine Ebene, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen[2]) und man also nach allen Seiten hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann, welche ganz mit ihr zusammenfallen.“

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877.

„Was zunächst die einfachste dieser Gruppen, die Ebene und die auf dieselbe abwickelbaren Flächen betrifft, so zeigt sich durch die analytische Diskussion, was die anschauliche Beschaffenheit der Grundfläche von vornherein erwarten läfst, dafs ihr Krümmungsmafs den konstanten Wert Null annimmt.“[3])

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr scharfsinnig und giebt uns auf natürlichste Weise die Schnittlinie zweier Ebenen.

[2]) Dieser Ausdruck ist nicht ganz klar. Das folgende „Seiten“ ist hier doch identisch mit Richtungen. Danach würde die Erklärung lauten: „Eine Fläche heifst eben, wenn alle Teile in derselben Richtung nebeneinander liegen und man also nach allen Richtungen hin gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann. Der gebrauchte Ausdruck „nach derselben Richtung nebeneinander“ soll das ersetzen, was bei den Linien der Ausdruck Richtung schlechtweg bedeutet; für die Flächen fehlt ein derartiger Ausdruck, er ist mit dem Begriff Ebene identisch.

[3]) Vielleicht wäre es passend, an dieser Stelle auf den Unterschied von Krümmung und Beugung, von Biegen ohne und mit Dehnung näher einzugehen; doch sollen diese Betrachtungen an späterer Stelle ausführlich behandelt werden und es möge daher genügen, hier nur auf diesen Unterschied hingewiesen zu haben.

„Eine Folge der Konstanz des Krümmungsmaſses ist, daſs alle diese Flächen in sich selbst kongruent sind, d. h. daſs jeder ihrer Teile abgesehen von der Begrenzung in jeden andern sich verschieben läſst."[1])

Euklid, Elemente. ed. Dippe. — Halle 1840.

„Eine ebene Fläche (Ebene) ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt."[2])

Fabian, Lehrbuch der Mathematik.[3]) I. — Lemberg 1876.

Fabian geht von der Erzeugung der Ebene durch eine Gerade aus, die durch einen festen Punkt geht und auf einer geg. Geraden hingleitet. Es heiſst dann:

„Die beide Raumteile trennende Fläche darf auf keiner Seite Vertiefungen oder Erhabenheiten haben. Jede Vertiefung der einen Seite würde sich als Erhabenheit auf der andern kundgeben; die betrachtete Fläche muſs aber auf der einen Seite eben[4]) so ausschauen, wie auf der anderen.

Diese Fläche heiſst Ebene.

Eine Ebene ist also eine Fläche, welche zwei gleich begrenzte Teile des Raumes voneinander trennt."

Kruse, Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875.

„Eine Fläche, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich so bewegt, daſs sie stets drei Gerade enthält, welche durch drei feste nicht auf einer Geraden liegende

---

[1]) Gültigkeit der Axiome von der Geraden als der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte und von dem Parallelismus.

[2]) Zu vergleichen: J. Kober, Über die Definitionen geometrischer Grundbegriffe. — H. Z. I. p. 228—236. — Friedlein, Untersuchungen der sog. Definitionen Heros, in H. Z. II. p. 183.

[3]) Man vergleiche H. Z. VII. p. 298.

[4]) Da dieses Wort groſs gedruckt ist, so wird offenbar auf die Gleichartigkeit der Benennung Wert gelegt. Ob es sich für den Verfasser um ein geistreiches (!) Wortspiel handelt oder ob es ihm Ernst ist mit dieser Herleitung, wage ich nicht zu entscheiden. — Vergl. p. 281; Anm. 2.

Punkte gehen, wird eine ebene Fläche (kurzweg Ebene) genannt."[1])

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. I. — Jena 1851.

„Eine Fläche heifst eben (gerade) oder eine Ebene, wenn sie überall nach geraden Linien ausgedehnt ist."

„Anmerkung 1. Die ebene Fläche ist ihrer Art nach nur eine . . . ."

„Anmerkung 2. Euklides sagt: Eine ebene Fläche ist diejenige, die (zwischen) den in ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt; — dieselbe Dunkelheit wie bei der geraden Linie. Übrigens nimmt Euklides bei seinen Konstruktionen stillschweigend an, dafs sich in der Ebene allenthalben gerade Linien ziehen lassen."[2])

„Anmerkung 3. Man hat wiederholt versucht, die Möglichkeit der Ebene durch Konstruktion zu beweisen. Das scheint mir aber eine falsche Anforderung an die Geometrie zu sein.[3]) Der Geometer setzt mit Euklides die Möglichkeit der Ebene voraus und konstruiert nur, wenn ihm die Ebene gegeben ist."

Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. — Leipzig 1881 — bezeichnet kurz „Punkt, Gerade, Ebene als die Grundgebilde der Geometrie." — Damit stellt er sich auf den Standpunkt, dafs Punkt, Gerade, Ebene ohne Erklärung direkt dem Vorstellungsvermögen entnommen, a priori in demselben enthalten sind.[4])

[1]) Diese Erklärung trifft zwar für die Ebene zu, aber nicht nur für die Ebene, sondern beispielsweise auch für die Kegelflächen und die Cylinderflächen. Davon aber abgesehen müfste sie doch als für die Schule ganz unbrauchbar bezeichnet werden, da gewifs kein Schüler aus dieser Erklärung eine anschauliche Vorstellung der Ebene bekommen würde. — In der Besprechung des vorliegenden Buches in H. Z. VII. p. 212—222 sagt Scherling: „Noch weniger können wir uns mit der vom Verfasser gegebenen Definition der Ebene befreunden."

[2]) Setzt damit also den Begriff der Ebene voraus.

[3]) Man vergleiche die Äufserung Kummers.

[4]) Insofern wir sie als Grenzen betrachten. Werden sie an und für sich der Untersuchung unterworfen, so müssen wir sie in diesem Sinne als Begriffe a priori unseres Denkens bezeichnen.

Müller, E., Elemente der Geometrie. I. — Braunschwei 1869.

„Eine Fläche heifst ebene Fläche oder Ebene schlecht weg, wenn sie auf beiden Seiten in ihrer ganzen Ausdehnun nach allen vier Gegenden dergestalt von einerlei Beschaffen heit ist, dafs die beiden Seiten mit den zugehörigen Raum teilen oder ohne dieselben miteinander vertauscht werde können. Da aber eine Fläche als gemeinschaftliche Grenz zwischen den Räumen auf beiden Seiten als zweifache er scheint, so werden zwei Ebenen und die auf beiden Seite derselben befindlichen Räume mit jeder Seite und nach jede Raumgegend hin dergestalt aufeinander gelegt werden könne dafs sie wieder nur eine Ebene und einen Raum bilden. Jede der beiden Raumteile zu beiden Seiten einer Ebene ist de andern gleich, also die Hälfte des ganzen Raumes oder ei Halbraum."[1])

p. 16. „Eine jede der Ebenen eines Büschelraumes is durch zwei ihrer Strahlen vollständig bestimmt, weil durc zwei dieser Stellen nur eine einzige Ebene möglich ist."

II. p. 3 findet sich dieselbe Definition der Ebene.

Müller, J., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 — fügt der genetischen Definition der Eben hinzu:

„Die Ebene ist die einzige Fläche, welche an jeder Stelle von beiden Seiten dieselbe Gestalt darbietet.[2])

Pfleiderer, Scholien. — Stuttgart 1827.

---

[1]) Welche Definitionen der Ebene die einzelnen Geometer auch ge geben haben, jede ohne Ausnahme kommt auf diese Eigenschaft zurück und kann ohne sie die geometrischen Fundamentalsätze der Kongruenz teils nur mangelhaft beweisen, teils gar nicht. Alles Klappen und Drehen der Ebene und ihrer Gebilde setzt diese Definition voraus.

[2]) Nach meiner Auffassung vom Element würde diese Erklärung auch für jedes Ebenenelement zutreffen (dagegen nicht nach Helmholtzs Erklärung). Ob aber überhaupt dem Begriffe Gestalt oder Form eine Fläche nicht schon der Begriff der Ebene zu Grunde liegt, erscheint mir zum wenigsten sehr zweifelhaft.

p. 8. „Eine Fläche heifst alsdann (d. h. nach der Definition der geraden Linie) eben, wenn jede gerade Linie, die von irgend einem Punkt der Fläche an irgend einen andern Punkt derselben gezogen wird, ganz in der Fläche liegt. Diese Definition drückt die gemeine Art, die Ebenheit einer Fläche durch Anlegung der Schärfe eines Lineals an dieselbe zu prüfen, durch allgemeine geometrische Ausdrücke aus."

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

„Auch unter den Flächen wollen wir eine besonders einfache[1]) auswählen: die Ebene." Er giebt dann die gewöhnliche genetische Definition und fährt fort:

„Diese Erzeugungsweise liefert nicht die Grundeigenschaften der Ebene; vielmehr müssen wir wieder zu der direkten Anschauung[2]) rekurrieren . . . ."

„Die Fundamentaleigenschaften der Ebene sind die folgenden:

1) Jede Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, fällt ganz in dieselbe.

2) Jede in der Ebene gelegene Gerade kann durch Drehung um einen ihrer Punkte, wie der Augenschein zeigt, die ganze Ebene beschreiben.

3) Durch drei geg. Punkte, die nicht in dieselbe Gerade fallen, läfst sich nur eine (aber auch immer eine) Ebene legen.

4) Eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Ebene gemein hat, durchdringt dieselbe. (Ebenenschnitt.)

---

[1]) Das Einfache hier in Bezug auf die Erzeugung der Ebene genommen.

[2]) So sehr auch ich für die Betonung und gröfsere Verwendung der Anschauung im Unterricht — im Vergleich zur jetzigen Methode — bin, so kann ich doch mich im Folgenden mit Rausenberger nicht völlig einverstanden erklären. Zumal auf den Augenschein — meine ich — dürfe man sich in der Geometrie nie berufen, sondern die Gewifsheit, die aus der Anschauung resultiert, resultiert aus der inneren Anschauung, d. h. dem von allen Zufälligkeiten resp. subjektiven Bedingungen, die dem Augenschein anhaften können, durch das Denken befreiten Anschauen.

5) Alle Ebenen sind, bis auf ihre Lagen, vollkommen identisch.

6) Die Ebene ist in sich verschiebbar und umkehrbar."

Rausenberger geht dann noch näher auf die schon erwähnte (s. Baltzer) Darstellung der Ebene von J. Bolyai und Lobatschewsky ein und fügt derselben folgende Kritik zu: „Diese Erzeugungsweise erscheint schon deshalb als unnatürlich, weil sie zuerst die Kugel und den Kreis liefert, die Gebilde einer höheren Stufe[1]) sind, wie die Ebene und die Gerade. Trotzdem müfsten wir sie der hier gegebenen vorziehen, wenn sich aus ihr die Eigenschaften der beiden letzteren ohne Zuhilfenahme von Axiomen (aufser dem der Kongruenz) herleiten liefsen." Dies ist nach Rausenbergers Ansicht aber nicht gelungen.[2]) Bemerkenswert ist noch folgende Stelle:

„Es scheint, dafs der zweite Gleichheitssatz nur nach Einführung der Ebene beweisbar ist; nur in der Ebene sind Winkelvergleichungen möglich."[3])

Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

„Eine Fläche ist eine zweifach ausgedehnte Gröfse. Die einfachste Fläche ist daher diejenige, deren Länge und Breite gerade Linien sind. Da die Ausdehnung in die Breite von der Länge ausgeht,[4]) so haben diese beiden Geraden einen Punkt gemeinsam.

Sich schneidend heifsen Gerade, die einen Punkt gemein haben.

---

[1]) Vergl. die obigen Ausführungen. Im Anschlufs daran möge noch folgendes bemerkt werden. Wird der Begriff des geometrischen Ortes zu grunde gelegt, und resultieren wegen der Einfachheit der Bedingung als Grundgebilde Kugel und Kreis, so können Ebene und Gerade auch als Spezialfälle angesehen werden, nämlich für $r = \infty$.

[2]) Vergleiche das Zitat aus Frischauf, Absolute Geometrie.

[3]) Vergleiche meine Bemerkungen zu § III. der Crelleschen Abhandlung und die Bemerkungen, die sich auf diese Frage beziehen, bei den Zitaten von Baltzer und J. C. Becker.

[4]) Eine höchst eigentümliche Ausdrucksweise, besonders merkwürdig die daraus gezogene Folgerung.

Eine Fläche ist eine stetige Linien-Folge[1]) in der Ausdehnung ihrer Breite. Die einfachste Fläche ist daher eine Aufeinanderfolge von Linien, welche durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist. Die Linien aber, welche durch je zwei Punkte der beiden sich schneidenden Geraden bestimmt werden, sind Gerade. Die einfachste Fläche entsteht also, wenn eine Gerade an zwei sich schneidenden Geraden entlang bewegt wird. Eine solche Fläche ist die Fläche der Tafel, die Fläche des Papiers etc. Sie kennzeichnet sich dadurch, dafs auf derselben keine Erhöhung oder Vertiefung[2]) wahrgenommen wird, dafs sie also eben erscheint.

Ebene heifst die durch zwei sich schneidende Gerade bestimmte Fläche.

Eine Ebene ist eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden entlang an zwei sich schneidenden Geraden."

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

Die Lagenänderung einer Geraden wird Schiebung genannt. Findet die Schiebung so statt, dafs jeder Punkt eine Gerade beschreibt (eine einfache Bewegung macht), so heifst die Bewegung einfach.

„Wenn eine Gerade ihre Lage durch einfache Bewegung[3]) ändert, so heifst das von ihr erzeugte Gebilde eine Ebene."

„Die Eigenschaften einer Ebene sind bestimmt:

1) Durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Geraden; 2) durch Lage und Richtung einer zweiten Geraden,

---

[1]) Ich halte diesen Ausdruck in einem für Schüler bestimmten Buche für gefährlich, da er gar zu leicht Veranlassung geben kann zu dem Glauben, die Fläche sei aus Linien zusammengesetzt. — Vergleiche die Rezension in H. Z. XVII. p. 50/51.

[2]) Erhöhung und Vertiefung setzen den Begriff der Ebene ja voraus: was über die Ebene hinausragt, heifst Erhöhung, eine Stelle, welche in der Fläche, aber unter der Ebene sich befindet, eine Vertiefung.

[3]) Der hier in die Erklärung der Ebene eingeführte Begriff der einfachen Bewegung ist kein allgemein gültiger; aufserdem kommt ihm — selbst von dem ersten Einwurf abgesehen — durchaus keine deutlichere Vorstellbarkeit zu, als dem Begriff der Ebene selbst. Vergl. Günthers Besprechung in H. Z. VIII. p. 47.

die von einem der ersten angehörigen Punkte beschrieben wird; oder, da man beide Gerade durch dieselbe Lage[1]) bestimmen kann:

1) durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Geraden;

2) durch die Lage eines beliebigen festen, aufserhalb dieser Geraden in der Ebene liegenden Punktes;

oder, wenn man auch die in 1) genannte Gerade durch zwei Punkte ersetzt:

1) durch die Lagen dreier nicht in derselben Geraden liegenden Punkte.

Die Merkmale einer Ebene sind hiernach vorläufig: Eine Lage und zwei Richtungen; oder zwei Lagen und eine Richtung; oder drei Lagen.

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel 1879.

Auch in diesem Lehrbuche geht Schlegel von dem Begriffe der einfachen Bewegung aus bei der Definition der Ebene (wie auch der Geraden). Auf die Bewegung, ihr Wesen (Freiheit) etc. wird genauer eingegangen[2]) und als wesentliche Merkmale der Ebene ausgesprochen:

„Die Ebene ist 1) zweimal ausgedehnt; 2) einfach; 3) unbegrenzt; 4) unendlich; 5) in sich beweglich.“

---

von Swinden, ed. Jakobi. — Jena 1834.

„Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige Fläche, welche durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Grenzen hat.“ Eukl. I. Erkl. 7. — L. G. I. Erkl. 6.

„Anmerkung 1. Andere erklären Ebene als diejenige Fläche, welche eine gerade Linie in allen ihren Teilen berühren

---

[1]) Dieser Ausdruck ist an sich unklar. Es ist gemeint, dafs die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam haben.

[2]) Ich mufs wiederholt auf den Artikel Bewegung, die allerdings erst im II. Bande besprochen wird, und auf meine im Kapitel III gegebenen vorläufigen Bemerkungen hinweisen.

kann (in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen J.)“ S. Clavius über die 7. Erkl. im ersten Buche des Eukl.

Anmerkung 2. Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erklärung durch Worte fähig wären — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel.[1])

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik.[2]) — Göttingen 1822.

p. 171. „Man darf das, was eine ebene Fläche ist, wohl als bekannt voraussetzen, obgleich eine solche durch Hilfe der geraden Linie noch erklärt werden kann.“

p. 176. „Durch Hilfe der geraden Linie kann die, übrigens ursprüngliche, Vorstellung der ebenen Fläche näher bezeichnet werden.“ Es folgt dann eine der üblichen Erklärungen.

[1]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, bemerkt dazu: „Glaubt aber jemand, dafs solche Definitionen, wenn sie auch nichts nutzen, doch mindestens nichts schaden können, so sei folgendes bemerkt: Man will in Schulen an Klarheit der Begriffe und vollkommene Schärfe des Ausdrucks gewöhnen, und beginnt mit unklaren und unzutreffenden Erklärungen, deren Fehlerhaftigkeit der Schüler herausfühlt, — Erklärungen der einfachsten Grundlagen, deren Begriffe im Bewufstsein des Schülers von vornherein fester und klarer vorhanden sind, als irgend welche Kenntnisse, die ihm die Schule beibringt.“ Man vergleiche am angeführten Orte die weiteren Ausführungen.

[2]) Hankel sagt in seiner Antrittsrede zu Tübingen „Die Entwicklung etc.“: „In Göttingen lehrte neben Gaufs seiner Zeit ein wissenschaftlich ganz unbedeutender Mathematiker, Thibaut, die Elemente vor hundert Zuhörern aus allen Fakultäten, während Gaufs kaum ein halbes Dutzend aufbrachte. Wenn ich die Wahl hätte, — möchte ich lieber Gaufs, als Thibaut sein.“ Dazu bemerkt Günther in seiner Programmarbeit „Der Thibautsche Beweis etc.“: „Der Grundrifs von Thibaut kann überhaupt für jene Epoche als ein wahres Muster einer populärwissenschaftlichen Darstellung umfassenden Stoffes bezeichnet werden, und wer dasselbe kennt, wird auch nur mit tiefem Bedauern die hohlen Deklamationen lesen können, welche der sonst so feinsinnige Hankel gegen dessen Verfasser richtet.“ Ich mufs gestehen, dafs mich dieses Urteil Günthers wahrhaft befriedigt und — in gewisser Hinsicht — beruhigt hat.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

„Eine Fläche ist entweder eben oder krumm. Dies sind einfache Begriffe.“ „Als Kennzeichen einer Ebene kann man angeben, dafs die gerade Verbindungslinie jeder zwei Punkte derselben ganz in sie fällt.“

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 409. „Unter Ebene wird die Fläche verstanden, deren allen Teilen eine gerade Linie angefügt werden kann,[1]) oder genauer, welche so beschaffen ist, dafs jede gerade Linie, die durch zwei beliebige Punkte der Fläche gelegt ist, ganz in die Fläche fällt.“

Klügel, Wörterbuch, Artikel Ebene.

„Ebene ist eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwei Punkte derselben gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten liegt. Sie ist allenthalben, in gröfseren wie in kleineren Teilen, gleichförmig ausgedehnt, weil auf der geraden Linie die Teile durchgehends eine gleichförmige Lage haben.“

Die Euklidsche Definition wird angeführt und hinzugefügt:

„Er deutet durch jene Erklärung die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. Wie auch eine Ebene durch gerade Linien begrenzt sein mag, so ist die Form der Fläche selbst dieselbe, nur die Gröfse und die äufsere Gestalt[2]) mögen verschieden sein. Euklides setzt in der That voraus, dafs sich in einer Ebene allenthalben gerade Linien ziehen lassen.“

„Proklus ... versteht die Erklärung der Ebene bei Euklid so, dafs die Ebene zwischen zwei geraden Linien einen Raum einnehme, der so grofs ist als der Raum zwischen diesen Linien.[3])

Schwerlich hat Euklid dieses sagen wollen.“

---

[1]) „Cujus omnibus partibus recta linea congruit.“ Procli in primum Eukl. element. libr. Comment. liber IV, a Francisco Baccio Fabritio Veneto editi. Patavii 1560. p. 67.

[2]) Besser wohl: die Begrenzung.

[3]) Der Ausdruck ist dunkel. Es soll wohl damit gemeint sein, dafs

Becker, F., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Progr. Hanau 1870.

„Wenn zwei sich schneidende Gerade ausreichen, um die Lage einer Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung (selbst bis ins Unendliche) zu bestimmen, so ist die Fläche eine Ebene.[1]) In ihr kann man nach allen Richtungen ganz in sie hineinfallende Gerade ziehen. Jede andre Ebene, welche durch dieselben zwei sich schneidenden Geraden geht, fällt mit der ersteren (der Lage nach) zusammen, ist also mit ihr einerlei (identisch). Merkmal einer Ebene ist also, dafs sie in zwei Geraden, welche ihr angehören, festgehalten[2]) und nun in umdrehende Bewegung versetzt (wobei sie beständig durch diese beiden Geraden geht) ihre Lage im Raume unverändert beibehält, womit zugleich das weitere Merkmal zusammenhängt, dafs jedes beliebige Stück einer Ebene überall ganz mit ihr zusammenfallen mufs, wenn man es mit zwei in ihm liegenden Geraden an beliebiger Stelle in sie hinein gelegt denkt."

Helmholtz, Pop. wiss. Vortr. III, 2. „Über den Ursprung etc."

p. 34: „Wir sehen daraus, dafs in der Geometrie zweier Dimensionen die Voraussetzung, jede Figur könne ohne irgend welche Änderung ihrer in der Fläche liegenden Dimensionen nach allen Richtungen hin fortbewegt werden, die betreffende Fläche charakterisiert als Ebene oder Kugel oder pseudosphärische Fläche. Das Axiom, dafs zwischen je zwei Punkten immer nur eine kürzeste Linie bestehe, trennt die Ebene und pseudosphärische Fläche von der Kugel, und das Axiom von den Parallelen scheidet die Ebene von der Pseudosphäre. Diese drei Axiome sind in der That also notwendig und hinreichend, um die Fläche, auf welche sich die Euklidische Planimetrie

---

die Ebene die kleinste Fläche sei, die sich zwischen zwei Geraden denken läfst. — Man vergleiche übrigens weiter unten: Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.

[1]) Diese Erklärung hat viel für sich.

[2]) Wenn die Ebene in zwei Geraden festgehalten gedacht wird, so ist sie selbst auch fest und kann nicht mehr gedreht gedacht werden.

bezieht, als Ebene zu charakterisieren, im Gegensatz zu allen andren Raumgebilden zweier Dimensionen."

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie.

„Sind im Raume drei beliebige nicht in gerader Linie liegende Punkte gegeben, durch welche eine willkürliche Anzahl unter sich verschiedener Flächen gelegt ist, und man denkt sich die letzteren alle um irgend zwei jener Punkte so lange herumgedreht, bis sie sämtlich wiederum durch den dritten Punkt gehen (so dafs also diejenigen Seiten der Flächen, die früher die oberen waren, nunmehr die unteren geworden sind), so wird jede einzelne Fläche in dieser neuen Lage mit der im Raume gedachten Spur ihrer anfänglichen Lage nicht zusammenfallen, sondern irgend einen hohlen Raum einschliefsen. Es wird aber stets eine Fläche vorhanden sein oder wenigstens als vorhanden gedacht werden können, welche nach erfolgter Umlegung mit der Spur ihrer ersten Lage allenthalben genau zusammenfällt und keinen hohlen Raum einschliefst. Diese Fläche wird nun eine gerade Fläche oder eine Ebene genannt."

„Auch die Vorstellung der Ebene ist eine Grundvorstellung des menschlichen Geistes."

Crelle, Über Parallelen-Theorien etc. — Berlin 1816.

„Da im Raume durch dieselbe Linie unzählige Flächen liegen können (weil eine Linie zugleich mit den Flächenräumen, die sie sondert, da ist), so bestimmen eine einzelne Linie oder mindestens zwei Punkte, also weniger als drei Punkte, keine Fläche;[1]) also kann eine Fläche nicht in eine andere fallen, wenn beide nicht wenigstens drei Punkte gemein haben."

[1]) Aus dieser Bemerkung ergiebt sich die Charakterisierung der Ebene als derjenigen Fläche, welche durch die kleinstmögliche Anzahl von Punkten im Raume bestimmt ist (wie die Gerade diejenige Linie ist, die durch die kleinstmögliche Anzahl von Punkten bestimmt ist). (Leider geht Crelle auf diesen fruchtbaren Gedanken nicht weiter ein, ja er verwertet ihn nicht einmal bei seiner Definition der Ebene.) Hierin liegt die Einfachheit von Gerade und Ebene in dem Sinne, dafs man sie als die einfachste Linie resp. Fläche bezeichnet.

„Eine Fläche unterscheidet sich von der anderen durch ihre Gestalt; daher giebt es unzählige verschiedene Flächen. Man unterscheidet gerade und krumme. Estere heifsen Ebenen. Eine Ebene ist, die an beiden Seiten dieselbe Gestalt hat, so, dafs wenn man die eine Seite der Ebene in die andere, d. h. den körperlichen Raum an der einen Seite in den körperlichen Raum an der andern, und umgekehrt, legt, die Grenzen des Raumes in demselben Orte im Raume bleiben."

„In einer Ebene sind also nach allen Richtungen gerade Linien möglich, die ganz in der Ebene bleiben, weil alle Linien in einer Ebene, gleich der Ebene selbst, an beiden Seiten dieselbe Gestalt haben."

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

„Befinden sich alle geraden Linien, die durch beliebige Paare von Punkten einer Fläche gehen, ganz in der Fläche, so ist die Fläche gerade und heifst Ebene".

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenburg 1870.

§ 8: „So wie man zwei Hauptarten der Linien unterscheidet, so unterscheidet man auch zwei Hauptarten der Flächen: ebene und krumme Flächen. Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine Fläche von solcher Beschaffenheit, dafs jede zwischen irgend zwei in derselben angenommenen Punkten gezogene gerade Linie ganz in sie hineinfällt."

§ 9: „Die vorher gegebene Definition der ebenen Fläche kann im ersten Augenblick für Anfänger einige Dunkelheit haben. Bedenkt man aber nur z. B. wie jeder Tischler untersucht, ob eine glatt gehobelte Fläche eine völlig genaue Ebene bildet, indem er nämlich die Schärfe eines richtigen Lineals nach allen Richtungen an selbige anlegt und zusieht, ob er nirgends zwischen dem Lineal und der zu prüfenden Fläche durchsehen kann, ob also die Schärfe des Lineals sich überall völlig genau an die Fläche anschliefst, so wird alle Dunkelheit bei obiger Erklärung gewifs auf der Stelle verschwinden"....

August, Lehrbuch der Mathematik I. — Berlin 1852.

„Gewisse Flächen können durch Fortbewegung einer Linie entstanden gedacht werden. Ist dabei die bewegte Linie eine gerade und wird sie so bewegt, dafs jeder ihrer Punkte wieder eine gerade Linie, aber in einer andern Richtung bildet, so entsteht eine ebene Fläche oder Ebene."

Dazu kommt als Grundsatz: „Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in derselben," und ein Forderungssatz: „Durch jede drei Punkte im Raume sich eine Ebene gelegt zu denken und sich dieselbe nach allen Seiten hin beliebig erweitert vorzustellen."

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Eine Fläche wird eben oder Ebene genannt, wenn eine Gerade, wie man sie auch in die Fläche legen mag, immer mit dieser zusammenfällt."

Bartholomäi, Gradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

Bartholomäi betrachtet die „Abhängigkeit der Elemente" eines Winkels. Der Übergang des einen Schenkels in den andern findet durch Drehung statt. „Diese Drehung darf nicht willkürlich sein."[1]) Deshalb gleitet der eine Schenkel bei der Drehung auf einer Geraden, die die beiden Schenkel schneidet, hin. Nach einer vollständigen Umdrehung hat der freie Schenkel eine Ebene beschrieben.

„Die Ebene ist diejenige Fläche, in welche alle Geraden zwischen je zwei Punkten derselben fallen."

„Eine Ebene ist durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, vollkommen bestimmt."

Bartholomäi fügt hinzu: „Auf Einfacheres kann die Erzeugung der Ebene nicht zurückgeführt werden." Die Vorstellung der durch drei Punkte bestimmten Ebene und zwar in unendlicher Ausdehnung ist daher ein „Postulat" der Geometrie.

---

[1]) Vergleiche meine Anmerkung zu Deahnas Darstellung in Baltzers Zitat.

Beck, Ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

„Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine Fläche, auf welche man eine gerade Linie nach allen möglichen Richtungen so legen kann, daſs alle Punkte dieser Linie in der Fläche liegen."

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementar-Mathematik II. — Berlin 1877.

„Alle Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene, nicht durch diesen Punkt gehende Gerade schneiden, liegen in einer Fläche, welche ebene Fläche oder Ebene genannt wird.

Die Ebene verbindet alle in ihr liegenden Punkte auf kürzestem Wege, und jede Gerade, welche zwei Punkte mit ihr gemein hat, liegt mithin ganz in ihr.

Eine Ebene wird beschrieben von einer Geraden, welche auf zwei anderen sich schneidenden hingleitet, oder von einer Geraden, die sich um einen ihrer Punkte so dreht, daſs sie dabei eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade schneidet."

Dazu kommt nach der Behandlung der Parallellinien der Satz: „Eine Ebene ist vollkommen bestimmt durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik I. — Köln 1877.

Dieselbe Erklärung der Ebene, wie bei Becker in dem vorhergehenden Zitat.

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik II. — Leipzig 1887.

„Die einfachste aller Flächen ist die ebene Fläche oder Ebene. Man versteht darunter eine Fläche von solcher Beschaffenheit, daſs jede Gerade, welche zwei Punkte derselben verbindet, ganz in ihr liegt."

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik I. — Liegnitz 1889.

„In jeder Fläche kann man von jedem Punkte aus beliebig viele Linien ziehen. Sind dieselben alle gerade, dann heifst die Fläche eine ebene Fläche oder eine Ebene."

Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842.

„Die Ebene ist das Aufsersichsein, und zwar der Linie, der Richtung des Raumes.[1]) Damit hat sich das Sich-Unterscheiden des Raumes als seiendes Aufsereinander selbst bestimmt. Die Ebene ist selbst der Raum. Aber der Raum ist jetzt als Ebene bestimmt, — durch die zwei Dimensionen. Damit ist überhaupt die Bestimmtheit an den Raum getreten. Dieser Widerspruch aber, dafs der Raum, das absolute Aufsereinander, ein bestimmter sei, wird sich weiterhin zum totalen Raume entwickeln.

In der Ebene als Raum wiederholt sich zunächst das zuvor betrachtete Spiel des Raumes, dafs sie in sich Richtungen, Linien setzt. Aber wie die Ebene bestimmter Raum ist, haben auch die Richtungen in ihr nicht überhaupt eine Beziehung zu einander, sondern eine bestimmte Beziehung — durch die zwei Dimensionen, welche die Ebene bestimmen — die sich bei allem sonstigen Unterschied, der Richtung erhält; sie sind in der Ebene, die selbst bestimmt ist allenthalben gerade Linie zu sein."

Die weitläufige, weitere philosophische Betrachtung der Ebene, die sich auf den Begriff der Richtung und der Kurve stützt, schliefst mit den Worten:

„Die Ebene entstand uns als die Rückkehr der Linie, als Richtung, aus dem Aufsersich zu sich.[2]) Als solche mani-

---

[1]) Dieses Zitat kann als Muster mystisch-philosophischer Begriffserklärung gelten. Man möge es also in diesem Sinne auffassen, wenn ich die Betrachtungen von Frantz in dieser ausführlichen Weise zitiere. Man möge übrigens diese Ausführungen vergleichen mit den entsprechenden bei Schmitz-Dumont, um wahrhaft mathematisch-philosophische Betrachtung im Gegensatz zu dieser philosophierenden, geistreich sein sollenden Untersuchung zu erkennen und zu würdigen.

[2]) Auf diese Stelle sei noch besonders aufmerksam gemacht. Ich kann es mir nicht versagen, zur Vergleichung eine Stelle aus Hegel anzuführen, obwohl sie inhaltlich zu dem Vorliegenden in gar keiner

festiert sich die Ebene in der Kurve, in welcher sie darum ihre Bestimmung erreicht hat. Es ist sonst nichts an der Ebene zu erkennen.“

Bei der Betrachtung des Körpers heifst es dann weiter: „Die Ebene ist bestimmter Raum. Aber wir betrachteten sie bisher so, dafs sie überhaupt nur Bestimmtheit in sich habe, nämlich die, allenthalben gerade Linie zu sein. Sie ist aber selbst eine bestimmte, diese. Indem sie bestimmter Raum ist, unterscheidet sich in ihr der Raum von sich als dem Allgemeinen. Als sich richtend war er zur Ebene geworden, und die Ebene ist selbst nur eine Richtung; so ist sie eine bestimmte unter andern. Indem sich der Raum als Ebene setzt, setzt er viele Ebenen. Danach ist die Ebene nicht der Raum, als vielmehr im Raume, der wie früher in Linien jetzt in Ebenen sein Aufsereinander realisiert.“

Frischauf, Absolute Geometrie.[1]) — Leipzig 1872.

p. 2. „Eine Fläche, welche durch drei Punkte bestimmt ist, heifst eine Ebene.“

Im Anhang p. 81 heifst es hierzu:

„Die Gerade und die Ebene werden in der Geometrie gewöhnlich axiomatisch vorausgesetzt. Von den Versuchen dieselben durch einfachere Axiome zu ersetzen, soll der von Wolfgang Bolyai gegebene mitgeteilt werden.

Beziehung steht. In Hegels „Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften“ heifst es in § 12: „Das Wesen, als das durch die Negativität seiner selbst sich mit sich vermittelnde Sein, ist die Beziehung auf sich selbst, nur indem sie Beziehung auf Anderes ist, das aber unmittelbar nicht als Seiendes, sondern als ein Gesetztes und Vermitteltes ist.“ Darin ist, wie ein Kritiker bei Besprechung einer ähnlichen Philosophirerei sich treffend geäufsert hat, Sinn, Nichtsinn und Unsinn.

[1]) Man vergleiche: Beltrami, Essai d'interpretation de la géometrie non euklidienne traduit de l'italien par M. J. Hoüel, extrait du Giornale de Matematiche, t. VI, 1868. — besprochen in H. Z. II. p. 130. — Frischaufs Werk selbst ist in H. Z. VII. p. 464/69 durchaus beifällig besprochen von Killing, während Pietzker ebenda p. 469/74 gegen Frischauf vorgeht. Eine Würdigung dieser Einwürfe findet sich bei Günther, Der Thibautsche Beweis etc. — Die Entgegnung Killings findet sich in H. Z. VIII. p. 220.

Der Grundgedanke besteht in folgendem: Um die Ebene zu erhalten, denke man sich von zwei Punkten O und O' (als Mittelpunkten) fortgesetzt (konzentrische) Kugeln mit (demselben aber) immer gröfser werdendem Radius beschrieben. Der Inbegriff der Durchschnittslinien je zweier Kugelflächen mit gleichem Radius ist eine Ebene."[1])

Nach einer längeren Ausführung dieses Gedankens, der zum Begriff der Geraden führt, wird noch folgende Konstruktion der Ebene gegeben.

p. 87: „Eine Kreislinie als Durchschnittslinie zweier gleicher Kugelflächen werde in den Punkten A und B halbiert.[2]) Durch die Punkte A und B ist eine Gerade bestimmt; es sei ferner C die Mitte der Strecke AB. Eine der beiden Hälften der Kreislinie werde in D halbiert, so ist durch die Punkte C und D eine zweite Gerade CD bestimmt, welche senkrecht auf der Geraden AB genannt wird. Dreht man die erhaltene Figur um AB, so beschreibt die Gerade CD eine Ebene.

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

„Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige, welche zwischen ihren Grenzen[3]) durchaus dieselbe Lage hat, dafs jede zwei Punkte in ihr, geradlinig verbunden, eine gerade Linie liefern, welche ganz in sie hineinfällt."

---

[1]) Günther sagt in einer Besprechung der II. Auflage der Elemente desselben Verfassers in H. Z. IX. p. 222: „Statt wie vordem „Ebene und Gerade" hat der Verfasser, dessen Spezialität ja bekanntlich die absolute Geometrie ist, nunmehr „Kugelfläche und Kugellinie" an die Spitze gestellt und deduziert erstere aus letzterer. Dann erst folgt die Lehre von den Ebenen und Geraden im Raume. Referent hält dieses Verfahren, die Kugelfläche in den Vordergrund zu stellen, für pädagogisch richtig und möchte demselben sogar eine noch weitere Ausdehnung gegeben wissen."

[2]) Aus der beigefügten Figur geht hervor, dafs A und B zwei entgegengesetzte Punkte des Kreises sind.

[3]) Damit fällt die unendliche Ebene ganz aus der Betrachtung heraus; es hätte sonst genauer heifsen müssen: wenn man sich irgend einen Teil der Ebene denkt, so hat er zwischen seinen Grenzen durchaus dieselbe Lage. Aber dieser Ausdruck bedarf selbst wieder einer Erläuterung.

Helmes,[1]) Die Elementarmathematik II. — Hannover 1874.

„Von allen Flächen ist ausgezeichnet durch ihre Einfachheit[2]) und durch die leicht vermittelte Bestimmtheit ihres Begriffs die ebene Fläche oder die Ebene.“

Der Erklärung der Ebene resp. der Darlegung ihrer Beschaffenheit und der Vergleichung mit Beispielen folgen die Worte: „Dafs es aber wirklich eine Ebene giebt,[3]) hat sich, ungeachtet auf der Voraussetzung des Begriffs das ganze Gebäude der Geometrie beruht, bis auf den heutigen Tag noch nicht beweisen lassen; der Begriff der Ebene gehört zu den Grundvorstellungen.“ Helmes weist dann noch auf Deahnas in Baltzers Zitat erwähnten „scharfsinnigen“ Versuch, die Statthaftigkeit des Begriffs der Ebene und die Wirklichkeit derselben zu beweisen hin und auf Crelles und Erbs Arbeiten. Es wird alsdann der Satz bewiesen: „Wenn zwei Ebenen drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte miteinander gemein haben, so sind sie nicht zwei verschiedene Ebenen, sondern sie fallen ganz miteinander zusammen; oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte ist die Ebene bestimmt.“

Heinze, C., Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

„Sind eine gerade Linie und ein aufserhalb derselben liegender Punkt gegeben, so ist die Zusammenfassung aller Punkte, die von dem gegebenen Punkte aus vor der gegebenen geraden Linie liegen, die geometrische Ebene.“ Dazu kommt noch die Erklärung:

---

[1]) Besprochen in H. Z. VII. p. 134 f. — Durchaus anerkennend.

[2]) Vergleiche meine obigen Ausführungen über diesen Begriff und die Anmerkung zu dem Zitat aus Crelle, Parallelentheorien.

[3]) Ob es in Wirklichkeit eine Ebene giebt, ist von gar keiner Bedeutung. Es ist diese Frage eine von denen, von denen Kant sagt, dafs man, ehe man sie zu beantworten suche, sich zuerst fragen müsse, ob man sie vernünftiger Weise auch stellen dürfe. Und ähnlich äufsert sich Hankel bei der Besprechung des Parallelenproblems. „Mit Recht verzichtete Euklid und mit ihm die folgenden Geometer auf den Beweis. Hätten sie das nicht gethan, so . . . wäre die Mathematik just so weit gekommen, als die Methaphysik mit dem Begriffe des Seins . . .“

„Denkt man sich eine gerade Linie *ab* und dann einen Punkt *c*, der nicht in dieser geraden Linie oder deren Verlängerung liegt, so kann man sich noch einen zweiten Punkt *d* denken, der vom gegebenen Punkte aus vor der geraden Linie liegt. Derselbe kann vom gegebenen Punkte aus vor der geraden Linie überall gedacht werden, bald näher dem gegebenen Punkte oder der geraden Linie, bald weiter von dem einen oder der andern. Nimmt man alle diese Punkte zusammen, so hat man die geometrische Ebene."[1]) Aus dieser Art der Auffassung folgt direkt, dafs die Ebene durch einen Punkt und eine Gerade oder durch drei Punkte bestimmt ist. Die Möglichkeit der unendlichen „Verlängerung" wird ausdrücklich hervorgehoben.

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.
„Jede Ebene kann dem Auge als Gerade erscheinen."

J. H. T. Müller, Lehrbuch. — Halle 1844.

Nach der gewöhnlichen Erklärung der Ebene[2]) und einigen daraus abgeleiteten Sätzen wird noch folgende Betrachtung hinzugefügt:

„Die Ebene ist die kleinste von allen begrenzten Flächen, welche sich zwischen einer und derselben in dieser Ebene liegenden Grenzen denken lassen.

Zur Erläuterung können Stücke von Kugeln, Kugelkappen u. s. w. gebraucht werden. — Unsere Sprache hat keinen Ausdruck für das dem Abstande bei den Linien Entsprechende."[3])

---

[1]) Diese Erklärung Heinzes ist identisch mit derjenigen, dafs man die Ebene unter Umständen als eine gerade Linie sieht. Mir scheint dieselbe nicht ohne Wert zu sein. Man vergleiche das folgende Zitat aus Menger.

[2]) J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, in H. Z. I. p. 233 bemerkt zu der Müllerschen Definition: „Trotz aller Künstelei ist nicht genug gesagt, um die Ebene von der Kugelfläche sicher zu unterscheiden."

[3]) Man vergleiche das Zitat von Ebensperger und meine Anmerkung dazu. Übrigens könnte man analog dem Abstand zweier Punkte viel-

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

„Wenn eine Fläche die Beschaffenheit hat, daſs sie von einer geraden, sie in zwei Punkten berührenden[1]) Linie auch in allen übrigen zur geraden Linie gehörigen Punkten berührt wird; und dieses nicht in einer besonderen Lage der geraden Linie allein, sondern in allen möglichen Lagen derselben stattfindet; — so heiſst eine solche Fläche eine Ebene."

— — — — —

Schmitz-Dumont, Mathematische Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

„Das durch zwei Dimensionen in unbeschränkter Ausdehnung bestimmte Gebilde heiſst Ebene.[2])

— — — — —

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

„Wir gehen nun zur Definition der Ebene über, welche keine Schwierigkeit darbietet, sobald eine stichhaltige Erklärung der Geraden gegeben ist.

Nach Euklid ist die Ebene diejenige Fläche, welche zwischen den in ihr befindlichen Geraden auf einerlei Art liegt. Dasselbe kann man aber auch von jeder in die Ebene abwickelbaren Fläche, insbesondere vom Cylinder und dem Kegel be-

---

leicht auch von dem Abstande zweier sich schneidenden Geraden sprechen. Es würde sich dann nur darum handeln den Begriff der kürzesten Drehung als Drehungsabstand zu bezeichnen und in die Geometrie einzuführen. Allerdings träfe dieser Ausdruck dann nur zu für zwei sich schneidende Gerade, während man bei Parallelen von der kürzesten Verschiebung sprechen müſste. Beide Fälle lieſsen sich aber zusammenfassen in dem zu normierenden Begriff des Abstandes zweier Geraden. Die Schwierigkeit liegt darin, daſs die sich kreuzenden Geraden aus der Betrachtung auszuscheiden sind; daſs also die obige Begriffsbestimmung nicht allgemein gültig ist. Vergl. Zitat aus Majer.

[1]) Durch den Ausdruck „berühren" wird der Begriff der Ebene vorweg genommen; es hätte heiſsen müssen: Wenn eine gerade Linie, sobald sie zwei Punkte mit einer Fläche gemeinsam hat, dann auch jedesmal alle Punkte mit ihr gemeinsam hat, so heiſst die Fläche Ebene.

[2]) Diese Erklärung stimmt mit der von mir gegebenen Definition überein.

haupten." Nach Proklos sei Euklids Definition durch Vertauschung der Gattungen — ebenso wie bei der Geraden — nämlich der Linie mit der Fläche gebildet.[1]) Die übrigen Bestimmungsarten der Ebene werden erwähnt, darunter auch diejenige als Minimalfläche zwischen ihren Grenzen und als die Fläche, deren Inneres durch das Äufsere verdeckt wird.[2]) Nach Killing,[3]) dem neuesten Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie, sei die Ebene charakterisiert durch die drei Eigenschaften:

„1) Bei der Ruhe eines jeden (d. h. irgend eines) ihrer Punkte kann die Fläche noch in sich bewegt werden, jeder Punkt beschreibt eine (durch den ruhenden Punkt und die Anfangslage des bewegten Punktes) bestimmte Linie und kehrt auf derselben bei fortschreitender Bewegung in die Anfangslage zurück.[4])

2) In der Fläche giebt es in sich verschiebbare Linien, welche umkehrbar sind (gerade Linien) oder mit anderen Worten: bei einer gewissen Bewegung der Ebene kann eine solche Linie in sich verschoben werden, bei einer anderen, nämlich der Drehung um einen Punkt der Linie, kann die Linie als Ganzes wieder in die Anfangslage gelangen, während die einzelnen Punkte ihre Lage vertauschen.

3) Die Fläche selbst ist umkehrbar d. h. man kann sie so um eine in ihr liegende Gerade drehen, dafs sie als Ganzes die Anfangslage wieder einnimmt, während die Punkte nicht in die frühere Lage zurückkehren." Beez bemerkt dazu: „Flächen müssen bei diesen Erklärungen offenbar als starr und unbiegsam angesehen werden, denn sonst liefsen sich dieselben drei Eigenschaften auch an Flächen konstanter positiver wie negativer Krümmung nachweisen." Es heifst dann weiter: „Wenn der Verfasser hinzufügt: 'dafs diese Voraussetzungen in den

---

[1]) Man vergleiche weiter unten das Zitat aus Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.

[2]) Was dieser Ausdruck bedeuten soll ist mir nicht klar.

[3]) Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. — Leipzig 1885. Besprochen in H. Z. XVII. p. 209.

[4]) Dies trifft auch zu für die Kugelfläche und in eingeschränktem Mafse auch für die Kegelfläche.

ersten Definitionen Euklids enthalten sind, bedarf keines Nachweises', so kann dies doch unmöglich auf die Eigenschaft der Umkehrbarkeit sich beziehen, die meines Wissens weder von Euklid, noch von einem andern griechischen Mathematiker postuliert wird.“ Beez geht dann näher auf diese Frage ein und verteidigt seinen auch von mir vertretenen Standpunkt, dafs entgegen Euklid der Punkt nicht Ausgangspunkt der Betrachtung sein dürfe. Nach Beez ist Leibniz der erste, welcher das Prinzip der Umkehrbarkeit ausgesprochen.[1]) „Er definiert in einem Briefe an Giordano die Ebene als diejenige Fläche, welche den Raum in zwei kongruente Teile zerlegt. Mit Recht wandte indessen Giordano ein, dafs man sich Flächen und Linien denken könne, welche den Raum beziehentlich die Ebene ebenfalls in zwei kongruente Teile zerlegten, ohne aber eben oder gerade zu sein. Es fehlt offenbar in der Leibnizschen Definition die zweite Bestimmung, dafs die beiden kongruenten Räume ineinander verschoben werden können, ohne dafs die Grenzflächen aufhören miteinander zusammenzufallen, mit anderen Worten die Voraussetzung, dafs die Ebene in sich selbst verschiebbar ist.“ Beez beansprucht für sich die Priorität der vervollständigten Definition und weist die Einwände, die vom pädagogischen und wissenschaftlichen Standpunkt aus gegen die Definition erhoben werden, zurück.

---

[1]) Vergleiche Baltzer. — Vergleiche Günther, Der Thibautsche Beweis etc.: „Die nicht-euklidische Geometrie nämlich, deren kritischen Leistungen auch der konservativste Geometer seinen Beifall nicht versagen sollte, hat dadurch ein neues bedeutsames Ferment in die Erörterung gebracht, dafs sie die Umkehrbarkeit für Ebene und gerade Linie betont. Man mag diese beiden Grundgebilde wie immer aus dem Raumbegriff selbst oder, wie es die verbesserte Methode der Neueren will, aus Kugel und Kreis herleiten, stets erheben sich die allergröfsten Schwierigkeiten, zu beweisen, dafs eine . . . Strecke . . . umkehrbar sei.“ Es wird verwiesen auf: Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876. S. 77 ff. — und auf: Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, I. S. 9 ff. u. S. 23 ff. In Bezug auf das letztere sagt Günther: „Neuerdings sind es besonders die Arbeiten J. C. Beckers, die den sekundären Charakter der früher als ursprünglich angesehenen Begriffe Gerade und Ebene bestimmt hervortreten liefsen.“

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

„Unter den verschiedenartigsten Flächen zeichnen sich die ebenen Flächen dadurch aus, dafs sie stets ineinanderfallen, wenn man sie auch auf verschiedene Weise zusammenlegt.“

Wernicke, Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887.

p. 27: „Axiom II. In unserem Raume giebt es eine unbegrenzte Fläche, welche dadurch erzeugt werden kann, dafs man eine Gerade in einem ihrer Punkte festhält und dieselbe auf einer anderen Geraden gleiten läfst: diese Fläche wird ebene Fläche oder Ebene genannt.“

Dieselbe wird als Elementargebilde unseres Raumes bezeichnet.

„Welchen erkenntnistheoretischen Wert die beiden Axiome (nämlich aufser dem oder vor dem der Ebene das Axiom I. der Geraden) haben, auf welchen wir unsere Geometrie aufbauen, mag hier dahingestellt bleiben: für den Mathematiker sind sie einfach Voraussetzungen, welche er machen mufs, falls er eine Geometrie begründen will, welche für die Untersuchung und Darstellung der Aufsenwelt brauchbar ist.“

p. 33: „Jede Ebene ist in sich kongruent, d. h. sie läfst sich in jeder Kopie, welche mit ihr zusammenfällt, verschieben, ohne Biegungen und Dehnungen ausgesetzt zu sein.“

„Jede Ebene hat mit einer ihrer Kopien zwei Lagen der Deckung (abgesehen von den Verschiebungen in sich selbst), und zwar gelangt man von der einen zur andern durch Drehung der Ebene um jede in ihr gelegene Gerade (Umkehrbarkeit).“

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889.

Auf die Erzeugung der Ebene durch eine um einen Punkt sich drehende und zugleich an einer zweiten Geraden gleitende Gerade wird ausführlich eingegangen und daraus die üblichen Folgerungen gezogen. Zugleich giebt Müller einen Apparat an, dessen er sich zur Veranschaulichung des Vorgangs bedient.

Martini, Die Krümmung ebener Kurven etc. — Rottweil 1877.

Es werden die zwei Seiten einer Fläche verglichen, wobei es vorkommen kann, dafs „die beiden Flächen durchaus gleich gestaltet“ sind.[1] Ist dies der Fall, so „gelangt man zu einer Fläche, in welcher keine Seite nirgends weder hohl noch erhaben ist,[2] in welcher somit jede Seite in ihrer ganzen Ausdehnung eben und folglich eingestaltig ist.“ „Die Ebene ist diejenige Fläche, deren beide Seiten durchweg gleich gestaltet sind.“[3]

Nach näherer Ausführung heifst es: „Nach dieser Definition erscheint die Ebene offenbar als die denkbar einfachste Fläche. Weil die beiden Seiten einer Fläche gleich grofs sind, da sie sich ja in ihrer ganzen Ausdehnung gegenseitig berühren,[4] so sind die beiden Seiten einer Ebene, weil noch gleich gestaltet, kongruent.“

Hieran schliefsen sich noch ausführliche Betrachtungen über die Verhältnisse bei Drehung und Verschiebung von Ebenenteilen.

Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881.

„Die älteren Philosophen beliebten die Ebene nicht als eine Art der Fläche zu nehmen, sondern beides als dasselbe zur Darstellung einer zweidimensionalen Gröfse. Denn so hat der göttliche Plato die Geometrie als Lehre von den Ebenen bestimmt, indem er sie der Stereometrie entgegensetzte, wie wenn Ebene und Fläche dasselbe wäre. Und ebenso der wunderbar grofse Aristoteles.

---

[1]) Wie schon oben ausgeführt, hat die Fläche selbst keine zwei Seiten; man kann sie aber von zwei Seiten aus betrachten. Das ist auch hier gemeint.

[2]) Dafs hierin die Voraussetzung der Ebene liege, habe ich weiter oben gezeigt. — Vergl. Anmerkung zu Schindlers Zitat.

[3]) Vielleicht liefse sich diese Definition so geben: Diejenige Fläche, die von beiden Seiten betrachtet durchaus dieselbe Gestalt zeigt, heifst Ebene.

[4]) Ein unglücklicher Ausdruck. Danach macht es den Eindruck, als könne man etwa eine Ebene in zwei zerlegen: in die linke Seite und die rechte Seite.

Euklid aber und seine Nachfolger erklärten die Fläche für das genus, die Ebene für die species, wie die Gerade im Verhältnis zur Linie. Deshalb bestimmt er auch die Ebene abgesondert von der Fläche nach Analogie der Geraden; denn er erklärt diese als gleich mit dem Zwischenraume zwischen den Punkten, und ebenso nehme auch die Ebene, wenn zwei Geraden gegeben seien, den gleichen Raum ein mit dem zwischen den Geraden gelegenen."[1])

„Manche könnten auch sagen, sie sei die kleinste von Flächen, welche dieselben Grenzen haben ..., und so wird man alle Definitionen der Geraden auf die Ebene übertragen können, indem man nur das genus ändert."

Majer geht in seiner Besprechung besonders auf die Vertauschung von genus und species näher ein, „die sich leider auch in einer Menge der neuesten Lehrbücher der Geometrie findet." Ich werde in dem Kapitel, das der Geraden gewidmet ist, ausführlicher auf die vorliegende Abhandlung eingehen.

Damit sollen die Zitate über die Ebene ihr Ende finden. Es hat sich gezeigt, dafs im wesentlichen die Definition der Ebene sich auf den Begriff der Geraden stützt,[2]) während er nach unserer Ansicht nur aus dem Begriff der Richtung

---

[1]) Vergl. Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft, besprochen in H. Z. IX, p. 23—28. — Danach definiert Funcke die Ebene „als diejenige Fläche, welche eine Gerade bei der Drehung um einen ihrer Punkte beschreibt, wenn sie bei kleinster Drehung in eine andere Lage gelangen soll." Killing empfiehlt das Buch sehr.

[2]) Man vergleiche J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. H. Z. I. p. 232:

„Der Begriff Ebene hat ursprünglich mit geraden Linien nichts zu thun. ... Wenn nun in der Definition vorausgesetzt wird, dafs sich in jedem Punkte nach jeder Richtung gerade Linien ziehen lassen, so ist dies zwar richtig, darf aber nicht der Erklärung von Ebenen vorausgeschickt werden, sondern müfste als Grundsatz auf dieselbe folgen."

„Genau genommen erscheint übrigens die Definition unbestimmt. da sich über den Kugelmantel ganz dasselbe sagen liefse, wenn man nur, was durchaus nicht widersinnig wäre, die keineswegs deutlichen Worte „auf einerlei Art" (in Euklids Definition) in entsprechender Weise auffassen wollte."

hervorgeht oder nur aus demjenigen des Abstandes, den beiden Grundbegriffen a priori, die ich als unmittelbare Begriffe a priori bezeichnen möchte, während Ebene und Gerade als mittelbare Begriffe a priori aufzufassen sind.[1])

V. Kapitel.

Die Gerade.

Ebenso wie die Ebene ist auch die Gerade eine a priori im menschlichen Geiste vorhandene Vorstellung, ein Grundbegriff a priori. Ja, wenn zwischen diesen Grundbegriffen eine Unterscheidung gemacht werden könnte, so würde der Geraden eine höhere Apriorität zugesprochen werden müssen, da der Begriff der Ebene in der That sich auch aus demjenigen der Geraden ableiten läſst. Eine Definition der Geraden erscheint — nach dem Urteil Vieler — für den Unterricht unnötig, ja unmöglich, es genüge an die bekannte Vorstellung anzuknüpfen, dieselbe durch passende Übungen zu vollem Bewuſstsein zu bringen. Nach meinen Auseinandersetzungen in Kapitel III. würde ich — analog der Definition der Ebene — für die Definition der Geraden folgende Fassung vorschlagen: Die Gerade ist diejenige Linie, die *in ihrer Gesamtheit* nur eine Dimension hat (nur nach einer Dimension ausgedehnt ist). — Dabei bleibt das schwere Bedenken, das auch schon bei der Definition der Ebene berührt wurde, daſs sich die Definition auf einen neuen Begriff, denjenigen der Dimension stützt, der für sich wiederum eine Erklärung fordert.

Die gröſste Anzahl der üblichen Definitionen knüpft an den Begriff der Richtung an — und es ist offenbar, daſs hierzu eine gewisse Berechtigung vorhanden —: die übrigen Eigenschaften der Geraden, besonders die, die kürzeste zu sein, werden dann als Axiome, meist unvermittelt, hinzugefügt.[2])

---

[1]) Man vergleiche das folgende Kapitel.

[2]) Ciala in H. Z. II. p. 43 will die Definitionen der räumlichen Gebilde auf die Ursachen der Bewegung, die Kräfte zurückgeführt wissen.

Die Schwierigkeit, die bei der Definition der Geraden auftritt, liegt eben in dieser doppelten Wesenheit: die übrigens auch bei anderen räumlichen Gebilden zu beachten ist und deren Nichtberücksichtigung unvollkommene Erklärungen veranlafst hat. Bei der Betrachtung der räumlichen Gebilde als selbständiger Formen müssen wir den umgekehrten Weg einschlagen, als bei ihrer Ableitung aus der Grenzbetrachtung. Sollen die Definitionen besonderer Arten von Flächen oder Linien gegeben werden, so ist es passend — insofern wir die besondere Art nicht als einen Grundbegriff a priori anzuerkennen vermögen — vom Punkt auszugehen und von diesem her zu einer Definition zu gelangen. Selbstverständlich ist, dafs dabei gewisse Grundbegriffe a priori vorhanden sein müssen, auf die die Definition zurückgreift und sich stützt. Als die Grundbegriffe, auf die sich die Definition der räumlichen Gebilde zu stützen hat, bezeichne ich zwei: 1) den Begriff der Richtung; 2) den Begriff des Abstandes. Beide sind unmittelbare Grundbegriffe a priori und völlig gleichberechtigt. Setzen wir in Gedanken zwei Punkte, so ist damit sofort auch Richtung und Abstand gesetzt. Dabei wird man von folgender Betrachtung auszugehen haben: Wird ein Punkt gesetzt, so giebt es von ihm aus nach unendlich vielen Richtungen und ebenso in unendlich vielen Abständen Punkte. Setzt man dann noch einen zweiten Punkt, so ist damit sofort eine ganz bestimmte Richtung, nämlich von dem gegebenen Punkte aus nach dem zweiten hin, aber auch diejenige vom zweiten nach dem ersten Punkte gegeben: ebenso der Abstand des zweiten Punktes vom ersten, aber auch der Abstand des ersten vom zweiten. Durch einen zweiten Punkt wird also sofort eine bestimmte Richtung festgelegt und ebenso ein bestimmter Abstand. Wir werden weiter unten sehen, dafs das Umgekehrte

Es heifst: „Wir definieren nun: Bewegt sich ein Punkt unter dem Einfluss einer Momentankraft und keiner anderen Kraft aufserdem, so sagt man von ihm, er bewege sich in einer „geraden" Linie und habe überall dieselbe Richtung. — „Richtung" und „gerade" sind also ungezwungen nur zu erklären mit Zuhilfenahme des Kraftbegriffs, ohne ihn behalten jene wichtigen Grundbegriffe immer etwas Dunkles." — Die Entwicklung der Haupteigenschaften sei bei dieser Definition leicht.

nicht der Fall ist, sondern dafs, wenn ein Punkt gegeben ist, nach einer bestimmten Richtung unendlich viele Punkte möglich sind und ebenso in einem bestimmten Abstand unendlich viele Punkte. Zu der Bestimmung eines bestimmten Punktes sind sowohl eine bestimmte Richtung als auch ein bestimmter Abstand nötig. Wir haben es also sofort mit einer zweifachen Wesenheit in doppelter Beziehung zu thun. Erstens treten die Begriffe Richtung und Abstand gleichzeitig in Evidenz, zweitens ist aber auch jeder von diesen wiederum in doppelter Hinsicht zu betrachten. Dafs die beiden Abstände einander gleich und dafs wir infolge dessen schlechtweg vom Abstande sprechen, thut der angestellten Betrachtung keinen Eintrag; übrigens wird das Axiom der Umkehrbarkeit, das sofort in dieser Grundbetrachtung zu Tage tritt, als solches von vielen Seiten bestritten.[1]) Hier möge zur Erläuterung der vorgetragenen Meinung noch ein Beispiel seine Stelle finden, das erst später ausführlich behandelt werden soll. Betrachten wir den Winkel, so tritt auch bei diesem Begriff diese doppelte Wesenheit der Richtung und des Abstandes hervor. Die beiden Richtungen gehen hier von einem gemeinsamen Punkt aus, dagegen ist der Drehungsweg — es sei gestattet, diesen kurzen Ausdruck anzuwenden — ein doppelter je nach dem Sinn der Drehung und im allgemeinen auch ein der Gröfse nach doppelter. Doch kehren wir zu der Betrachtung der Geraden zurück. Fafst man die Gesamtheit aller Punkte, die von einem Punkte aus nach derselben Richtung hin liegen, zusammen, so hat man als den Träger dieser Punktreihe den Strahl, fafst man die Punkte zusammen, die vom gegebenen Punkte aus denselben

---

[1]) „Die nicht-euklidische Geometrie nämlich, deren kritischen Leistungen auch der konservativste Geometer seinen Beifall nicht versagen sollte, hat dadurch ein neues bedeutsames Ferment in die Erörterung gebracht, dafs sie die Eigenschaft der Umkehrbarkeit für Ebene und gerade Linie betont. Man mag diese beiden Grundgebilde wie immer aus dem Raumbegriff selbst oder, wie es die verbesserte Methode der Neueren will, aus Kugel und Kreis herleiten, stets erheben sich die allergröfsten Schwierigkeiten bei dem Versuch, zu beweisen, dafs eine mit ungewechselten Endpunkten neben die erste gelegte Strecke durchaus mit jener identisch, also umkehrbar sei.“ Günther, Der Thibautsche Beweis. p. 5.

Abstand haben, so ergiebt sich als Träger dieser Punktreihe der Kreis. Wir haben somit im Strahl und Kreis die beiden aus den Grundbegriffen Richtung und Abstand sich unmittelbar ergebenden Grundgebilde der elementaren Planimetrie.[1]) Betrachtet man den Strahl nun auch auf die Eigenschaft hin, dafs er auch die Richtung vom zweiten Punkte aus nach dem ersten hin enthält und dafs wir vom zweiten Punkte aus wieder nach dieser Richtung hin alle Punkte uns denken können, auch über den ersten hinaus, so ergiebt sich als das Zusammenfassende dieser beiden Strahlen oder entgegengesetzten Richtungen die Gerade als unmittelbarer Grundbegriff a priori, wie ich sie bezeichnen möchte, da sie zu ihrer Erklärung nur Begriffe a priori erfordert, doch aber erst sekundär aus der Betrachtung des Strahles resultiert. Ebenso kommt auch der zweite Grundbegriff a priori in der Geraden zum Ausdruck, da auf ihr der Abstand der Punkte gemessen wird. Indem wir also so die Gerade in qualitativer und quantitativer Hinsicht betrachten und qualitativ auf den Begriff der Richtung, quantitativ auf den Begriff des Abstandes stützen, erscheint sie uns zwar gegenüber den primären Gebilden Strahl und Kreis als ein sekundärer Begriff, immerhin aber doch so eng damit verbunden, dafs wir sie als einen mittelbaren Grundbegriff a priori bezeichnen dürfen.

Für die Auffassung des Strahles als des primären Ge-

---

[1]) Rausenberger a. a. O. Einleitung:

„Suchen wir uns darüber klar zu werden, welche Schwierigkeiten sich einer einheitlichen Entwicklung der Elementargeometrie entgegenstellen. Zunächst wird ein weitgehender Dualismus hervorgerufen durch die Benutzung zweier Fundamentallinien: der Geraden und des Kreises. Die neuere synthetische Geometrie zeigt, dafs durch geeignete Zuordnung von Punkte und Geradensystemen sämtliche Kegelschnitte erzeugt werden können; unter diesen ist der Kreis ein ganz spezielles Gebilde. Trotzdem räumt man ihm den Vorzug vor den übrigen Kegelschnitten ein, in die Elementargeometrie aufgenommen und hier gewissermafsen als gleichwertig mit der Geraden behandelt zu werden." — Rausenberger begründet dann ausführlich, warum auch er für Beibehaltung des Kreises in der Elementargeometrie ist. Meiner Meinung nach zeigt sich der hier berührte Dualismus nicht blofs bei der Geraden und dem Kreise, sondern auch bei der Geraden allein, da sie qualitativ und quantitativ zu erklären ist.

bildes scheint mir übrigens auch der Umstand zu sprechen, der von vielen Autoren bei der Definition der Geraden benutzt wird: dafs nämlich der im homogenen Medium verlaufende Lichtstrahl als Beispiel für die Gerade angeführt wird.

Dafs sich bei der Zugrundelegung der Begriffe Richtung und Abstand übrigens ungezwungen Gerade (resp. Strahl) und Kreis, die beiden Linienarten der elementaren Planimetrie, in analoger Auffassung ergeben und folglich der Kreis nicht als ein zweites dem ersten Gebilde unvermittelt gegenüberstehendes Gebilde eingeführt werden mufs, läfst mich diese Betrachtungsweise für eine besonders berechtigte halten.[1])

Wie in der Geraden eine doppelte Richtung gegeben ist, so auch im Kreise; bei der ersteren handelt es sich dabei um fortschreitende Bewegung, bei dem Kreise um drehende Bewegung, so dafs auch in dieser Beziehung eine Analogie zwischen den beiden Grundgebilden besteht.

Setzen wir zwei Punkte, so ist dadurch sofort auch die Richtung vom einen zum andern und ihr Abstand vorhanden, nicht aber die Gerade: diese müssen wir uns erst durch die beiden Punkte gelegt denken;[2]) also auch ohne dafs die Ge-

---

[1]) Vergl. die vorhergehende Anmerkung.

[2]) Vergl. Hoffmann, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen, in H. Z. III. p. 119.

Nachdem sich Hoffmann sehr scharf über Euklids Definition geäufsert, sagt er: „Der Begriff der geraden Linie wird durch eine Definition im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht klar, da diese nur eine Zusammenfassung von Merkmalen erfordert. Vielmehr verlangt die Definition der Geraden einen Akt psychischer Bewegung, nämlich die Bewegung eines Punktes oder Atombildes zwischen zwei idealen Raumpunkten in unserer Vorstellung. Da diese Bewegung aber mit unmefsbarer Geschwindigkeit geschieht, so wird der Geist dieser Thätigkeit sich nicht mehr bewufst." — Diese Ansicht teilt auch J. Kober in H. Z. III. p. 536: „Gerade und Richtung sind innig verwandte Begriffe, wie ja schon in der Sprache angedeutet ist; „Richtung" kommt her von „recht", sowie directio mit rectus zusammenhängt. Darin ist ausgesprochen, dafs man notwendig bei dem Begriffe „gerade" ebenso wie bei „Richtung" an eine Bewegung denkt, dafs es eine gewaltsame Abstraktion ist, wenn man bei dem Begriffe der geraden Linie die „Bewegung oder andere Thätigkeit" ausschliefst; diese Abstraktion ist zwar begründet, rechtfertigt aber kein neues Wort."

rade gedacht wird, die durch die beiden Punkte bestimmt ist, und ganz unabhängig von ihrer Existenz sind Richtung und Abstand a priori mit den beiden Punkten gegeben. Dies scheint mir ganz besonders den sekundären Charakter der Geraden gegenüber den primären Begriffen Richtung und Abstand zu bestimmen. Umgekehrt können wir uns die Gerade aber nicht etwa denken, ohne dafs Richtung und Abstand als vorhanden angesehen werden.

Dafs die Gerade durch zwei Punkte vollkommen bestimmt ist, oder dafs alle Geraden durch zwei Punkte gedacht zusammenfallen, geht unmittelbar daraus hervor, dafs die Richtung und der Abstand durch zwei Punkte — Ausgangspunkt und Zielpunkt — bestimmt sind. Setzen wir an Stelle des Zielpunktes die Richtung nach ihm von einem Punkt aus, so ergiebt sich, dafs auch durch einen Punkt und eine Richtung eine Gerade qualitativ bestimmt ist, während durch die Richtung allein dies nicht der Fall ist, denn es giebt unendlich viele Gerade, die gleiche Richtung[1]) haben, aber von verschiedenen Punkten ausgehen, wie es unendlich viele Geraden giebt, die zwar von einem Punkt ausgehen, aber nach verschiedenen Richtungen. So sehen wir, dafs zwar die Gerade in gewisser Hinsicht mit dem Begriff der Richtung identisch ist, aber nicht völlig, sondern dafs zur völligen Bestimmtheit der Geraden noch ein bestimmter Punkt, der Ausgangspunkt, gegeben sein mufs: Richtung und Gerade sind daher nicht als identische Begriffe aufzufassen, zumal da in der Geraden ja auch noch die entgegengesetzte Richtung auftritt.

Es sei gestattet auf den Grundbegriff Richtung noch etwas näher einzugehen, obwohl wir uns noch bei der Besprechung des Parallelenaxioms ausführlich mit ihm zu beschäftigen

[1]) Man vergleiche die weiter unten folgenden Betrachtungen über den Ausdruck „gleiche Richtung haben“. Hier ist der Ausdruck im gewöhnlichen Sprachgebrauch aufzufassen. Es sind also unter den hier bezeichneten Geraden parallele Gerade zu verstehen. (Um Mifsverständnissen vorzubeugen, die sich etwa wegen der vorhergehenden Ausführungen einstellen könnten, sei ausdrücklich bemerkt, dafs nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch unter keinen Umständen unter Geraden, die gleiche Richtung haben, solche Gerade verstanden werden dürfen, die dasselbe Ziel haben.)

haben werden[1]) und auch dort erst ihn in seiner vollen Verwendbarkeit bei der Betrachtung mehrerer Geraden in ihrer gegenseitigen Lage kennen lernen werden, ebenso wie dort auch der Begriff Abstand noch eine weitere Anwendung finden wird. Die Ausdrücke „in der Richtung von einem Orte herkommen, in der Richtung auf einen Ort zugehen“ sind für niemand unklar und es ist nur ein volkstümlicher Pleonasmus, wenn gesagt wird „in gerader Richtung auf etwas zugehen“, denn in diesem Falle, da ein Ausgangspunkt da ist, ist die Gerade durch die Richtung völlig bestimmt, Gerade und Richtung identisch.

Es ist hier wohl auch der Ort, auf einige Betrachtungen einzugehen, die sich an den Begriff der Richtung anknüpfen, und die auf eine mifsbräuchliche Anwendung des Begriffes Richtung, die sich unbegreiflicherweise auch in mathematischen Lehrbüchern findet, sich beziehen.[2]) Dabei sollen die oben schon gebrauchten Beispiele aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch beibehalten werden. Der Leser wird sie leicht in die mathematische Sprache übersetzen können, und sie werden dadurch nichts an ihrer Verwendbarkeit einbüfsen.

Gehen zwei Personen von verschiedenen Orten auf einunddenselben Ort zu, so haben sie dasselbe Ziel, aber im allgemeinen nicht dieselbe Richtung; es ist wichtig dieses Fehlers zu gedenken, denn er ist — wie ich schon erwähnt — in der That gemacht worden.[3]) Nur wenn der von dem Ziel weiter

---

[1]) Dort werde ich auch auf die ausführlichen Auseinandersetzungen, die Hoffmann in seinem Artikel „Studien über geometrische Grundbegriffe“ dem Begriff der Richtung widmet, genauer zurückkommen. Hier sei nur auf diesen Artikel ausdrücklich hingewiesen. H. Z. III. 443/452. 523/34.

[2]) Vergleiche die folgende Anmerkung.

[3]) Man vergleiche: Bolze, Über Parallellinien in H. Z. II. p. 335: „Dem deutschen Sprachgebrauche ist folgender Satz vollkommen angemessen: „Mein Freund wird von Stettin, ich werde von Cottbus nach Berlin reisen; wir haben ja dieselbe Richtung.“ Mit Recht macht J. Kober in H. Z. III. p. 535 auf die Inkorrektheit dieses Satzes aufmerksam und weist sie nachdrücklich zurück. — Auch Hoffmann hat sich in H. Z. XVI. p. 339 „über die fast unglaubliche Verwechselung von Richtung und Ziel“ und ebenso in H. Z. XXI. p. 252 sehr scharf aus-

entfernte auf seinem Wege, indem er in der Richtung auf das Ziel geht oder gerades Weges auf das Ziel zugeht, durch den Ausgangspunkt des andern kommt, haben beide Personen dieselbe Richtung oder gleiche Richtung.

Auch auf diese letztere Identität ausdrücklich hinzuweisen, erscheint mir nicht unwesentlich. Denn fast durchweg wird z. B. von parallelen Geraden gesagt, dafs sie gleiche Richtung haben — d. h. aber nach dem allgemeinen Sprachgebrauch identische Richtung.[1]) Dieser Ausdruck ist also nicht nur ungenau, sondern aus dem angeführten Grunde geradezu falsch. Auch in diesem Falle scheint die Verwechselung mit dem gleichen Ziel (dem unendlich fernen Punkt) Veranlassung gegeben zu haben, diesen sprachlichen Fehler zu begehen. Nach meiner Ansicht müfste man sich hier des genaueren Ausdrucks „ähnliche Richtungen" bedienen, während es sich, wenn von Geraden gleicher (d. h. identischer) Richtung die Rede ist, durchaus um zusammenfallende Gerade handelt.

Auch die Ausdrücke „eine Gerade ändert ihre Richtung", „einer Geraden eine andere Richtung geben", „sie in eine andere Richtung bringen" sind falsch und daher entschieden zu verwerfen, da sie zudem geeignet sind, die Vorstellungen über Gerade und Richtung zu verwirren. Es wird sich vielmehr empfehlen, einen Ausdruck zu gebrauchen, wie „eine zweite Gerade von demselben Punkte aus aber in anderer Richtung annehmen." Dadurch wird zugleich auch der fehlerhafte Gedanke vermieden, als wenn die räumlichen Gebilde überhaupt bewegt werden könnten.

Es mögen hier noch einige Betrachtungen ihre Stelle finden, die auf die Analogie von Gerade und Kreis hinweisen.

Nimmt man einen Punkt an, so giebt es unendlich viele Strahlen, die von ihm ausgehen, entsprechend den unendlich vielen Richtungen; ebenso giebt es unendlich viele Kreise, die den Punkt zum Mittelpunkt haben, entsprechend den unendlich

---

gesprochen. (Auf XIX. p. 353 wird verwiesen.) Vergl. auch H. Z. X. p. 416.

[1]) Auch auf diese Frage werde ich gelegentlich der Besprechung des Parallelenaxioms zurückkommen. Man vergleiche Hoffmann, Studien über geometrische Grundbegriffe a. a. O. und H. Z. IV. p. 111.

vielen möglichen Abständen. Kommt ein zweiter Punkt hinzu, so ist ein bestimmter Strahl dadurch charakterisiert, wenn wir auf die Richtung achten, ein bestimmter Kreis, wenn der Abstand das Merkmal ist. Fassen wir dagegen in anderer Weise die zwei gegebenen Punkte als Bestimmungsstücke auf, so ergiebt sich: der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist eine Gerade. Im ersteren Falle liegen die bestimmenden Punkte auf dem Strahl, im zweiten aber nicht auf der Geraden. Während es bei einem festen Punkte unendlich viele zugehörige Kreise giebt, ist durch zwei Punkte eine einzige Gerade bestimmt; solcher Punktpaare, durch die ein und dieselbe Gerade bestimmt wird, giebt es aber unendlich viele. Ähnliche Betrachtungen lassen sich noch in reichem Mafse anstellen, sie werden im Unterricht mit Vorteil verwendet werden können, um von vornherein die beiden Elementargebilde Strahl und Kreis in nahe Beziehung zu setzen. Es wird später noch einmal darauf zurückgekommen werden.

Es folgen nun die Zitate:

August (Berlin 1852): „Wenn der in Bewegung gedachte Punkt seine Richtung nie ändert, so entsteht eine gerade Linie.“[1])

Diese Definition ist zwar genetisch, aber sie definiert nicht den Begriff der Geraden, sondern den Strahl, aufserdem ist sie unvollständig; mit demselben Rechte liefse sich die Definition aufstellen: „Bewegt sich ein Punkt auf seinem Abstand von einem zweiten Punkte (auf der kürzesten Linie), so beschreibt er eine Gerade.“ Es ist merkwürdig, dafs gerade der eine Grundbegriff der Richtung immer zu der Definition der Geraden benutzt ist, während doch mit demselben Rechte der Begriff des Abstandes zu Grunde gelegt werden könnte.

Seiner Definition fügt August dann vier Grundsätze hinzu:

1) Zwischen zwei Punkten im Raume ist nur eine gerade Linie denkbar.

---

[1]) J. Kober, Über die Definitionen in H. Z. I. p. 232: „Was heifst Richtung? Liegt nicht in dem Worte „Richtung“ (vergl. rectus) der Begriff „gerade“? Es ist also wiederum nur durch ein anderes Wort die Tautologie verhüllt.“

2) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Die Länge einer geraden Linie zwischen zwei Punkten bestimmt daher die Entfernung dieser Punkte.[1])

3) Eine gerade Linie, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in derselben.

4) Zwei verschiedene gerade Linien können sich nur in einem Punkte durchschneiden. (Vergl. Grundsatz I.)

Baltzer, Elemente. — Leipzig 1874.

„Die einfachste unter den Linien ist die Gerade, welche eine von einem Punkt ausgehende Richtung (und die entgegengesetzte)[2]) angiebt und nach dieser Richtung unbegrenzt sich weiter erstreckt.“

„Wenn zwei Gerade zwei Punkte gemein haben, so decken sie sich (Axiom von der Geraden);[3]) eine Gerade ist also durch zwei Punkte bestimmt.“

„Der Begriff der Geraden ist vermöge seiner Einfachheit nicht definierbar, Richtung ohne die Gerade unverständlich.[4]) Die alte Definition (Eukl. I.) ‘eine gerade Linie ist diejenige Linie, welche zwischen ihren Punkten gleichmäfsig (ἐξ ἴσου) liegt’ ist an sich dunkel und gewinnt erst Klarheit durch das Axiom ‘zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein’, nach welchem behauptet wird, dafs zwei Gerade sich decken, wenn sie zwei Punkte gemein haben, und dafs eine Gerade ihre Lage nicht ändern kann, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist.[5])

---

[1]) Mit Recht ist von einer Seite gegen diese Fassung des Grundsatzes geltend gemacht worden, dafs durch den Ausdruck „die kürzeste“ eine Vergleichung mit allen möglichen Linien, die durch zwei Punkte gehen können, angedeutet werde, dafs also zur Definition der Geraden man aller anderen Linien bedürfe.

[2]) Das ist eben etwas, was erst sekundär hinzukommt; von vornherein handelt es sich hier nur um eine Richtung und wir müssen daher vom Strahl ausgehen.

[3]) S. meine obigen Ausführungen.

[4]) Das ist nicht richtig. Die Richtung existiert unabhängig von der Geraden. Eine Richtung ohne Gerade wohl denkbar; bei der Geraden denkt man ja auch zwei (entgegengesetzte) Richtungen.

[5]) Auch eine drehende Bewegung ist nicht mehr möglich bei zwei

Der alte Satz: 'Eine Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten' ist auch als Definition vorangestellt worden."

Bartholomäi, Zehn phil. Vorlesungen. — Jena 1860.

„Und wenn die Intelligenz ihre Zahlenreihe durchmustert, so findet sie in derselben ein Vorwärtsschreiten; sie geht von der 1 zur 2, von der 2 zur 3 u. s. w. unaufhaltsam vorwärts. Dabei ist die $(n+1)$te Zahl durch die $n$te von der $(n-1)$ten getrennt, n ist zwischen $(n-1)$ und $(n+1)$; $(n-1)$ ist aufser $(n+1)$, und von $(n-1)$ führt das Vorstellen nach $(n+1)$ nur über n. Das sind aber nichts weiter als Raumvorstellungen, das Aufsereinander und die gerade Linie.[1]) Also das blofse Zählen würde notwendig die räumlichen Vorstellungen der Distanz und der Richtung erzeugen."

Beck (Legendre). — Bern 1842.

Erkl.: „Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zu einem andern."[2])

Grundsatz: „Von einem Punkte zu einem andern kann nur eine gerade Linie gezogen werden."

Becker, J. K., Elemente a. n. Grundlage.[3]) — Berlin 1877.

---

festen Punkten, was gegenüber der öfter vorkommenden falschen Meinung hier ausdrücklich hervorgehoben werden möge.

[1]) Bartholomäi identifiziert also vollständig ohne weitere Auseinandersetzung, ohne jeden Skrupel Gerade und Richtung, denn der Begriff der Distanz wird ohne jede Verknüpfung in die Erklärung hineingezogen.

[2]) Hier haben wir also in der That die oben (s. August) angedeutete Definition der Geraden aus dem Begriff des Abstandes, allerdings in der gerügten Fassung der kürzesten Linie. Vergl. die Anmerkung zu Baltzer und zu Legendre.

[3]) Man vergleiche J. K. Becker, Zu dem Kapitel von den Inkorrektheiten, in H. Z. II. p. 94: „Die Gerade ist, wie jede andere Linie, durchaus nichts als die Grenze einer Fläche"; sie könne aber auch selbständig gefafst werden. Jedem Raumgebilde komme aufser Gestalt und Gröfse

Es wird unterschieden zwischen der durch Anschauung gelehrten Form, d. h. Qualität der Ausdehnung und der Gröfse oder Quantität der Ausdehnung. Dann wird gezeigt, dafs es notwendig zwischen zwei getrennten Punkten eine kürzeste Linie giebt. Nachdem noch eine Reihe von Axiomen und Lehrsätzen aufgestellt ist, folgt der Lehrsatz:

„Der Ort aller Punkte, deren Lage durch ihre Distanz von zwei festen Punkten bestimmt ist, ist eine Linie, die alle ihre Punkte auf kürzestem Wege verbindet."

„Diese Linie heifst gerade Linie oder Gerade."

„Ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden heifst eine geradlinige Strecke, und diese ist das Mafs für die Distanz ihrer Endpunkte." — Es folgt:

Lehrsatz: „Zwei beliebige Punkte des Raumes können nur durch eine einzige Linie von kürzester Länge verbunden werden und diese ist die sie verbindende geradlinige Strecke."

Hieran schliefsen sich noch folgende Sätze:

„1) Zwei gerade Linien fallen ganz zusammen, wenn sie zwei Punkte gemein haben.

2) Verschiedene Gerade können höchstens einen gemeinschaftlichen Punkt haben.

3) Geradlinige Strecken sind kongruent, wenn die Endpunkte der einen dieselbe Distanz haben wie die der anderen.

4) Drei Punkte liegen immer und nur dann in gerader Linie, wenn die Distanz zweier gleich ist der Summe oder Differenz ihrer Distanzen vom dritten.

5) Die Distanz der Endpunkte einer geradlinigen Strecke ist proportional ihrer Länge.

6) Ein Punkt, der sich auf einer geraden Linie immer

---

auch das Merkmal der Stellung zu. „Dieses wesentliche Merkmal der Geraden findet man nun in den meisten Lehrbüchern der Geometrie zum grofsen Nachteil der Anschaulichkeit gar nicht erwähnt. Wo er in der Planimetrie auftritt, ist er meistens durch das gänzlich unpassende Wort Richtung ausgedrückt." Zwischen diesen beiden Begriffen sei scharf zu unterscheiden. „Auf jeder Geraden von bestimmter Stellung kann ein Punkt sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen, und diese ändern sich, sobald die Linie ihre Stellung ändert, sind aber darum keineswegs mit ihr identisch."

nach derselben Seite[1]) hin fortbewegt, entfernt sich von seiner Anfangslage über alle Grenzen, ohne sich ihr jemals wieder zu nähern.

7) Jeder Teil einer Geraden kann auf derselben oder auf einer anderen Geraden so fortgerückt werden, dafs er immer ganz in derselben liegt.

8) Wird eine Gerade gezwungen, durch zwei feste Punkte zu gehen, so kann sie nur noch in sich selbst bewegt werden, d. h. so, dafs zwar alle Punkte fortschreiten, aber immer in dem von der Geraden ursprünglich eingenommenen Orte verbleiben. Werden zwei ihrer Punkte festgehalten, so kann sie ihre Lage nicht mehr ändern.

9) Eine geradlinige Strecke kann auf doppelte Art so gelegt werden, dafs sie dieselben Punkte verbindet und in ihrer Gesamtheit dieselbe Stelle einnimmt.“

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. II. 1. — Berlin 1877.

„Sieht man von einem Punkte aus nach einem andern Punkte, so sieht man ihn in einer bestimmten Richtung (nach rechts u. s. w.) und man sagt, der beobachtete Punkt liege von dem Punkte aus, von dem man ihn sieht, in dieser Richtung.“

„Sieht man dagegen von dem beobachteten Punkte aus nach dem Punkte zurück, von welchem man ihn beobachtet hatte, so sieht man nach der entgegengesetzten Richtung.“

„Alle Punkte, welche von einem bestimmten Punkte aus in einer bestimmten Richtung oder in der dieser entgegengesetzten liegen, befinden sich mit demselben auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten Linie, welche gerade Linie oder Gerade heifst.“

„Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gehen, also auch nur eine Strecke begrenzt werden. Diese ist kürzer, wie jede andere Linie zwischen denselben Endpunkten.“ (Axiom.)

---

[1]) Ich würde den Ausdruck „nach derselben Richtung hin“ vorgezogen haben, obwohl hier ja ein Mifsverständnis fast ausgeschlossen ist.

Behl, — vergl. August.

Fabian[1]) knüpft die Betrachtung der Linien an die Betrachtung von Drahtmodellen,[2]) diskutiert genau die Beobachtungen, die man anstellen kann, wenn sich das Drahtstück um zwei festgehaltene Punkte dreht und sagt zum Schlufs: „Die wenigsten Merkmale würde nun die Gestalt eines Drahtes bieten, dessen sämtliche Punkte in gleicher Weise sich verhielten, also nach Art der Endpunkte sich gar nicht von ihrer Anfangslage entfernten. Einen solchen Draht, der sich durch die gröfstmögliche Einfachheit der Gestalt auszeichnet, werden wir einen geraden oder geradlinigen nennen."[3])

---

[1]) Wird kein Titel angegeben, so sind die Werke gemeint, aus denen schon in früheren Kapiteln zitiert worden ist. Nur da, wo mehrere Werke desselben Verfassers zitiert werden, schien es notwendig, den Titel wieder anzuführen.

[2]) Sickenberger sagt in seiner Rezension H. Z. VII. p. 297:

„Endlich aber habe ich auszusetzen, dafs der Herr Verfasser seinen Grundsatz, nur stufenweise zur Abstraktion vorzuschreiten, an mehreren Stellen verleugnet. Ich nenne als Beispiel die Entwicklung des Begriffes der geraden Linie . . . ." So sehr gerade diese beiden Entwicklungen sich durch Klarheit und Eleganz auszeichnen, so möchte ich doch einem umgekehrten Verfahren den Vorzug erteilen. Ich glaube z. B. durchaus nicht, dafs das Messen krummer Linien, welches der Verfasser durch succesives Aufeinanderlegen der Punkte („ohne Gleitung") bewirkt, primärer ist als das Messen geradliniger Strecken, von einigen Bedenken gegen die wissenschaftliche Strenge dieser Messungstheorie abgesehen." Im übrigen wird das Buch sehr gelobt.

[3]) Vergl. J. Kober, Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe, in H. Z. I, p. 231:

„Diese Definitionen sind nur Verbesserungen der Euklidischen. Es gelten also über sie im ganzen dieselben Bemerkungen. Aber noch mehr! Dem Anfänger dürfte schwerlich einleuchten, dafs die Gerade überhaupt in zwei Punkten festgehalten werden mufs, um ihre Lage zu behaupten, da schon ein bedeutendes Abstraktionsvermögen dazu gehört, um zu begreifen, dafs ein Körper (oder Linie) sich frei drehen kann, wenn er in einem Punkte festgehalten wird. Wer dieses Vermögen besitzt, ist längst über den Begriff der geraden Linie im Reinen.

Wie kann man überhaupt den so einfachen Begriff der geraden Linie durch einen so viel komplizierteren, wie der der Drehung um zwei Punkte ist, erklären wollen."

Kober spricht darin ganz meine Ansicht aus, wie aus verschiedenen meiner Anmerkungen hervorgeht. Man wolle sich da, wo diese Drehungserklärung vorkommt, dieses Zitat ins Gedächtnis zurückrufen.

Es knüpfen sich daran noch eine Anzahl von Beobachtungen, die zu den Axiomen der geraden Linie führen.

Féaux — Paderborn 1882 — giebt die gewöhnliche genetische Definition und fügt hinzu: „Da nun das Beibehalten einer einmal angenommenen Richtung sich nur auf eine Art bewerkstelligen läſst, das Ändern der Richtung dagegen auf unzählige verschiedene Weisen geschehen kann, so erhellt, daſs es nur eine Art von geraden ... Linien giebt."

Gauſs.

„Die Linie, in welcher alle Punkte liegen, die bei Drehung eines Körpers (eines Teiles des Raums) unter Festhaltung zweier Punkte derselben ihre Lage unverändert beibehalten, heiſst eine Gerade (gerade Linie)."[1])

„...; es giebt nur eine Gerade, welche zwei bestimmte Punkte enthält."[2])

Heger, Leitfaden. — Breslau 1882.

„Ein Körper, von welchem zwei Punkte A und B festgehalten werden, kann sich noch bewegen."

„Die Punkte einer Linie des Körpers ändern bei dieser Bewegung ihre Lage nicht. Diese Linie ist durch die beiden festgehaltenen Punkte bestimmt. Man nennt diese Linie gerade Linie."[3])

---

[1]) Gerade diese Erklärung der Geraden hat in neuerer Zeit sich, wie es scheint, viele Freunde erworben. Und doch möchte ich behaupten, daſs gerade bei dieser Erklärung der Begriff der Geraden vorausgesetzt ist, wenn auch unbewuſst; auch die Eigenschaft der Geraden durch zwei Punkte bestimmt zu sein liegt bei dieser Definition schon zu Grunde. Es ist ein circulus.

[2]) Auch das ist genau genommen nicht richtig; es giebt unendlich viele Gerade, welche zwei bestimmte Punkte enthalten, aber sie fallen vollständig zusammen, sind identisch. Daher die Möglichkeit überhaupt des Aufeinanderlegens von Figuren.

[3]) Wie ich schon an andrer Stelle bemerkt habe, liegt nach meiner Ansicht bei dieser Erklärung der Begriff der Geraden zu Grunde. Man könnte daher umgekehrt die Gerade dazu benutzen, um zu zeigen, welche

Hieran schliefsen sich noch einige Betrachtungen über die Eigenschaften der Geraden und die Kombination von zwei Geraden.

Heinze, Elem.-geom. — Berlin 1877.

„Sind zwei Punkte gegeben, so ist die Zusammenfassung aller Punkte, die von dem einen aus vor dem andern liegen, die geometrische gerade Linie.“[1])

Es folgen noch eine ganze Reihe von Bemerkungen, die recht wohl geeignet sind, den Begriff der Geraden und ihre Eigenschaften zu verdeutlichen resp. dieselben aus der Anschauung zu entwickeln.

Henrici und Treutlein. — Leipzig 1881.

„Die einfachste unter allen Linien ist die gerade Linie oder Gerade.“[2])

„Axiom der Geraden: Durch zwei Punkte geht immer eine, aber nur eine einzige Gerade, oder: Wenn zwei Gerade zwei Punkte miteinander gemeinsam haben, so fallen sie in eine einzige zusammen d. h. sie decken einander in allen ihren Punkten.“[3])

„Wählt man auf einer Geraden einen Punkt A als Ausgang, einen andern B als Ziel der Bewegung, so wird durch diese fortschreitende Bewegung eine Richtung bestimmt, und nur im Gedenken an diese Bewegung eines Punktes spricht man auch von der Richtung einer Geraden.“

Hoch, a. a. O.

„Ein Punkt hat bei dem Beginn seiner Bewegung die

Punkte bei der Drehung ihre Lage nicht ändern. Übrigens ist gerade bei dieser Definition die Gefahr sehr grofs, an Stelle der Geraden sich einen sehr dünnen langen Körper zu denken.

[1]) Diese Definition ist identisch mit derjenigen, die aussagt, dafs man die Gerade in eine solche Lage bringen kann, dafs sie als Punkt erscheint. Beide gehen, wenn auch unausgesprochen, auf den Lichtstrahl als das gemeinsame zurück.

[2]) Man vergleiche die an früherer Stelle (Kapitel IV) über den Begriff der Einfachheit aufgestellten Betrachtungen.

[3]) Die zweite Fassung verdient als die präzisere den Vorzug.

Auswahl unter einer unendlichen Menge von Bewegungen. Das die unendlich vielen Bewegungen Unterscheidende heifst Richtung.[1]) Die entgegengesetzte Richtung ist jene, welche angiebt, wie man von dem bei der Bewegung erreichten Punkt wieder zurückkommen könnte zum Ausgangspunkte."

„Von der entgegengesetzten Richtung wohl zu unterscheiden ist die Bedeutung der verschiedenen Richtung."

„Alle Punkte, welche in einer bestimmten Richtung oder in der entgegengesetzten liegen, liegen in einer geraden Linie oder Geraden. Eine Gerade ist demnach jene Linie, welche, in zwei Punkten festgehalten, ihre Lage nicht ändern kann. (Staudt, Geometrie der Lage.)"

Hoffmann, Vorschule. — Halle 1874.

„Sie (die Gerade) hat drei wesentliche Eigenschaften: Länge, Lage, Richtung."

Alle drei Eigenschaften werden ausführlich besprochen und durch eine grofse Reihe gut gewählter Beispiele veranschaulicht. Der die Richtung behandelnde Paragraph wird eingeleitet durch den Satz:

„Während jeder Geraden nur eine Länge und nur eine Lage zukommt, hat sie dagegen zwei Richtungen."[2])

„Der bewegte Punkt strebt während der Bewegung einem Ziel zu, und hat dieses Ziel sozusagen stets im Auge. Dieses Streben und Festhalten (Fixieren) des Ziels, dieses unverwandte Hinsehen aufs Ziel heifst Richtung."[3])

„Die Gerade behält in sich immer ihre Richtung.

Junghans, Lehrbuch der elementaren Geometrie. — Berlin 1879. — giebt die Euklidsche und daneben auch die genetische Definition. Dann stellt er die beiden Grundsätze auf:

---

[1]) Dieser Ausdruck ist zum mindesten nicht sehr glücklich gewählt.

[2]) Vergl. Hoch. Es wäre wohl auch hier nicht unpassend gewesen, diese beiden Richtungen als entgegengesetzte zu bezeichnen. Auch der Ausdruck „die Gerade hat zwei Richtungen" ist kein glücklicher.

[3]) Vergl. die obigen Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

„1) Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich."

„2) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten."

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

„Der Begriff der geraden Linie und der Richtung,[1]) (sowie die nahe verwandte Ebene) gestatten wegen ihrer Einfachheit keine völlig befriedigende Definition."

„Ein bewegter Punkt beschreibt eine gerade Linie, wenn er die anfängliche Richtung beibehält."

Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie I. — Halle 1889. — (vergl. auch dessen Vorschule) geht von dem Grundsatz aus (nachdem er die genetische Definition gegeben): „Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte," ein Grundsatz, der nach ihm von Archimedes herrührt.

Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882. — giebt den Begriff der Geraden aus der Betrachtung der Drehung und fügt dann hinzu: „Eine Gerade giebt eine und nur eine Richtung an."[2])

Kries, L. d. r. M. — Jena 1817.

„Die Vorstellung der geraden Linie gründet sich unmittelbar auf die Vorstellung der Ausdehnung[3]) und kann daher

---

[1]) „Man denke bei dem Worte Richtung an die Himmelsgegenden; doch ist zu beachten, dafs der Begriff „Richtung" mit dem Begriff „gerade" zusammenfällt." Wie oben gezeigt ist, handelt es sich aber hier nicht um eine völlige Identität, so dafs also in dieser Bemerkung zu viel gesagt ist: ein Zusammenfallen der beiden Begriffe ist in der That nicht richtig.

[2]) Dies ist entschieden nicht richtig, denn in der Geraden sind zwei Richtungen, die ursprüngliche und die ihr entgegengesetzte, enthalten.

[3]) Dies ist mir nicht völlig klar: soll mit der Ausdehnung die Richtung gemeint sein oder enthält dieser Satz das Axiom unseres Weltenraumes, das aussagt, dafs er ein ebener Raum ist.

nicht weiter erklärt werden. Alle Erklärungen, die man von ihr giebt, schliefsen entweder schon den Begriff der geraden Linie in sich oder setzen ihn in der That voraus. Es ist daher auch nur eine einzige Art gerader Linien möglich."

„Eine gerade Linie unterscheidet sich von den andern nur durch ihre Gröfse.[1]) Sie ist daher auch durch ihre Gröfse bestimmt. Andere Eigenschaften bietet sie, für sich allein und ohne weitere Bedingungen betrachtet, nicht zur Untersuchung dar."

Kruse, Elemente der Geometrie I. — Berlin 1875. — fügt seiner Erklärung der Geraden, die sich auf die Drehung stützt,[2]) hinzu:

„Diese Begriffsbestimmung rührt nach G. W. Krafft (Institut. geom. subl. Tub. 1753. p. 2) von F. C. Maier her; nur dafs dieser die Endpunkte als feste Punkte annahm. Vergl.

---

[1]) Hier handelt es sich um die ungenaue Ausdrucksweise früherer Zeit, da man gerade Linie und Strecke noch nicht zu unterscheiden für nötig fand. Hoffentlich wird dieser Unterschied in den Lehrbüchern jetzt immer gebührend berücksichtigt, nachdem einige Autoren mit gutem Beispiel vorangegangen.

[2]) Scherling sagt in seiner ausführlichen Besprechung des Kruseschen Werkes in H. Z. VII. p. 212 f auf Seite 213: „Die gerade Linie wird definiert als eine „Linie, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich um zwei ihrer Punkte dreht." So einfach diese von F. C. Maier herrührende Definition ist (sie war doch im wesentlichen schon im Altertum bekannt), so wissen wir sie nicht recht in Einklang zu bringen mit der im vorausgehenden § gegebenen Erklärung der drehenden Bewegung, bei welcher ein Punkt seine Stelle nicht verläfst, während andere Punkte desselben Raumelements nach anderen Stellen rücken. Jedenfalls hätte in dem angezogenen § 3, 2 noch erwähnt werden müssen, dafs auch zwei oder mehrere Punkte zugleich fest bleiben könnten. Worpitzky umgeht diese Definition, indem er schlankweg diejenige Linie, welche bei der Drehung einer Figur um zwei feste Punkte in Ruhe bleibt, also die Drehungsaxe, eine gerade Linie nennt. Uns scheint die Sache e contrario recht klar zu werden, indem man zuerst die krumme Linie definiert, etwa so: Wenn eine feste Linie um zwei feste Punkte gedreht wird und dabei alle übrigen Punkte ihre Stelle verändern, so heifst sie eine krumme Linie, ändern dagegen bei solcher Drehung die übrigen Punkte ihre Stelle nicht, so heifst sie eine Gerade." Mir scheint, es werde wenig dadurch gewonnen.

J. W. Camerer: Euclidis elem. graece et latine. Berolini 1824. I. p. 8. Auch K. F. Gaufs bediente sich ihrer (H. B. Lübsen: Elementargeometrie. Hamburg 1855. S. 11). Vergl. Leibnizens math. Schr. V. S. 185.

Kunze, L. d. G. I. — Jena 51. — fügt der Euklidschen Definition drei Anmerkungen hinzu, von denen die ersten beiden hier angeführt werden sollen:

Anm. 1.: „Die gerade Linie ist ihrer Art nach nur eine; der krummen, etc. Linien giebt es unzählig viele."

Anm. 2.; „Euklides sagt: eine gerade Linie ist diejenige, welche (zwischen) den in ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt. Diese Erklärung, die ziemlich dunkel ist, haben einige so gedeutet, dafs bei einer geraden Linie, wenn man sie um zwei in ihr angenommene feste Punkte herumdreht, alle Punkte ihren Ort unverändert beibehalten.[1]) Man hat noch verschiedene andere Erklärungen der geraden Linie, alle aber setzen im Grunde voraus, dafs man bereits wisse, was eine gerade Linie sei; sie sind nur als blofse Erläuterungen eines an sich bekannten und gemeinen Begriffs anzusehen."

Diesen Ausführungen fügt Kunze die übrigen Eigenschaften der geraden Linie als Grundsätze hinzu. Zu dem Grundsatz: „Die gerade ist kleiner als jede andre Linie, die mit der geraden dieselben Endpunkte hat,"[2]) wird der Zusatz gemacht: „Daher ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten die rein anschauliche Vorstellung der Entfernung oder des Abstandes der beiden Punkte von einander." Kunze fügt noch in einer Anmerkung hinzu, dafs Euklid diesen Satz nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz aufstelle und beweise „mit

---

[1]) Eine Gerade, die in zwei Punkten fest ist, ist überhaupt fest, und der Gedanke, dafs sie sich in sich selbst drehen könne, mufs als ein grundfalscher energisch zurückgewiesen werden. So wenig wie mit der Vorstellung des Punktes überhaupt der Begriff der Bewegung zu verbinden möglich ist, — wir könnten in der That den Punkt als die absolute Ruhe bezeichnen — so wenig ist an irgend eine Bewegung der Geraden zu denken, wenn zwei Punkte fest sind.

[2]) Dieser Erklärung steht das schon erwähnte Bedenken entgegen, dafs zu der Erklärung der Geraden demnach alle anderen Linien herbeigezogen werden.

Weitläufigkeiten und Annahmen, die mindestens keine gröfsere anschauliche Klarheit haben, als der einfache Satz selbst." Es heifst weiter:

„Die Forderung, alles zu beweisen, was sich noch irgend beweisen lasse, scheint hier mehr von philosophischem als von geometrischem Interesse zu sein. Archimedes, der gröfste Geometer des Altertums, sagt daher ohne Bedenken: ich nehme an, dafs unter solchen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade die kleinste sei."

Legendre ed. Crelle. — Berlin 1844. — stellt den Grundsatz: „Die gerade Linie ist der kürzeste[1]) Weg von einem Punkt zum andern" als Erklärung an die Spitze[2]) (III.) und giebt später unter den Grundsätzen: „Von einem Punkt zum andern kann nur eine gerade Linie gezogen werden" (4) und als Lehrsatz (3): „Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur eine und dieselbe gerade Linie."

Dieser Satz wird ausführlich bewiesen (mit Hülfe von Winkelsätzen). Crelle bemerkt dazu: „Bei der obigen Erklärung der geraden Linie scheint dieser allerdings stringente Beweis möglich und nötig."

Lieber und von Lühmann geben die genetische Definition mit Hülfe des Richtungsbegriffes und stellen die Eigenschaften der Geraden als Grundsätze auf.

---

[1]) Vergl. Gilles, Bedenkliche Richtungen in der Mathematik. — H. Z. XI. p. 5—24. — p. 20: „Untersuchen wir daher die Definition der Geraden. Wenn man als Begriffsbestimmung mit Kant annimmt: „Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten", so ist nach zwingenden Denkgesetzen doch gemeint „von allen möglichen Linien zwischen den zwei Punkten," und es ist also der logische Unfug nicht gestattet, auch auf der Kugeloberfläche oder auf der Pseudosphäre die kürzesten Linien Geraden zu nennen." (Das geschieht auch nicht; sie werden geradeste genannt. D. Verf.)

[2]) J. Kober, Über die Definitionen etc. in H. Z. I. p. 232: „Diese Definition giebt gleichfalls nicht den ursprünglichen Begriff der Geraden, sondern eine nur noch entferntere Ableitung als die Euklidische (? D. Verf.); ihr Inhalt mufs daher als Lehrsatz, oder vielmehr als Grundsatz, aber nicht als Definition angeführt werden."

Liese, Elementar-Mathematik I. — Berlin 1875. — Desgleichen.

Milinowski nimmt die Gerade als Grundgebilde der Geometrie; ihre Eigenschaften werden einfach angegeben.

Mink.

„Der Begriff der geraden Linie oder der Geraden ist ein einfacher, eine Erklärung derselben daher nicht möglich, aber auch einer solchen nicht bedürftig. Die Gerade giebt die von einem Punkte ausgehende Richtung an.“[1])

E. Müller, Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869.

Nachdem Müller im Vorwort sich gegen die übertriebene Sucht zu definieren ausgesprochen, fügt er folgende Definitionen der geraden Linie mit Bemerkungen hinzu:

„„Eine Linie ist gerade, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt.““

„Liegt nicht etwa auch die Kreislinie zwischen ihren Punkten auf einerlei Art? Auf welcherlei Art liegt nun die eine und auf welche die andere Linie?“[2])

„„Eine Linie heifst gerade, wenn jedes beliebige Stück derselben mit zwei beliebigen Punkten, irgendwo und irgendwie auf dieselbe gelegt, mit ihr zusammenfällt.““

„Irgendwie? Was heifst das?“

„„Diejenige Linie ist gerade, welche zwischen ihren Endpunkten durchaus dieselbe Lage hat.““

„Wenn die Linie aber unendlich ist? Was heifst durch-

[1]) Besser wohl: eine bestimmte unter den unendlich vielen von einem Punkt ausgehenden Richtungen. Auch fehlt die Erwähnung der zugleich gegebenen entgegengesetzten Richtung.

[2]) Dies Beispiel pafst (wenn man sich allerdings mehr an den Sinn, als an die Worte hält) doch wohl nicht, denn zwischen zwei Punkten können wir uns unendlich viele Kreisbogen denken; es existiert doch nicht etwa nur ein Kreis! Der Begriff der Einfachheit in der Vorstellung der Geraden wird hier in etwas andrer, allerdings nicht glücklicher Form betont. (Dies soll meiner Meinung nach mit dem „auf einerlei Art liegen“ gemeint sein.)

aus dieselbe Lage haben, wenn die Lage nirgend eine Definition gefunden?"

„„Diejenige Linie ist gerade, welche in allen ihren Punkten einerlei Richtung hat; oder welche die anfängliche Richtung immer beibehält, wie weit man (?) in ihr auch fortgeht (?).""

„Wäre denn nicht vorher die Richtung zu definieren gewesen?"

„„Die Gerade ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.""

„Mischt diese Definition nicht ein fremdartiges Moment ein, das der Quantität? Und auf welche Weise soll unter den unendlich vielen Wegen, welche zwischen zwei Punkten möglich sind, der kürzeste ermittelt werden? Will man messen? Womit denn? Die Grundeigenschaft der Geraden, welche jeder Handwerker zur Prüfung der Richtigkeit des Lineals, d. h. einer materiellen Geraden anwendet, haben die Mathematiker übersehen, obschon sie dieselbe unzähligen Beweisen ihrer Sätze zu Grunde legen."

Und nun zur Definition E. Müllers selbst:

„Eine Linie heifst gerade Linie oder Gerade schlechtweg, wenn sie von der Beschaffenheit ist, dafs jede sie enthaltende Ebene auf ihren beiden Seiten in ihrer ganzen Ausdehnung nach den beiden entgegengesetzten Gegenden von einerlei Beschaffenheit ist, und dafs die beiden Seiten mit den zugehörigen Ebenenteilen oder ohne dieselben miteinander vertauscht werden können. Da aber eine Linie als gemeinschaftliche Grenze zwischen den Ebenenteilen auf beiden Seiten als zweifache erscheint, so werden zwei Geraden und die auf beiden Seiten der Geraden befindlichen Ebenenteile mit jeder Seite und nach jeder Gegend hin dergestalt aufeinander gelegt werden können, dafs sie wieder nur eine Gerade und eine Ebene bilden. Jeder der beiden Ebenenteile zu beiden Seiten einer Geraden ist dem andern gleich, also die Hälfte der ganzen Ebene oder eine Halbebene."[1])

---

[1]) Zu meinem lebhaften Bedauern kann ich mich mit der hier von dem hochgeschätzten Verfasser gegebenen Definition der Geraden nicht befreunden; keinesfalls ist sie im Unterricht verwertbar. Wie aus den vorhergehenden Bemerkungen Müllers hervorgeht, weist er den Begriff des „Abstandes" als ein „fremdartiges Moment" vollständig zurück.

„Welche Definitionen der Geraden die einzelnen Geometer auch gegeben haben, jeder ohne Ausnahme kommt auf diese Eigenschaft als die wesentliche zurück und kann ohne sie die geometrischen Fundamentalsätze der Kongruenz teils nur mangelhaft, teils gar nicht beweisen. Alles Klappen und Schwenken der durch Gerade bestimmten Gebilde setzt diese Definition voraus.“

Aus dieser Definition folgt dann, dafs zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist 1) wegen der Kongruenz der Halbebenen und 2) „weil sonst die Punkte der einen sich nicht alle selbst entsprechen würden, wenn die der andern es thun.“

„Dies sich selbst Entsprechen der Punkte einer Geraden, welche die Ebene in zwei Halbebenen teilt, ist der Grund, weshalb man eine Halbebene um die Gerade als Axe drehen kann. Die Axe einer Drehung kann nur eine Gerade sein.“

H. Müller, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874.

„Die einfachste Linie ist die Gerade. Durch zwei Punkte geht nur eine einzige Gerade (Axiom der Geraden).“

J. H. T. Müller, a. a. O.

„Eine Linie heifst gerade, wenn jedes beliebige Stück derselben mit zwei beliebigen Punkten, irgendwo und irgendwie auf dieselbe gelegt, überall mit ihr zusammenfällt.“[1])

Warum? Der Begriff des Abstandes ist nicht weniger dem menschlichen Denken inhärent, als der Begriff der Richtung. — Man vergleiche übrigens die in dem Zitat aus Pfleiderers Scholien vorkommende Definition des Archimedes von Syrakus.

[1]) Auch bei dieser Erklärung liegt meiner Meinung nach der Begriff der Geraden zu Grunde. — Vergleiche die Anmerkung zu Spitz. — Ferner J. Kober, Über die Definition etc. in H. Z. I, p. 232: „Diese Definition zeigt recht deutlich, auf welche Ungereimtheiten das übertriebene Streben nach Definitionen führen kann. Sieht es nicht aus, als wolle man den Schüler absichtlich verwirren, indem man ihm einredet, dafs der Begriff der geraden Linie, der ihm von Kindheit an klar und geläufig ist, keineswegs einfach sei?“

Petersen, Lehrbuch der ebenen Planimetrie. ed. Fischer-Benzon. — Kopenhagen 1881. — definiert die Gerade als die Linie der ihre Stelle nicht verändernden Punkte eines Körpers, wenn dieser sich um zwei feste Punkte dreht.

Pfleiderer, Scholien.

„Es scheint der Begriff von gerader Linie lasse sich wegen seiner Einfachheit durch keine regelmäſsige Definition erklären, die nicht Wörter, die deren Begriff schon in sich schlieſsen (dergleichen sind Richtung, Gleichheit oder Einerleiheit der Lage, Zug ohne Biegung), hereinnehme; und man könne denjenigen, der nicht weiſs, was die Benennung gerade hier bedeutet, es nicht anders lehren, als dadurch, daſs man ihm ein Bild oder eine Zeichnung davon auf irgend eine Art darstellt.“[1])

„Der Analogie (mit der Definition der Ebene) nach, aber mit einem fehlerhaften Zirkel, könnte man den Sinn der Definition der geraden Linie so verstehen: eine Linie heiſst gerade, wenn jede irgend zwei Punkte derselben verbindende gerade Linie auf dieselbe falle.“

Kästners Anfangsgründe der Geom. Erkl. S. 169 ff.

„„Eine gerade Linie ist, deren Punkte alle nach einer Gegend zu liegen.““[2])

„„Die gerade Linie wird niemand aus irgend einer Erklärung kennen lernen; und niemand hat es auch nötig. Aber man kann wohl etwas von ihr sagen, das die Aufmerksamkeit

---

[1]) Zerlang sagt in H. Z. III, p. 266: „Die Begriffe gerade, eben etc. haben das Eigene, daſs sie die neutralen, die Grenzbegriffe zu zwei sie einschlieſsenden entgegengesetzten oder relativen Begriffen sind, und daſs ihre Erklärungen mehr oder minder den strengen Anforderungen einer logischen Definition sich nicht recht fügen wollen.

Dazu hat es nun der Sprache gefallen, alle diese neutralen Begriffe mit positiven Namen zu versehen, die beständig das Bedürfnis nach positiven Erklärungen wach erhalten.“ Es wird dann folgende Definition gegeben: „eine Gerade ist eine kongruentseitige Linie.“

[2]) Das ist doch vielmehr die Definition des Strahles; man müſste denn den Punkt, von dem aus alle Punkte nach einer Gegend zu liegen, im Unendlichen annehmen.

leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. Wenn man in A einen Punkt, einen Körper, auf dessen Gröfse man nicht sieht, setzt: so kann sich derselbe von seinem Orte nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach B zu gehen, so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll; und er könnte nach eben der Gegend noch über B hinaus nach F gehen. — Weil alle Teile einer geraden Linie AB, BF nach einerlei Gegend zu liegen; so findet man in keinem Teile etwas, das nicht auch in dem Ganzen zu finden wäre: denn das Ganze streckt sich nach eben der Gegend. Nur die Gröfse unterscheidet den Teil von dem Ganzen; und man kann also sagen: bei der geraden Linie sei jeder Teil dem Ganzen ähnlich.[1]) Wolf hat dieses für eine Erklärung der geraden Linie angegeben; und die Ähnlichkeit in eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe (Elem. Geom. § 19). Ich finde nicht, dafs ihn dieses in den Stand gesetzt, von der geraden Linie etwas Neues oder Gründlicheres, als man vor ihm wufste, zu sagen.““

Kästners Abhandlungen III. S. 51 ff.

„„Euklids Axiome von der geraden Linie beruhen alle auf klaren Begriffen, weil man keine Erklärung der geraden Linie hat.““

„„Wolfs Erklärung: Jeder Teil einer geraden Linie sei der ganzen ähnlich, ist durch das Wort Ganze einer Chikane ausgesetzt. Was heifst die ganze gerade Linie? Der Kreis ist ein Ganzes: aber die gerade Linie nie; weil sie immer kann verlängert werden. Richtiger wäre der Ausdruck, den er im Zusatze zu dieser Erklärung Elem. Geom. § 18 braucht: Teile einer geraden Linie sind nur durch Gröfse unterschieden. Übrigens ist, wenn man die gerade Linie noch nicht kennt, schwer zu verstehen, worauf die Ähnlichkeit eines Teils mit den andern ankommt. Freilich zeigt Wolf § 29: dafs dazu immer einerlei Richtung des Punkts, der sie beschreibt, er-

[1]) Diese Erklärung hat etwas Bestechendes an sich. Es fragt sich nur, welcher Begriff uns als der natürlichste erscheint, derjenige der Geraden oder der der Ähnlichkeit. Man vergl. auch das folgende Zitat.

fordert werde. Aber wer hat einen Begriff von Richtung, ohne die gerade Linie zu denken, durch welche die Richtung angegeben wird? Also sagt Wolfs Erklärung: Eine gerade Linie wird von einem Punkte beschrieben, der sich immer in gerader Linie bewegt.““[1])

„„Dafs also Wolf eigentlich eine Erklärung der geraden Linie gegeben habe, an der jemand sie kennen könnte, das glaube ich nicht. Allemal aber ist es nützlich, solchergestalt Aufmerksamkeit auf das zu erregen, was Gerade vom Ungeraden unterscheidet. Auch hat Wolf seinen Begriff gebraucht, zu zeigen: dafs gleiche gerade Linien einander decken; und dafs durch zwei Punkte nur eine gerade Linie geht (Elem. Geom. 168 f.).““

Kästners Abhandlungen I. S. 15.

„„Euklid setzt bei seinen Lehrlingen einen klaren Begriff von einer geraden Linie zum voraus. Denn weder aus seiner Definition, noch aus irgend einer andern, wird jemand eine gerade Linie kennen lernen, der noch kein solches Ding, davon die Geometrie den Begriff der geraden Linie abstrahiert, gesehen oder gefühlt hat.““

Klügels mathematisches Wörterbuch III.

„„Die gerade Linie ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig (auf einerlei Art) liegt.[2]) — Die Gleichförmigkeit der Lage der Teile ist es, was die

---

[1]) Dafs dieser letzte Einwand hinfällig ist, geht aus den Ausführungen am Anfang des Kapitels hervor, obwohl nicht geleugnet werden soll, dafs er auf den ersten Blick von Bedeutung zu sein scheint. Es kommt aber nicht darauf an, ob wir uns die Richtung nicht ohne Gerade denken können, sondern dafs die Richtung existiert, auch wenn die Gerade nicht da ist. Die Richtung hat objektive Realität unabhängig von dem subjektiven Hinzusetzen der Geraden.

[2]) Friedlein, Untersuchung der sog. Definitionen Heros in H. Z. II. p. 181: „Der Definition Euklids ist beigefügt ὀρθὴ οὖσα καὶ οἷον ἐπ' ἄκρον τεταμένη ἐπὶ τὰ πέρατα.“ Der Verfasser habe also die Unklarheit der Euklidischen Definition gefühlt und sie zu verdeutlichen gesucht durch die Begriffe des gleichmäfsig Gestreckten und der Spannung. Auch dies sei kein deutlicher Ausdruck.

gerade Linie von der krummen unterscheidet. — Diese Identität in der Lage der Teile gegeneinander, sowohl der benachbarten, als der entfernten, ist die Ursache, warum es sich nicht zeigen läfst, wie sie gezeichnet oder konstruiert werden kann. Der kleinste Teil ist wie der gröfsere beschaffen; von keiner andern Gröfse oder Lage abhängig. — Euklides setzt es daher als Postulatum: von jedem Punkt aus bis an jeden andern eine gerade Linie ziehen; eine begrenzte gerade Linie stetig geradefort verlängern. Das heifst: man mufs den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. Sie ist eine ursprüngliche Vorstellung des reinen Verstandes, die nicht aus der Erfahrung geschöpft wird. — Auf der Gleichförmigkeit der Lage in einer Linie beruht es, dafs zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie stattfindet; oder dafs sie durch zwei Punkte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung völlig bestimmt wird. — Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwei Punkte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung nur auf eine einzige Art gezogen werden kann. Zwei Punkte durch eine gerade Linie verbinden heifst das: diejenige Linie sich zwischen ihnen gedenken, welche nur auf eine einzige Art zwischen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene gerade Linie verlängern, heifst nur, ihre Begrenzung aufheben.““

„„Diese Vorstellungen scheinen die griechischen Geometer bei den Beweisen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklärung der geraden Linie leitet Euklides etwas her; sondern aus dem Grundsatze: dafs zwei gerade Linien keinen Raum einschliefsen. Das ist aber im Grunde nichts anderes als der Satz: Es ist nur eine einzige gerade Linie zwischen zwei Punkten. Die Erklärung der geraden Linie steht inzwischen nicht blofs wegen der methodischen Form da: sondern sie dient, den abstrakten Begriff von der geraden Linie zu erwecken und den Geist von der gröberen sinnlichen Vorstellung abzuziehen.““

Der Herausgeber von Pfleiderers Scholien Eph. Hauber fährt fort:

„Wir führen noch eine oder zwei Definitionen der geraden

Linie aus Proklus an, welche zu dem Bisherigen in einiger Beziehung stehen. Nach der einen ist sie „diejenige, die, so lange ihre Grenzen bleiben, selbst auch bleibt“, *ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα*[1]) (Proklus, p. 30. S. Chrestomathia geometrica S. 90.): nach der andern „diejenige, deren Teile alle auf alle gleicherweise passen“ (*πάντα αὐτῆς τὰ μέρη πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει*).[2]) Man nimmt nämlich zu ihrer Erklärung den Begriff der Bewegung zu Hülfe. Man kann sich, was auch die Euklidische Definition fordert, eine gerade Linie abgesondert von verschiedenen auf ihr liegenden Punkten vorstellen. Schiebt man sie nun dergestalt in Gedanken hin und her, daſs sie immer auf einigen dieser Punkte liegen bleibt, oder durch sie geht; so bleibt sie auch auf den übrigen oder geht auch durch die übrigen Punkte, so weit sie reicht: keiner dieser Punkte ist bei dieser Bewegung aus ihr herausgetreten, keiner seitwärts von ihr gekommen. Hiernach wäre eine gerade Linie diejenige, welche nicht bei einer Hin- und Herbewegung auf einigen ihrer Punkte liegen bleiben kann, ohne auch, so weit sie reicht, auf den andern zu bleiben. Soll sie aber aus ihrer Lage heraustreten, so muſs sie aus allen ihren Punkten zugleich, einen einzigen etwa ausgenommen, heraustreten: so lange sie auch nur zwei Punkte ihrer ersten Lage behält, so behält sie ihre erste Lage ganz mit allen Punkten derselben. Sollte dieses etwa im Sinne der Euklidischen Definition liegen?“

„Alle Teile der geraden Linie passen auf alle gleichmäſsig. Dieses hat ebenfalls bei dem erwähnten Hin- und Herschieben Statt. Es läſst sich zwar auch ein Kreisbogen auf der Kreisperipherie, wovon er ein Teil ist, so herumschieben, daſs er immer auf der Peripherie liegen bleibt; und man kann sagen, daſs auch alle Teile der Kreisperipherie auf alle passen. Aber um dieses zu bewerkstelligen, ist noch nicht genug, wie bei der geraden Linie, daſs man zwei Punkte des einen Teils auf

---

[1]) Friedlein in H. Z. II, p. 182. — v. Staudt nehme in seiner Definition an Stelle der beiden Endpunkte zwei beliebige Punkte an.

[2]) Auch Friedlein in H. Z. II, p. 181 — macht darauf aufmerksam, daſs schon die Alten wuſsten, daſs diese Eigenschaft auch dem Kreis und der Schraubenlinie zukommt.

zwei Punkte des andern Teils bringe; denn die zwei Bögen können sich in diesen zwei gemeinschaftlichen Punkten schneiden; und wenn die Höhlungen der zwei Bögen nach verschiedenen Seiten zugekehrt sind, so lassen sie sich nicht zum Passen bringen."

„Ferner beim Zirkelbogen ist das, was vom Raum an der einen und was an der andern Seite desselben liegt, unähnlich begrenzt; der eine hohl, der andere erhaben: und das Gleiche findet bei jeder Krümmung statt. Bei der geraden Linie hingegen ist der Raum, der an der einen und derjenige, der an der andern Seite von ihr liegt, völlig auf ähnliche Art durch sie begrenzt."

„Archimedes von Syrakus vorhandene Werke. Aus dem Griechischen übersetzt von Ernst Nitze. Stralsund 1824. S. 43. Note β. „„An jeder Linie, sie sei gerade oder gebogen, lassen sich zwei Seiten unterscheiden, weil keine Linie ohne die zwei Flächenräume gedacht werden kann, welche sie von einander trennt. Befindet sich die trennende Linie in einer Ebene, und sind die dadurch getrennten Ebenenräume durch nichts andres zu unterscheiden, als durch ihre entgegengesetzte Lage; so ist die Linie gerade."" Ferner bei jedem Ungeraden findet ein Mehr und Weniger Statt. Gegen einen bestimmten Teil einer Linie sind, wenn sie ungerade ist, einige der übrigen Teile oder Punkte mehr, andre weniger seitwärts gerückt, oder nebendraufsen gelegen; bei der geraden Linie giebt es nur ein Fortgehen, kein Nebenhinausgehen, kein Seitwärtsliegen."

„„Gedenkt man sich einen noch so wenig gekrümmten Kreisbogen oder irgend einen krummen Bogen um seine Endpunkte als Pole sich herumdrehend; so beschreibt derselbe einen körperlichen Raum, er nimmt in jedem Augenblick seiner Bewegung eine von der vorigen verschiedene Lage an; und in den zwei Lagen, welche er in einer und derselben Ebene z. B. am Anfang der Bewegung und nach vollendeter halber Umdrehung einnimmt, stellt er zwei Linien dar, die miteinander eine ebene Figur, ein krummliniges Zweieck bilden. Eine gerade Linie hingegen, um ihre zwei Endpunkte oder irgend zwei ihrer Punkte als Pole gedreht, beschreibt keine Figur, beschreibt nichts Neues, tritt nicht aus ihrer anfäng-

lichen Lage heraus, bleibt immer in demselben Ort des Raumes. Dies erläutert wiederum die oben angeführte Definition, ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα. Die Definition der geraden Linie „quae circa suum utrumque extremum, tamquam polos voluta locum non mutat“ führt Kraft als ihm von F. C. Maier mitgetheilt an, und Herr Camerer sagt auch, dafs sie ihm am besten gefalle und bemerkt, wie einige der hauptsächlichsten Axiome von der geraden Linie sich aus ihr herleiten lassen[1]) (Eucl. Elem. ed. Camerer. Berolini 1824. p. 8).““

Rausenberger a. a. O. — wählt als Fundamentallinie die Gerade „durch ein gewisses Gefühl der Einfachheit geleitet.“

Die verbreiteten Definitionen der Geraden als Linie von einerlei Richtung und die Euklidische weist er als ganz unzulänglich zurück; ebenso die Definition der Geraden als der kürzesten Verbindungslinie, da zur Gröfsenvergleichung erst wieder ein neues Axiom nötig sei. Dann fährt er fort:

„Trotzdem ist es möglich, die Gerade durch anschauliche Konstruktion zu erzeugen.“

Es wird nun die Gerade als die Gesamtheit der festen Punkte bei der Drehung um zwei feste Punkte definiert und auf Kruses Auseinandersetzung näher eingegangen.[2])

In einer Anmerkung fügt Rausenberger hinzu:

„Erwähnt sei noch die Definition von P. Cassani (Nuove proposte interno ai fondamenti della geometria, Giorn. mat. d. G. Battaglini, XV, p. 284—289): Eine Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei Punkten gleichen Abstand haben, die einen Kreis in drei gleiche Teile teilen. Der Kreis sowie der feste Abstand zweier Punkte lassen sich, wie wir noch sehen werden, ohne weitere Voraussetzungen definieren.“

Die Eigenschaften der Geraden werden aus ihrer Entstehungsweise gefolgert.

---

[1]) Vergl. Zitat aus Kruse.

[2]) Vergl. dazu die Bemerkung, dafs dabei unbewufst die Vorstellung der Geraden schon zu Grunde liegt und Kruse Zitat.

Recknagel a. a. O.

„Der Begriff der geraden Linie mufs als elementar vorausgesetzt werden."

Die beiden Grundsätze, die hinzugefügt werden, sind als „Grundsatz der Lage" und „Grundsatz der Gröfse" bezeichnet.

Reidt, Anleitung.

„Ebenso quäle man sich nicht ab, dem Anfänger eine wissenschaftlich durchaus haltbare Definition der geraden Linie ... zu geben."

„Wir müssen vielmehr im Unterrichte eine Anzahl von Grundbegriffen als durch die äufsere und innere Anschauung gegeben annehmen"...

„Viele Mathematiker haben sich vergeblich bemüht, eine vorwurfsfreie Definition der geraden Linie zu geben, kein einziger derselben würde aber deshalb zugegeben haben, dafs ihm der Begriff der Geraden nicht völlig klar sei."

„Wie die Axiome, ... so dürfen die einfachsten Grundbegriffe als solche vorausgesetzt werden, welche man nicht imstande sei auf noch einfachere zurückzuführen, die vielmehr durch innere Anschauung oder Erfahrung unmittelbar gegeben und höchstens der Erklärung und Erläuterung bedürftig seien."

Reidt, Elemente — giebt aber im Gegensatz zu dieser Auseinandersetzung eine Definition der Geraden und zwar: „Eine gerade Linie hat in allen Punkten dieselbe Richtung."

Schindler, a. a. O. — geht von der Betrachtung zweier Punkte aus, deren einer der Augenpunkt genannt wird (Lichtstrahl).

„Richtung heifst die räumliche Beziehung zwischen zwei Punkten."

„Strecke heifst die durch zwei Punkte bestimmte Länge."

„Die durch Strecke und Richtung bestimmte Gerade ist das Fundament für die ganze Geometrie."[1])

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Schlegel, System der Raumlehre I. — Leipzig 1872.

p. 3. „Es giebt eine unbeschränkte Menge von Bewegungen, zwischen denen ein Punkt im Anfange seiner Änderung die Wahl hat. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Anfangsbewegung heifst ihre Richtung."

„Fährt der Punkt in der einmal gewählten Anfangsbewegung fort, so heifst seine Gesamtbewegung einfach. Das Merkmal einer einfachen Bewegung ist also ebenfalls ihre Richtung."

p. 6. „Wenn ein Punkt seine Lage durch einfache Bewegung ändert, so heifst das von ihm erzeugte Gebilde (sein Weg): eine Gerade (gerade Linie)."

Die Lage des erzeugenden Punktes und die Richtung der Bewegung sind danach die Merkmale der Geraden.[1])

Schlegel, L. d. e. M. II. — Wolfenbüttel 1879.

Die Gerade wird auf dieselbe Weise definiert, wie im System der Raumlehre. Es heifst dann noch von ihr:

„Die Gerade ist 1) einmal ausgedehnt, 2) einfach, 3) unbegrenzt, 4) unendlich, 5) in sich beweglich."

Snell, L. d. G. I. — Leipzig 1857.

„Die gerade Linie hat nur zwei Eigenschaften, welche einer näheren Bestimmung fähig sind, nämlich Länge und Richtung."

Snell setzt also den Begriff der Geraden als bekannt voraus und giebt die Begriffe als ihre Eigenschaften, die er nun hauptsächlich auf die Betrachtung zweier getrennten Punkte stützt, welche doch das Primäre sind und aus welchen die Gerade sich zusammensetzt.

Spitz, L. d. e. G. — Leipzig 1888.

„Fällt jeder beliebige Teil einer Linie, wenn er mit zwei beliebigen Punkten irgendwo und auf irgend welche Weise

---

[1]) Die zweite Grundvorstellung des Abstandes bleibt dabei ganz unberücksichtigt.

auf dieselbe gelegt gedacht wird, überall mit ihr zusammen, so sagt man die Linie sei gerade."[1])

In einer Anmerkung fügt Spitz hinzu, dafs seine Erklärung identisch sei mit derjenigen, die die Gerade aus dem Begriff der Drehung entwickelt.

---

van Swinden, ed. Jacobi. — Jena 1834.

„Eine gerade Linie ist eine solche, die durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Endpunkten hat."[2])

„Zus. Sind daher zwei Punkte gegeben, so wird ihr Abstand voneinander durch die Gerade gemessen, die man von dem einen zum andern zieht."

Das „daher" in diesem Zusatz ist wohl nicht am Platze; die im Zusatz erwähnte Eigenschaft der Geraden steht doch zu der gegebenen Definition nicht im geringsten Zusammenhang.

„Anmerkung 1. Andere sagen: die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Inzwischen scheint diese Erklärung mehr eine Folgerung aus unserer Erklärung, als ein Grundbegriff zu sein. Aber wie dem auch sein möge, so wird, wenn man diese Erklärung annimmt, der Lehrsatz:[3]) „In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen gröfser als die dritte" ein Grundsatz, während der Grundsatz[4]) „Gerade

[1]) Gerade diese Definition zeigt recht deutlich, dafs das Bemühen um eine Erklärung der Geraden ein vergebliches ist, wenn man nicht von den Grundbegriffen Richtung und Abstand ausgeht; wer, der nicht schon das Bild der Geraden in seiner Vorstellung hat, könnte sich wohl aus dieser Erklärung eine Vorstellung von der Geraden machen?

[2]) „Vielleicht noch richtiger könnte man sagen: eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen je zweien ihrer Punkte durchaus dieselbe Lage hat. Denn es giebt auch krumme Linien, welche wenigstens insofern eine völlig gleiche Lage zwischen ihren Endpunkten haben, als dieselbe sich nicht ändert, wenn man die beiden Endpunkte ihre Stellen untereinander wechseln läfst; z. B. ein halber Umkreis u. m. a. Anm. d. U."

[3]) Es ist der 43. Lehrsatz.

[4]) Der 4. Grundsatz:

Dazu heifst es in einer Anmerkung: Für diejenigen, welche die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten erklären, hört dieser Satz auf, Grundsatz zu sein; er wird vielmehr Lehrsatz, der bewiesen werden mufs, wie dies unter andern auch gethan hat Legendre I, 3. vergl. Zitat.

Linien, bei denen zwei Punkte der einen mit zwei Punkten der anderen zusammenfallen, fallen in ihrer Richtung ganz zusammen“ sich in einen Lehrsatz verwandelt, der eines Beweises bedarf.“

„Anmerkung 2. Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dafs sie noch einer Erläuterung durch Worte fähig wären — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel. Man lese besonders, was hierüber gesagt ist von d'Alembert in seinen Melanges etc. IV, 163 und V. 203—206.“

Thibaut, Gr. d. r. M. — Göttingen 1822.

„1) Die gerade Linie ist die erste und einfachste aller geometrischen Konstruktionen. Ihre Erzeugung hebt mit dem Setzen eines Anfangspunktes an, bleibt indessen unbestimmt und auf unendlich viele Arten möglich, so lange nichts als ein solcher Anfangspunkt gegeben ist. Sobald hingegen noch ein zweiter Punkt als Endpunkt gleichfalls gesetzt wird, hört jede Unbestimmtheit der Konstruktion gänzlich auf. Wo auch im Raume zwei Punkte als Grenzen einer geraden Linie gegeben sein mögen, so wird jedesmal zwischen ihnen eine solche, aber auch nur eine einzige gerade Linie möglich sein. Die Raumbeschreibung, vermöge deren die Konstruktion einer geraden Linie von ihrem Anfangspunkte zum Endpunkte fortschreitet, wird progressive Bewegung eines Punktes genannt.“

„2) Das Wort Richtung bezeichnet den als notwendig erscheinenden Gang, welchen die Konstruktion einer geraden Linie in ihrem ganzen Verlauf zu nehmen hat, sobald sie von einem bestimmten Anfangspunkte zu einem gegebenen Endpunkte fortschreiten soll. Die Richtung einer geraden Linie ist durchaus immer dieselbe, die gerade Linie selbst ihr unmittelbarer Ausdruck.“[1])

„3) Jede gerade Linie hat eine willkürliche Gröfse und kann über ihre beiden Grenzpunkte hinaus beliebig fortgesetzt

---

[1]) An einer andern Stelle sagt Thibaut:

„Da Ausdruck einer bestimmten Richtung oder gerade Linie gleichbedeutend sind,“ . . .

oder verlängert werden.[1]) Aber bei einer solchen Verlängerung dauert die Notwendigkeit im Gange der Konstruktion, welche durch das Setzen ihrer anfänglichen Grenzpunkte entstanden war, unbedingt fort, und nur die Gröfse dieser Verlängerung bleibt beliebiger Bestimmung überlassen. Die Richtung einer geraden Linie und ihrer Verlängerung ist durch jeden noch so kleinen Teil derselben vollkommen bestimmt, und nur eine einzige, während ihre Gröfse keine andere als willkürliche Grenzen anerkennt."

„4) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei gegebenen Punkten; jeder andere, diese beiden Punkte verbindende, auf welche Art er auch konstruiert werden möge, besitzt eine gröfsere Länge als sie."

„5) Die Länge ist das einzige Quantitative in der Vorstellung einer geraden Linie oder die einzige Dimension derselben;[2]) zwei gerade Linien von gleicher Länge sind identisch oder kongruent, d. h. die eine kann im Raume an die Stelle der andern gesetzt werden, ohne dafs daraus für die Anschauung der mindeste Unterschied erwächst."

Wiegand, L. d. M. I. — Halle 1863. — giebt eine der gewöhnlichen Erklärungen und fügt dann die Eigenschaft hinzu, dafs jeder Teil derselben, irgendwie und irgendwo[3]) auf einen andern gelegt, vollständig ihn decke, kommt auch auf die Drehung um zwei Punkte zu sprechen und sagt schliefslich:

„Die Aufsuchung von Punkten, die in einerlei Richtung,

---

[1]) Damit wird die übliche Anschauung auf den Kopf gestellt. Es scheint jedoch mehr an der sprachlichen Unbestimmtheit des Ausdrucks zu liegen, als an einem wirklichen Fehler der Auffassung. In der ganzen vorhergehenden Auseinandersetzung spricht Thibaut genau genommen nicht von der geraden Linie, sondern von der Strecke, so dafs also erst jetzt auf den Begriff der Geraden selbst, worunter durchaus die Gerade in unendlicher Ausdehnung zu verstehen ist, eingegangen wird.

[2]) Es scheint mir, als wenn diese Erklärung sich im wesentlichen mit meiner Ansicht decke, dafs die gerade Linie die einzige sei, die sich überhaupt nur nach einer Dimension erstreckt. In den folgenden Sätzen stellt Thibaut die Umkehrbarkeit ohne weiteres als Axiom auf.

[3]) Man vergleiche das Zitat von J. H. T. Müller nebst Anmerkung.

d. h. also in einer geraden Linie liegen, bezeichnet man mit dem Ausdrucke visieren."[1])

Wolff, L. d. G. — Berlin 1830.

„Eine Linie ist entweder gerade oder krumm, ... Dies sind einfache Begriffe."

Worpitzky a. a. O.

„Axiom IX.

Hält man zwei beliebige Punkte einer Figur im Raume fest, so läfst sich dieselbe noch starr bewegen; es bleibt aber eine durch jene Punkte hindurchgehende, von den Eigenschaften der Figur unabhängige, ungeschlossene und unverzweigte Linie in Ruhe.

Definitionen.

I. Diejenige Bewegung, bei welcher ein Punkt seinen Ort nicht ändert, heifst Drehung.

II. Diejenige Linie, welche bei der Drehung einer Figur um zwei feste Punkte in Ruhe bleibt, die Drehungsaxe, heifst eine gerade Linie oder schlechthin eine Gerade."[2])

Daran schliefsen sich noch vier weitere Definitionen, vier Zusätze und ein Postulat.

[1]) Auch in dieser Erklärung wird eigentlich nur der Strahl, nicht aber die Gerade gegeben. Übrigens ist diese Hinweisung auf ein praktisches Beispiel zur Klarstellung des Begriffes recht gut und kann für den Unterricht nur empfohlen werden. Allerdings liegt gerade in diesem Beispiel mehr der Grundsatz, dafs die Gerade durch zwei Punkte völlig bestimmt ist. Zu diesem selben Beispiel fand ich die Bemerkung eines Autors, dafs man vor dem Visieren unbewufst schon die Gerade vom Auge nach dem Zielpunkte konstruiert habe. Die Entscheidung über die Richtigkeit dieser Bemerkung deckt sich mit der Beantwortung der Frage nach dem primären oder sekundären Charakter der Geraden.

[2]) Da im Vorausgehenden nur von der Drehung um einen festen Punkt die Rede war, so treten die Erwägungen des Satzes II recht unvermittelt auf. Meiner Meinung nach hätte erst auseinandergesetzt werden müssen, dafs auch bei zwei festen Punkten noch eine Drehung im Raume möglich ist. Dann aber scheint es mir viel natürlicher die Erklärung dieser Drehung auf die Gerade zu stützen, als umgekehrt die Gerade aus dieser Drehung zu entwickeln. Das liegt übrigens wohl auch unbewufst in dem Gebrauch des Wortes Drehungsaxe.

Ziegler a. a. O.

„Mit der gleichzeitigen Vorstellung zweier Punkte ist auch die der Richtung gegeben.“[1])

„Haupteigenschaften der Geraden sind:

Alle ihre Punkte liegen in derselben Richtung.

Sie ist durch zwei Punkte fixiert.

Sie giebt die kürzeste Entfernung zweier Punkte.“

Ohm, Dr. r. Elem. Math. II. — Berlin 1835.

„Die Linie ..., welche als eine gerade (auch Richtung genannt) oder als eine krumme erscheint.“

Benzenberg, Anfangsgründe. — Düsseldorf 1818.

„Was eine gerade Linie sei, ist jedem bekannt. Es ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.“

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833. — giebt die Euklidische Erklärung, fügt aber in einer Anmerkung hinzu:

„Gerade ist ein einfacher Begriff und daher müssen alle Erklärungen der geraden Linie mifslingen. Derjenige, der nicht bereits eine deutliche Vorstellung von einer geraden Linie hat, wird durch keine Erklärung derselben eine solche erlangen. Wenn aber die richtige Vorstellung der geraden Linie vorausgeht, so wird man in jeder der mannigfachen Erklärungen, welche von derselben gewöhnlich gegeben werden, sie wieder erkennen, und man mufs daher alle Erklärungen als Erläuterungen ansehen, von welchen diejenige die beste ist, aus welcher unmittelbar weitere Folgerungen über das Wesen derselben sich ableiten lassen. Dieses ist nun bei der obigen Erklärung der Fall; aus derselben folgt unmittelbar, dafs eine gerade Linie durch zwei der Lage nach gegebene Punkte ihrer Lage nach vollkommen bestimmt ist und dafs

---

[1]) Warum nicht auch die des Abstandes?

daher zwei zusammentreffende aber nicht zusammenfallende gerade Linien sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können.

Koppe, Planimetrie. — Essen 1868.

„Der Begriff der geraden Linie ist ein einfacher; und es ist daher weder nötig, noch möglich zu sagen, was eine gerade Linie ist."

Ulrich, a. a. O.

„Die gerade Linie ist eine so einfache räumliche Gröfse und ursprüngliche Vorstellung des Verstandes, dafs es schwer hält, deren Begriff auf andere einfachere oder mehr bekannte Be- Begriffe zurückzuführen. Hierin liegt die Schwierigkeit, eine solche Erklärung von ihr zu geben, aus welcher ihre Konstruktion und alle Eigenschaften, welche die Geometrie von ihr in Anspruch nimmt, abgeleitet und streng bewiesen werden könnten. Die Erklärung des Euklides (I, 4), nach welcher die gerade Linie diejenige ist, „welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig oder auf einerlei Art liegt", kann vielleicht so verstanden werden, dafs, wenn man sie um zwei beliebige, als unverrückbar gedachte Punkte in ihr umdreht,[1]) alle übrigen Punkte derselben ihre Lage ebenfalls nicht ändern.[2]) Wenigstens offenbaren sich in dieser Erklärung, obschon sie nicht geeignet ist, die Konstruktion der geraden Linie zu lehren, wesentliche Eigenschaften derselben, an welche die ferneren geometrischen Untersuchungen gebunden sind."

„Die Vorstellung des Weges, den man einzuschlagen hat, um auf einer geraden Linie von einem Punkte derselben nach einem andern zu gelangen, führt zu dem Begriff der Richtung.[3]) Ohne eine entweder vorhandene oder gedachte gerade

---

[1]) Das ist aber absolut unmöglich.

[2]) Vergl. G. W. Krafft Institutiones geometriae sublimioris. Tubingae 1753. p. 2. — Saccherius Euclides ab omni naevo vindicatus. Mediol. 1733. p. 71. — Eucl. elementa, ed. Camerar. Berol. 1824. p. 7 et 8.

[3]) Nach Ulrich ist demnach der Begriff der Geraden der primäre, derjenige der Richtung der sekundäre. Man vergl. meine Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

Linie ist keine Richtung möglich.[1]) Eine bestimmte Richtung setzt also ebenso, wie eine gerade Linie, zwei Punkte als gegeben voraus, die sie in sich aufzunehmen hat." ...

Wagner, L. d. e. G. — Hamburg 1874.

„Die Lage, welche ein Punkt in Bezug auf einen gegebenen Nachbarpunkt einnimmt, nennt man seine Richtung zu demselben."

„Um dies zu verstehen, mufs man folgendes beachten: Um einen gegebenen Punkt als Hauptpunkt kann man sich eine unendlich grofse Zahl von unmittelbar angrenzenden oder Nachbarpunkten liegend denken. Jeder dieser Punkte wird in Bezug auf den Hauptpunkt eine andere Lage haben, und durch diese seine Lage (seine Richtung) von irgend einem der übrigen Punkte unterschieden sein. Nur ein Punkt von besonderer Bedeutung existiert noch; es ist derjenige, zu welchem der Hauptpunkt dieselbe Richtung besitzt, wie der besprochene zu dem Hauptpunkte. Von je zwei solchen Nachbarpunkten des Hauptpunktes sagt man, sie haben entgegengesetzte Richtung zu demselben. Geht man daher von einem zweier entgegengesetzt gerichteten Punkte zum Hauptpunkt über, dann von diesem zum andern, so behält man dieselbe Richtung bei."

„Eine gerade Linie[2]) ist eine solche Linie, welche durch zwei in ihr liegende Punkte völlig bestimmt ist."

„Die Gestalt der geraden Linie ist uns nun von früher her bereits so bekannt, in all unsere Vorstellungen so eingewurzelt, dafs wir uns gar nicht vorstellen können, sie sei eine andere. Wir bestimmen aber auch immer eine gerade Linie in Wirklichkeit durch zwei Punkte; denn stellen wir uns z. B. die Kante einer Treppenstufe vor, so suchen wir nach

---

[1]) Das ist eben nicht richtig. So wie ein zweiter Punkt gesetzt wird, ist die Richtung vom ersten nach dem zweiten (und umgekehrt) vorhanden, unabhängig davon, ob das Subjekt dieser Richtung durch eine wirkliche resp. gedachte Gerade Form giebt oder nicht.

[2]) Man vermifst den Übergang von den vorhergehenden Betrachtungen zu der Geraden; die folgenden Betrachtungen reihen sich ganz unvermittelt an.

ihren Endpunkten und sind nicht eher beruhigt, als bis wir zwei solche Punkte gefunden haben. Wir (ein Punkt) gehen, falls nicht Hindernisse vorliegen, mit Sicherheit in gerader Linie auf ein Haus (zweiter Punkt) los, wenn wir es vor Augen haben."

„Unter Entfernung zweier Punkte versteht man dasjenige Stück der durch sie gehenden geraden Linie, welches zwischen ihnen enthalten ist."

Das letzte Beispiel erscheint nicht besonders glücklich gewählt; es handelt sich darin schon nicht mehr um den Abstand zweier Punkte, sondern um den Abstand eines Punktes von einer Geraden: das ist aber ein neuer Begriff, von dem vorläufig, ohne erläuternde Betrachtungen, noch nicht gehandelt werden darf.

— — — — —

L. v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie. Grunerts Archiv. 49. p. 178.

„Die gerade Linie[1]) wird in den Lehrbüchern überall als ein einfacher Begriff betrachtet und behandelt. Bekanntlich führt diese Annahme in ihren Konsequenzen auf Wahrheiten, welche man als Grundsätze hinzustellen genötigt ist, obschon eine strenge Logik ihnen diese Stellung nur widerwillig einräumt."

„Jene Auffassung der geraden Linie, als eines einfachen Begriffes, ist jedoch eine ebenso willkürliche, als unberechtigte. Schon die Verbindung des Adjektivs mit dem Substantiv, gerade Linie, drückt den zusammengesetzten Begriff aus. Gerade bezeichnet, nach dem völlig korrekten Sprachgebrauche,

[1]) Die folgenden Ausführungen decken sich im wesentlichen mit den meinigen; auch hier wird der sekundäre Charakter der geraden Linie betont und nachgewiesen; allerdings ist der Ausgangspunkt der Untersuchung insofern ein anderer, als der Begriff der Bewegung an die Spitze gestellt und ganz besonders hervorgehoben wird. Auch kann ich in Einzelheiten nicht völlig mit dem Verfasser übereinstimmen; so z. B. daſs Richtung und Unveränderlichkeit zwei getrennte Begriffe seien, die erst im Begriffe gerade sich verbänden, erscheint mir nicht richtig. Die Unveränderlichkeit liegt im Begriff der Richtung drin, daher man auch Ausdrücke vermeiden sollte, wie „seine Richtung ändern", statt dessen genauer gesagt werden muſs „eine andere Richtung einschlagen".

die Unveränderlichkeit einer Richtung; gerade ist also an sich selbst schon ein zusammengesetzter Begriff, enthaltend Richtung und deren Unveränderlichkeit. Man geht gerade aus, nicht rechts, nicht links.[1]) An eine Linie denkt man dabei nicht. Der Begriff Richtung und der Begriff Linie sind ganz gewiſs verschieden. In der Linie liegt der Begriff der Länge, in der Richtung nicht.[2]) Sind nun schon der Begriff Richtung und der Begriff Linie verschiedene Begriffe, und ist der Begriff gerade an sich selbst ein zusammengesetzter aus Richtung und Unveränderlichkeit, so muſs der Begriff gerade Linie sogar aus den Begriffen Richtung, Unveränderlichkeit und Länge zusammengesetzt sein. Es ist mithin evident, daſs der Begriff gerade Linie, als das Produkt aus mehreren verschiedenen Begriffen, ein zusammengesetzter Begriff sein muſs,[3]) und es ist darum ein logischer Irrtum, die gerade Linie als einen einfachen Begriff zu betrachten und zu behandeln."

„Mit dieser Auffassung stimmt auch die Erfahrung überein. Es ist nicht notwendig, die Richtung durch eine gerade Linie auszudrücken; bekanntlich bedient man sich dazu auch des Kreisbogens.[4]) Eine Länge kann ebensogut an einer

---

[1]) Man vergleiche hiermit die Anwendungen von „gerade" in sittlicher Bedeutung: „Gerader Mann", „gerader Charakter". — Dann auch „gerader Kegel".

[2]) Das ist gewiſs zutreffend und das punctum saliens, um das die Untersuchung sich zu drehen hat. Daſs die Linien qualitativ und quantitativ zu fassen sind, ist auch von mir schon gebührend hervorgehoben.

[3]) J. Kober, Über die Definitionen etc. in H. Z. I. p. 235: „Der Begriff „gerade" kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung" (Nord, West u. s. w.)"

[4]) Auch hier kann ich mich mit dem Verfasser nicht einverstanden erklären. Meiner Meinung nach handelt es sich hier um eine arge Verwechslung. Da der Verfasser in den folgenden Betrachtungen auf die Bewegung näher eingeht, so hätte er zwischen fortschreitender und drehender Bewegung scharf unterscheiden müssen. Der Unterschied zwischen Richtung bei fortschreitender Bewegung und derjenigen bei drehender Bewegung hätte dann nicht identifiziert werden können. Ebensowenig zutreffend ist die folgende Bemerkung, daſs eine Länge auch durch eine krumme Linie gemessen werden könnte. Gemessen

und durch eine krumme Linie gemessen werden, als durch eine gerade, Länge und Richtung, sowie Richtung und gerade Linie stehen mithin in gar keinem notwendigen Zusammenhange."

Pfeil schliefst diese Ausführungen mit der Bemerkung, dafs die gerade Linie demnach kein einfacher Begriff sei und deshalb die gerade Linie als zusammengesetzter Begriff definiert werden müsse. An die Spitze der Betrachtung stellt er den Begriff der Bewegung[1]) als Ortsveränderung. Hierbei ergeben sich Gröfse und Richtung als einfache Begriffe. Nachdem sodann noch die genetische Definition der Körper, Flächen und Linien gegeben ist, werden folgende Erklärungen und Sätze aufgestellt:

„Eine gerade Linie ist eine solche, welche in allen ihren Teilen dieselbe Richtung hat. Oder auch:

Eine gerade Linie entsteht, wenn sich ein Punkt so bewegt, dafs er immer dieselbe Richtung beibehält."

Dazu kommen folgende Lehrsätze:

1) „Wird eine Linie gedreht, so verändert sie ihre Richtung in allen Punkten und zwar überall um gleichviel."

2) „Die Teile einer geraden Linie sind selbst gerade Linien."

3) „Berühren zwei gerade Linien einander, so fallen sie in eine zusammen."[2])

4) „Ist eine Linie vom Anfang gegen das Ende hin gerade, so ist sie es auch umgekehrt vom Ende gegen den Anfang hin."

---

werden die Längen von Linien nur mit Hülfe der Geraden resp. der Strecke, und selbst da, wo vielleicht scheinbar krumme Linien direkt verglichen werden, liegt doch unbewufst der Begriff der Geraden zu Grunde.

[1]) Hierzu wird sehr richtig bemerkt: „Ohne Annahme der Bewegung ist jede mathematische Deduktion ein Ding der Unmöglichkeit. Wie will man nur eine Linie ziehen oder verlängern, einen Kreisbogen beschreiben .... ohne Bewegung. Bewegung als blofse Ortsveränderung aufgefafst, ist aus der Geometrie nicht auszuschliefsen und sie ist darum in allen ihren Konsequenzen für die Erörterung zu benutzen.

[2]) An früherer Stelle ist erklärt, dafs sich Linien berühren, wenn sie einen Punkt gemein und an demselben gleiche Richtung haben.

5) „Wird eine gerade Linie um einen ihrer Punkte so lange gedreht, bis sie ihre frühere Richtung berührt, also in die entgegengesetzte Lage kommt, so fällt sie mit ihrer ursprünglichen Lage wieder in eine gerade Linie zusammen."

6) „Da die gerade Linie in allen ihren Teilen, vorwärts und rückwärts betrachtet, die gleiche Richtung hat, so wird sie vorzugsweise zur Bezeichnung irgend einer Richtung angewendet."

7) „Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich."

8) „Eine gerade Linie kann nicht in sich zurückkehrend sein."

9) „Die gerade Linie ist die kürzeste zwischen zwei Punkten."

Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. III. Über Ursprung etc.

p. 25: „Aber in jenen ersten Elementen werden einige Sätze aufgestellt, von denen die Geometrie selbst erklärt, dafs sie nur darauf rechnen müsse, jeder, der den Sinn dieser Sätze verstehe, werde ihre Richtigkeit zugeben. Das sind die sogenannten Axiome der Geometrie. Zu diesen gehört zunächst der Satz, dafs wenn man die kürzeste Linie, die zwischen zwei Punkten gezogen werden kann, eine gerade Linie nennt, es zwischen zwei Punkten nur eine und nicht zwei verschiedene solche gerade Linie geben könne."[1])

Bretschneider, Lehrgebäude der nied. Math. — Jena 1844.

---

[1]) Liegt dies denn nicht schon in der Anwendung des Superlativs? Bedeutet dieser nicht immer eine Einheit? Das geht doch auch schon aus dem Gebrauch des bestimmten Artikels hervor: die kürzeste Linie, nicht eine kürzeste Linie. Der Einwand, dafs auf einer Kugelfläche die entgegengesetzten Punkte durch unendlich viele kürzeste Linien verbunden gedacht werden können, ist deshalb hinfällig, weil es sich hier um einen entgegen dem Sprachgebrauch gebildeten, ganz willkürlich angenommenen, speziell mathematischen Ausdruck handelt, ähnlich dem von Helmholtz gebildeten „geradeste Linien."

„Eine gerade Linie ist diejenige, welche, wenn man sie um zwei in ihr als fest angenommene beliebige Punkte herumdreht, keinen hohlen Raum einschliefst, sondern stets ganz in sich selbst hineinfällt."

Dieser Definition wird noch eine ausführliche Erklärung beigegeben. Dann heifst es: „Die Vorstellung der geraden Linie ist eine Grundvorstellung des menschlichen Geistes; ihre Entstehung kann daher nicht bewiesen, sondern nur nachgewiesen werden."

Die Eigenschaften der Geraden werden in Zusätzen gegeben.

Crelle, Über Parallelentheorien etc. — Berlin 1816.

„Da im Raume, durch denselben Punkt, nach allen Richtungen Linien liegen können (weil ein Punkt zugleich mit den Linienräumen, die er sondert, da ist), so bestimmen ein einzelner, oder was dasselbe ist, weniger als zwei Punkte keine Linie. Also kann eine Linie nicht in eine andere fallen, wenn beide nicht wenigstens zwei Punkte gemein haben."

„Eine Linie unterscheidet sich von der anderen durch ihre Gestalt. Daher giebt es unzählige verschiedene Linien. Man unterscheidet gerade und krumme. Eine gerade Linie ist, die je an zwei entgegengesetzten Seiten dieselbe Gestalt hat, so dafs, wenn man die eine Seite der Linie in die andere, d. h. den Flächenraum an der einen Seite in den Flächenraum an der andern Seite legt, die Grenzen beider Räume an demselben Orte im Raume bleiben."[1])

„Diese Erklärung der geraden Linie ist wieder eine wesentliche Hauptsache für alles Folgende. Sie ist, dünkt mich, genau; denn der Begriff von Seite ist ebenso ursprünglich, wie der von Gestalt und Lage. Dafs unter Seite nicht etwa ein Teil der Linie, oder eine Grenze der Länge nach, sondern Lage verstanden wird, darf nicht erinnert werden."

Auf dieser Definition baut Crelle dann in Lehrsätzen die Eigenschaften der geraden Linie auf.

---

[1]) Mir scheint, dafs man auch bei dieser Erklärung schon vorher wissen müsse, was eine Gerade ist, resp. wie man sie sich zu denken hat.

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

„Man stelle sich in einer beliebigen Fläche eine Linie und in dieser Linie zwei Punkte vor. Man lasse die beiden Punkte an demselben Orte im Raume bleiben, die Fläche aber alle Lagen annehmen, die sie annehmen kann. Bleibt die Linie, in welcher sich die beiden festen Punkte befinden, für jede beliebige Lage der Fläche an demselben Orte im Raume, so ist sie gerade.“[1])

Die Eigenschaften der geraden Linie giebt Crelle auch hier in Lehrsätzen.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

„Man nennt eine Linie gerade oder eine Gerade, wenn alle Punkte, welche in ihr gedacht werden können, in derselben Richtung liegen, wenn sie die anfängliche Richtung immer beibehält, wie weit man in ihr auch fortgehen mag.“

„Die Gröfse einer Geraden ist bestimmt durch ihre beiden Endpunkte; die Gerade selbst heifst die Entfernung dieser beiden Punkte.“

„Die Lage einer Geraden, ihre Richtung, wird bestimmt durch zwei Punkte, durch welche die Gerade gehen soll. Ist nur ein Punkt gegeben, so kann man durch denselben, nach den verschiedensten Richtungen hin, unendlich viele Gerade ziehen, ist aber ein zweiter Punkt bestimmt oder gegeben, so wird die Gerade, welche durch beide Punkte gehen soll, von allen übrigen ausgezeichnet, ihre Lage und Richtung ist bestimmt, und alle Geraden, welche durch dieselben Punkte gehen, fallen mit ihr zusammen, sind dieselben. Von Geraden, deren Richtungen durch dieselben Punkte bestimmt werden, kann man sagen, sie haben identische Richtungen, werden sie

[1]) Siehe die vorige Bemerkung. — Alle Versuche, bei der Erklärung der Geraden an Stelle der progressiven Bewegung die drehende zu setzen, müssen notwendig misslingen, da von allen Bewegungen die progressive die einfachste ist, d. h. reine Ortsveränderung ohne einschränkende Bedingungen.

alsdann auch durch dieselben Endpunkte begrenzt, so ist auch ihre Lage identisch.“[1])

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

„Sobald wir zwei Punkte (A und B) aufeinander beziehen, so stellen wir uns die Entfernung zwischen beiden vor, d. h. wir haben es mit einer Dimension, d. h. mit der Linie zu thun.“[2])

„Wenn wir die Abhängigkeit der Elemente einer Linie einsehen wollen, so müssen wir dieselbe entstehen lassen. Wir müssen also den Punkt A bewegen, bis er mit dem anderen B zusammentrifft. Der Weg des Punktes ist eine Linie AB. Aber es giebt unendlich viele Wege, welche der eine Punkt A einschlagen kann, um die Stelle des andern B einzunehmen. Er kann also unendlich viele Linien beschreiben. Übersehen wir alle diese Linien, so drängen sich uns die Vorstellungen von Richtung und Entfernung auf.[3]) Denn entweder strebt der bewegte Punkt A immer oder überall nach dem andern Punkte B zu oder nicht. Nur jener Fall ist bestimmt. Daher kann zunächst nur er Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung sein. Insofern nun der Punkt A dem Punkte B unausgesetzt zustrebt, ist die entstandene Linie AB Richtung, und insofern er in jener Richtung wirklich bis B geht, ist sie Entfernung. Nennen wir also die so entstandene Linie AB eine Gerade, so haben wir die Erklärung: Die gerade Linie ist Richtung oder[4]) Entferung.“

„Wie hängen nun Richtung und Entfernung zusammen? Gehen wir von A nach B, dieselbe Richtung beibehaltend, so

---

[1]) Diese letzte Unterscheidung ist mir nicht klar. Identische Gerade — und um solche handelt es sich nach den vorhergehenden Betrachtungen — haben doch eo ipso identische Lage, ganz unabhängig von ihrer Begrenzung. Oder sollten hier nur Strecken gemeint sein? Doch wohl nicht. Übrigens sagt Arneth selbst im Anfang dieses Absatzes: „Die Lage einer Geraden, ihre Richtung, wird bestimmt.“ Wozu da diese Unterscheidung?

[2]) Hier wird nun wieder nur auf den Abstand geachtet.

[3]) Doch nicht jetzt erst bei der Vorstellung der sämtlichen Linien, sondern direkt beim Setzen zweier Punkte.

[4]) Warum nicht Richtung und Entfernung?

können wir uns über B hinaus immer wieder Punkte denken, auf welche wir zugehen, ohne unsere Richtung zu ändern. Die Gerade als Richtung läuft also nach der einen Seite ins Unendliche. Wir können aber auch von B nach A gehen. Die Richtung BA ist der Richtung AB entgegengesetzt, aber beide verhalten sich zu einander, dafs durch die eine die andere gegeben ist. So wie die Richtung AB ins Unendliche läuft, so läuft auch die Richtung BA ins Unendliche, d. h. die Gerade als Richtung durchläuft den unendlichen Raum. Mithin kann sie als Richtung nicht zugleich die Entfernung vorstellen, denn diese mufs immer zwischen zwei bestimmten Punkten gedacht werden. Als Entfernung jedoch ist die Gerade auch Ausdruck der Richtung."[1])

Hieran schliefsen sich die bekannten Axiome der Geraden, die in folgender Fassung noch einmal bestimmter formuliert werden: „Hiermit haben wir auch die Abhängigkeit der Elemente der Geraden gefunden. Dieselben sind Punkte. Die Punkte einer Geraden sind unendlich viel. Aber durch zwei sind alle übrigen bestimmt und zwar:

1) „Wenn die Gerade Richtung ist, so sind alle ihre Punkte durch zwei beliebige Punkte bestimmt.

2) Wenn die Gerade Entfernung ist, so ist sie durch die zwei Punkte bestimmt, welche nur auf einer Seite Punkte der Geraden neben sich haben, d. h. durch die Endpunkte."

Alsdann wird die Gerade als ein Postulat bei zwei gegebenen Punkten und zwar in ihrer Unendlichkeit bestimmt. — In dieser ganzen Betrachtung ist Entfernung noch nicht in dem Sinne von Abstand genommen. Darauf kommt Bartholomäi erst durch die Betrachtung der krummen Linie, „die auch Entfernung ist." Jedoch gilt:

1) „Nur die Gerade ist bestimmter Ausdruck der Entfernung, nicht die krumme Linie.

2) Die Gröfse dieser Entfernung ist vollkommen

---

[1]) Meiner Meinung nach ist die Gerade beides zugleich, Richtung und Abstand. Auch wenn keine bestimmten Punkte gedacht werden, so liegt schon in der Möglichkeit, sie jederzeit zu setzen, der der Geraden inhärente Begriff des Abstandes.

bestimmt, während sie bei anderen Linien bald gröfser, bald kleiner ausfällt.

3) Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten."

---

v. Forstner, Grundrifs. — Berlin 1826.

„Stellt man sich zwei Punkte vor, so sind zwischen diesen unendlich viele Linien möglich, die bald länger, bald kürzer sein werden. Unter allen diesen Linien kann aber nur eine die kürzeste sein und diese heifst die gerade Linie."[1])

Hieran knüpfen sich dann in Grund- und Zusätzen die Eigenschaften der Geraden. Der Begriff der Richtung wird ganz vermieden, an seiner Stelle wird von Lage gesprochen.

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs. — 1843.

„Die Linie heifst eine Gerade, wenn kein Punkt derselben, insofern als man sie sich um zwei in ihr angenommene Punkte drehen läfst, eine Verrückung erleidet."

Nachdem sodann die weiteren Eigenschaften der Geraden besprochen sind, heifst es in einer Anmerkung: „Die gerade Linie ist ein einfacher Begriff; durch Erklärung eine deutlichere Vorstellung von der geraden Linie verlangen zu wollen, ist eine schwierige Sache."

Frankenbach, Lehrbuch. — Liegnitz 1889.

„Eine Linie heifst gerade, wenn ein beliebiger Teil derselben unter allen Umständen mit der übrigen Linie zusammenfällt, sobald zwei Punkte des Teils mit zwei Punkten der Linie irgendwo zusammenfallen."

Frantz, Die Philosophie der Mathematik.[2]) — Leipzig 1842.

---

[1]) Man vergleiche meine Bemerkung zu dem Zitat von Helmholtz.

[2]) Dieses Zitat ist nur als Beweis gegeben für die unglaublichen Leistungen auf dem Gebiete der mathematischen Philosophie, die man der Hegelschen Schule zu verdanken hat. Es sei übrigens nicht unerwähnt, dafs die metamathematischen Untersuchungen von vielen nicht günstiger beurteilt werden.

p. 68: „Wie sich uns jetzt der Raum bestimmt hat, ist er die Negation seiner als des Aufsereinanders. Dieses ist selbst der Raum, so ist er in sich selbst die Negation seiner, der Punkt. Als der Punkt ist er nicht, oder vielmehr er ist nur die Abstraktion. Die Negation des Aufsereinanders ist jetzt eben des Raumes Bestimmung, nicht sein abstraktes Nicht; es ist seine Negation, und damit selbst räumlich, die gerade Linie, — die erste Dimension. Dafs diese Linie gerade sei, liegt darin, dafs sie nur die Räumlichkeit des Punktes zur Bestimmung hat, somit einfach bestimmt ist."

„Indem sich der Raum als die gerade Linie gesetzt hat, unterscheidet er sich darin von sich selbst. Er hat sich als Linie gerichtet in sich selbst."

Und so orakelt Frantz noch weiter.[1])

Helmes, Elementar-Mathematik. II. — Hanau 1874.

p. 4: „Von allen Linien ist ausgezeichnet durch die Einfachheit und Ursprünglichkeit ihrer Vorstellung die gerade Linie oder die Gerade. Sie läfst sich nicht definieren oder unter einen noch höheren Begriff stellen, aber was sie von allen anderen ... unterscheidet, läfst sich bestimmt aussprechen und zum Bewufstsein bringen."

1) „Zwischen zwei Punkten können wir uns immer nur eine gerade, aber unendlich viele krumme Linien denken."

Dabei wird in Verlauf der Betrachtung auf die Drehung, wenn zwei Punkte fest sind, näher eingegangen; aufserdem auf die Eigenschaft der Kongruenz (der Möglichkeit der Deckung). Es heifst dann: „Die Ursprünglichkeit und Gemeinsamkeit der Vorstellung von der geraden Linie beruht auf den gleich ursprünglichen und gemeinsamen Vorstellungen der Richtung und der Entfernung von einem Punkte im Raume nach einem anderen, als deren Ausdruck und räumliche Darstellung wir

---

[1]) Und dieser Hegelianer sagt in der Vorrede: „.... Die Philosophie, im Bewufstsein ihres weit höheren Wissens, hat sich von der Mathematik gleichgültig, um nicht zu sagen verächtlich, abgewandt." Wäre ihr dieser Bearbeiter doch abgewandt geblieben!

uns eben die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten denken.“[1])

2) Die Richtung wird durch die Beispiele des Lichtstrahls,[2]) des Weges eines fallenden Körpers, des durch ein Gewicht gespannten Fadens erläutert und gesagt, „dafs hierdurch diese gemeinsame Vorstellung von gerader Linie und Richtung begründet und befestigt wird.“

3) Dafs die andere Grundvorstellung der Entfernung zwar für die Verbindung zweier Punkte durch mehrere gerade Linien streng und einfach bewiesen werden kann, nicht aber in Bezug auf eine krumme Verbindungslinie, wird zugegeben.[3])

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. — Mainz 1815.

p. 38: „Die geometrische Linie, als einfachste Ausdehnung blofs in die Länge, ist ein abgezogener Begriff, und wird in dieser Eigenschaft als Grenze der geometrischen Fläche .... durch Schlüsse, nicht aber durch eine willkürliche Erklärung erkannt .... Bei diesen Schlüssen ist der Verstand unbekümmert um die wirkliche und abgesonderte Darstellung (Ver-

---

[1]) Helmes geht also von derselben Ansicht aus wie ich; wenn es auch nicht direkt ausgesprochen wird, so liegt doch in der Fassung dieser Betrachtungen, dafs die Gerade als sekundärer Begriff gedacht wird.

[2]) Plato definiert: „*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*“ .... deren innere Punkte den Endpunkten im Wege (im Lichte) stehen.“

[3]) Im XII. Abschnitt wird der Grundsatz aufgestellt: „Die Sehne ist kleiner als der zugehörige Bogen.“ Dazu bemerkt Helmes in einer Anmerkung: „In einer allgemeinen Fassung, wie sie zur Benutzung für krumme Linien überhaupt notwendig sind, spricht Archimedes obigen Grundsatz als Voraussetzung aus. Seine Richtigkeit zu veranschaulichen, ist rätlich (vgl. Legendre IV, 9; Aschenborn, Geom. § 22; Heis und Eschweiler, Geom. III. 18); aber ein Beweis ist solche Veranschaulichung nicht.“ Es wird dann noch auf einen „sehr beachtenswerten“ Versuch des Prof. K. Hattendorf, die Lücke auszufüllen, aufmerksam gemacht. — Es ist mir unerfindlich, warum Helmes plötzlich Skrupel aufsteigen, während er doch oben die Entfernung als einen mit der Richtung gleich ursprünglichen und gemeinsamen Begriff (so würde doch besser statt Vorstellung zu sagen sein) bezeichnet.

sinnlichung oder Verzeichnung) dieser Begrenzungen am Raume. Alle Konstruktionen von Punkten etc. sind im Grunde nichts anderes, als Sinnbilder dieser geometrischen Gegenstände; auch will man durch diese Bilder nur die Stelle bezeichnen, wo man sich die geometrischen Punkte etc. als vorhanden denken soll.“

„Man kann nur den Begriff der geraden Linie aussprechen, aber nicht weiter erklären, weil er keine andere Merkmale als gerade Richtung in sich begreift, und dieses Merkmal ist nichts anderes als gerade Linie.“

„Mit einem Worte: Der Begriff von der geometrischen Linie wird durch Schlüsse erworben, aber der von der geraden Linie mufs sozusagen in die Geometrie mitgebracht werden.“

Mit Recht wird alsdann hervorgehoben, dafs die genetische Erklärung der Geraden durch Bewegung eine erschlichene ist, denn wenn man sage, die gerade Linie entstehe durch Bewegung nach einer Richtung, so sei damit die gerade Linie schon als früher vorhanden gekennzeichnet und auf ihr bewege sich der Punkt.[1]) Dagegen wird die Eigenschaft der geraden Linie, die kürzeste zwischen zwei Punkten zu sein, als des Beweises bedürftig bezeichnet.

Es wird alsdann auf die Technik der geraden Linie, wie sich Metternich ausdrückt, ausführlich eingegangen d. h. auf die Versinnlichung und zwar erstens durch den Lichtstrahl und zweitens durch einen gespannten Faden.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 11: „Zwei Linien können auf unzählige Arten so aneinander gestützt werden, dafs zwei Punkte der einen mit zwei Punkten der andern zusammenfallen.“[2])

---

[1]) Man darf diese Erzeugung der Vorstellung der Geraden nicht verwechseln mit der Zusammenfassung aller von einem Punkte aus nach derselben Richtung liegenden Punkte in der Geraden.

[2]) Ich mufs offen gestehen, dafs mir der Sinn dieser Auseinandersetzung nicht klar geworden ist, da ich nicht wufste, welche Bedeutung der Ausdruck „aneinander stützen“ hat.

Wenn aber zwei Linien bei allen solchen Lagen nicht allein in diesen zwei Punkten, sondern auch in allen übrigen Punkten einander decken, so heifsen sie gerade Linien."

„Anmerkung. Ob eine Linie gerade sei, kann also nur durch eine andere Linie erkannt werden. Daher ist es unmöglich, sie unabhängig für sich zu erklären."[1])

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente etc.

Nach der philosophischen Bestimmung der den Begriff der Geraden bildenden Denkvorgänge, die sich auf die unmittelbare Verbindung zweier Elemente im Denken stützen, heifst es: „Die gerade Linie ist identisch mit dem Begriff der kürzesten, weil beide Attribute hierbei nichts anderes besagen als die logische Forderung „zwei Elemente (Punkte) unmittelbar im Denken zu verbinden." Diese unmittelbare Verbindung im Nebeneinander kann nun nach den beiden komplementären Möglichkeiten heifsen:

unmittelbare = unvermittelte Richtung.

unmittelbare = unvermittelte Ausdehnung.

Der Begriff gerade Linie bedeutet also zugleich identische Richtung und kürzeste Entfernung, und diese beiden Begriffe konstruieren ein und dasselbe Gebilde, so lange die kürzeste Entfernung keinen weiteren Bedingungen unterworfen wird.[2]) Verschiedene gerade Linien, wie sie von der Hypergeometrie postuliert werden, sind eben solche Alogismen, wie verschiedene Geradheiten, verschiedene Sätze der Identität."

„Die gerade Linie ist einesteils ein Gröfsenbegriff, weil sie nach der Entfernung ihrer Grenzen, nach der Ausdehnung gemessen werden kann. Als bestimmte Richtung ist

[1]) Dies scheint mir eine gründliche Verkennung der wirklichen Fragen zu sein, die hier in Betracht kommen.

[2]) Darnach könnte man die Ebene auch definieren als diejenige Fläche, auf (in) welcher die kürzeste Entfernung mit der kürzesten Entfernung im Raume identisch ist; oder um mich eines Helmholtzschen Ausdrucks zu bedienen, in welcher die geradeste Linie die gerade Linie ist.

sie aber auch ein qualitativer Begriff; denn „Richtung und Geradheit“ kann nicht vermehrt oder vermindert werden. Eine bestimmte Gerade ist demnach eine Gröfse von bestimmter Qualität, verschieden von der Qualität einer jeden anderen Richtung. Ebenso wie in der allgemeinen Kombinatorik zeigt sich also auch in der Geometrie, dafs schon das einfachste Gebilde die beiden generellen Begriffskategorien „Quantität, Qualität“ nicht allein zuläfst, sondern peremptorisch fordert.“[1])

In quantitativer Hinsicht findet die einfache Ausdehnung ihre Deutung in der arithmetischen Zahl.

Steiner, Systematische Entwicklung etc. Gesammelte Werke. I. p. 237:

„In der Geraden ist eine unzählige Menge unmittelbar aufeinander folgender Punkte denkbar, die sich, von irgend einem derselben ausgehend, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin ins Unendliche erstrecken.“

Voraus geht die Bemerkung: „Die in der Geometrie erforderlichen Grundvorstellungen sind: der Raum, die Ebene, die Gerade und der Punkt.“

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

„Unter allen denkbaren Bewegungen eines Punktes ist die einfachste die in gerader Linie. Es ist unmöglich, von einer solchen eine Erklärung zu geben, wodurch ihr Begriff auf einfachere Vorstellungen zurückgeführt würde, da sie zu den unmittelbar gegebenen Grundvorstellungen der Geometrie gehört.“

Es folgen dann die bekannten Sätze über die gerade Linie, die „in der ursprünglichen Vorstellung der geraden Linie liegen.“

---

[1]) Wie sehr ich mit den Ausführungen des Verfassers einverstanden bin, brauche ich wohl kaum besonders hervorzuheben. Man vergleiche meine Ausführungen am Anfange dieses Kapitels.

Becker, Friedr., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. — Progr.

„Die Bewegung eines Punktes kann nach einer bestimmten Stelle hin[1]) gerichtet sein; der entstehende Weg (Linie) ist alsdann von einfachster Gestalt und heifst eine gerade Linie (Gerade). Das Bildungsgesetz einer Geraden liegt also in der Unveränderlichkeit ihrer Richtung.[2]) Zu ihrer Bestimmung bedarf es also eines ihrer Punkte und ihrer Richtung, welche auch durch einen zweiten Punkt, den sie durchlaufen soll, gegeben sein kann."

Es wird dann noch auf die Drehung bei zwei festen Punkten und die Kongruenz der Geraden eingegangen, sowie die Bestimmung der Entfernung gegeben.

Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Trier 1879.

Punkt, Gerade und Ebene werden als „absolut einfache, gewissermafsen atomistische und daher auch undefinierbare Grundformen oder Elemente" bezeichnet.

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1885.

„An die dritte Erklärung (Euklids) schliefst sich die Definition der Geraden, als einer Linie, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt.[3]) Wie indes

---

[1]) D. h. nach einem zweiten Punkt.

[2]) Man vergleiche das Zitat aus Grunerts Archiv (v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie).

[3]) Zu dieser Definition bemerkt J. Kober in „Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe." H. Z. I. p. 230: „Der Begriff „gerade" hat mit dem „Liegen zwischen zwei Punkten" zunächst gar nichts zu thun; der Gedankengang, der beide verknüpft, durchläuft erst den Begriff der „Richtung" (die dann allerdings durch den zweiten Punkt bestimmt wird). Daher giebt diese Erklärung nicht den ursprünglichen Begriff der Geraden, sondern nur eine Ableitung, eine Folge desselben. (Eine Definition soll aber den ursprünglichen Begriff geben.) — Der Schüler, der nicht schon eine richtige Vorstellung der geraden Linie hat, kann sie aus dieser Definition nimmermehr erlangen." S. f. S.

das „auf einerlei Art“ ($\dot{\epsilon}\xi$ $\ddot{\iota}\sigma o v$) zu verstehen sei und wie wir uns darüber Gewifsheit verschaffen können, dafs eine Linie wirklich diese Eigenschaft besitzt, wird uns freilich nicht mitgeteilt. Jedenfalls müfsten wir doch die Formen aller Linien, die in der Ebene oder im Raume möglich sind, untersuchen, um entscheiden zu können, ob es überhaupt eine und nur eine Linie giebt, der die vorgeschriebene Eigenschaft zukommt.“

Schon Proclus habe richtig erkannt, dafs dieselbe Eigenschaft auch sämtlichen Kreisen und den Schraubenlinien oder cylindrischen Spiralen zukomme. Aufserdem ändere sich der Abstand zweier Punkte innerhalb der Linie[1]) nicht, wenn die Gerade ohne Dehnung gebogen werde. Auch die Definitionen des Plato „die Gerade ist eine Linie, deren Inneres durch das Äufserste verdeckt wird“ und des Archimedes „die Gerade ist die kürzeste unter denen, die gleiche Grenzen haben“ werden verworfen, die letztere auch deshalb, weil sie „einen neuen, noch nicht erklärten Begriff, welcher der reinen Geometrie oder der Geometrie der Lage fremd ist,“ einführe. Es werden dann eine Reihe der gebräuchlichen Definitionen der Geraden angeführt, auch diejenige, die sich auf den Begriff der Richtung[2]) stützt. Beez bemerkt dazu: „Ob der Begriff der Richtung

„Nicht einmal als Beweismittel ist sie durchaus brauchbar,“ denn es sei nicht korrekt, sich den Schenkel eines Winkels als Verbindungslinie zweier Punkte zu denken. Auch sei es ein Zeichen der Schwäche dieser Definition, dafs in der Folge die ausdrückliche Forderung gestellt würde, dafs eine gerade Linie verlängert werden könne, was „für jedes Kind von selbst verständlich“ sei.

Auf die Folgen dieser Erklärung für die Definition von Winkeln und Parallelen wird hingewiesen.

[1]) Der Zusatz „innerhalb der Linie“ fügt dem Begriffe des Abstandes eine Bedingung, also ein neues, fremdes Moment zu: ähnlich, wie wenn ein Punkt auf einer (krummen) Fläche sich in der Richtung auf einen andern Punkt bewegen soll. In beiden Fällen werden die reinen Grundbegriffe der Richtung und des Abstandes getrübt. Man mufs daher bei dem Gebrauche dieser bedingten Begriffe sehr sorgfältig darauf achten, dafs sie von den Grundbegriffen wohl zu unterscheiden sind.

[2]) Es finden sich hierzu folgende Litteraturangaben: Wundt, Logik I. p. 451; A. Krause, Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome p. 80; Schlömilchs Zeitschrift Bd. XIV. Litteraturzeitung p. 46.

aber ein so klarer und präziser ist, dafs man durch ihn den Begriff Gerade deutlich erklären könne, ist mir sehr fraglich." Aus den angeführten Beispielen geht hervor, dafs die Begriffe der fortschreitenden und der drehenden Bewegung nicht genügend auseinander gehalten werden, so dafs es nicht verwunderlich ist, wenn Beez zu dem Resultat kommt, „nicht die Richtung definiere die Gerade, sondern umgekehrt die Gerade die Richtung."

Donadt, Das mathematische Raumproblem. — Leipzig 1881.

„Die Konstruktion, welche zwei entgegengesetzte Richtungen von übereinstimmender Lage zusammenfafst, heifst Gerade."

Nachdem dann sechs Axiome aufgestellt sind, deren drittes lautet: „Jede Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt oder zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich oder zwei Gerade können keinen Raum einschliefsen" wird als siebentes hinzugefügt: „Die zwei Punkte verbindende Gerade mifst deren Entfernung."[1])

Kaiser, Über einige Hauptpunkte des geometrischen Unterrichts. — Remscheid 1881.

„Die gröfsten Schwierigkeiten erheben sich, sobald man es versucht, den Begriff der geraden Linie in eine bündige Definition zu fassen. Hier scheinen in der That diejenigen Mathematiker das Richtigste zu treffen, welche die Vorstellung von der Geraden für so ursprünglich und einfach halten, dafs sie sich in einfachere Elemente nicht zergliedern läfst."

Kaiser kritisiert dann den Versuch von Duda, den dieser in seinem Programm, Die fundamentalen Lehrsätze von der Geraden etc., Brieg 1879, gemacht hat, den Begriff der Geraden mit Hülfe von ineinander liegenden Rotationskörpern zu erklären (die Gerade bleibt schliefslich beim Abdrechseln eines Körpers übrig); er bemerkt dazu — und das gilt nicht

---

[1]) Das Axiom enthält noch mehr, ist aber hier nur soweit zitiert, als es für die vorliegende Frage von Bedeutung ist.

nur von diesem Versuch —: „Und wenn wirklich die Vorstellung der geraden Linie gerettet worden ist, so war sie nicht nur während, sondern bereits vor der Abdrehung in einer solchen Klarheit und Intensität vorhanden, daſs sie sich durch die Betrachtung jenes in nichts zerflieſsenden Vorgangs nicht wieder vernichten lieſs.“ — Die Zurückführung des Begriffs auf den Lichtstrahl wird aus guten Gründen verworfen und dafür als allein richtiges Erklärungsprinzip der Begriff der Richtung angegeben, von dem Kaiser sagt: „Ich halte denselben für so klar und fest in der Anschauung begründet, daſs er, ohne näher definiert zu werden, der genetischen Erklärung der Geraden zu Grunde gelegt werden kann.“ Ebenso wird der mit der Geraden verbundene Begriff der kürzesten Entfernung als ein „aus der reinen Anschauung flieſsendes Axiom“ bezeichnet.

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

„Diejenigen Linien, welche ihrer Ausdehnung nach in jeder Lage so aufeinander gelegt werden können, daſs sie in eine Linie zusammenfallen, heiſsen gerade Linien.“ „Jede Linie, welche die unendliche Ebene in zwei gleiche, einander in jeder Beziehung entsprechende Teile teilt, heiſst eine gerade Linie oder insofern sie beliebig (unendlich) lang gedacht wird, kurzweg Gerade.“

Korneck bemerkt dazu: „Daſs obige Definition der Geraden, ebenso wie die entsprechende der Ebene, unanfechtbar ist, läſst sich durch Widerlegung der dagegen gemachten Einwände leicht zeigen.“

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852.

„Eine gerade Linie kann auf doppelte Art betrachtet werden. Insofern dieselbe durch zwei Punkte begrenzt gedacht wird, betrachten wir die Linie als die Entfernung beider Punkte und sprechen dann von der Länge der Linie. Sieht man dagegen von jeder Begrenzung der geraden Linie ab, so gelangt man zur Vorstellung der Richtung.“

Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid.[1])

Die Übersetzung selbst kann übergangen werden, da Proklos nur die üblichen Definitionen angiebt und dann eine, wie mir scheint, nicht ganz hierher gehörige Untersuchung über das Verhältnis der Geraden zu anderen Linien anstellt. In seiner Besprechung der Definition sagt Majer: „Diese (die Erklärung der Euklidischen Definition) giebt Proklos dahin ab, die Gerade sei nach Euklid die Linie, welche eine Ausdehnung habe gleich dem Zwischenraum zwischen den Punkten auf ihr . . . Wie aber in den Worten Euklids dies liegen soll, ist mir, wie vielen anderen, nicht klar. Schon in alter Zeit war man sich der Schwierigkeit, eine befriedigende Definition der Geraden zu geben, vollkommen bewufst; daher die Menge der Definitionen, die sich schon im Altertum vorfindet, sowie die verschiedenen Versuche den Worten des Meisters einen befriedigenden Sinn unterzulegen. Aber schon Savilius lectiones tresdecim, S. 77 sagt: Hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quam recentiorum non intelligere; seiner Ansicht sind auch Camerer, Pfleiderer und Hauber. (Cf. hierüber Thienemann, Geometr. Abhandlung über Erklärungen etc. Göttingen 1862.)"[2])

Es heifst dann, Borellius (Euclid. rest. p. 4) habe recht, dafs man nicht wisse, was der Abstand zweier Punkte sei, denn der Begriff des Abstandes zweier Punkte setze den Begriff der geraden Linie voraus.[3]) Die bekannte Drehungs-Erklärung habe Thienemann nach Saccherius gegeben. Die bekannte Platonische Erklärung wird als gute Veranschaulichung gelobt.

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889.

Es wird von der Drehung um einen Punkt ausgegangen,

---

[1]) Man vergleiche: Friedlein, Untersuchung der sogenannten Definitionen Heros, in H. Z. II p. 181 und das Zitat aus Beez.

[2]) Man vergleiche das Zitat aus Pfleiderer.

[3]) Ich habe die entgegengesetzte Ansicht. Auch glaube ich, dafs man recht gut weifs, was der Abstand zweier Punkte sei.

dann diejenige betrachtet, bei der zwei Punkte festgehalten werden. Dabei behalten noch unzählig viele andere Punkte ihre Lage unverändert bei; dieselben folgen ohne Unterbrechung aufeinander und bilden zusammen eine Linie.[1]) „Ein Punkt P, der von einem der festen Punkte anfangend diese Linie beschreiben würde, müſste alle ihre Punkte durchlaufen, und zwar jeden nur ein einzigesmal. Den Inbegriff aller dieser Punkte nennen wir gerade Linie oder Gerade (Drehungsaxe).“

Müller sagt: „Anschauung und Begriff der geraden Linie sind hiermit entwickelt und ihre ersten Eigenschaften abgeleitet, ohne daſs zu ihrer Erklärung Grundsätze zu Hülfe genommen werden muſsten.“[2]) Richtung und Abstand werden dann noch in einigen folgenden Erläuterungen beiläufig erwähnt.

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878.

„Eine Linie, welche zwischen jeden beliebigen zwei in ihr liegenden Punkten eine einzige mögliche Lage hat, heiſst gerade Linie.“

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie.

„Axiom I. In unserem Raume existiert eine Linie, welche mit jeder ihrer Kopien höchstens einen Punkt gemein hat, falls sie nicht ganz mit derselben zusammenfällt: Diese Linie wird Gerade genannt.“

Sie ist ein Elementargebilde.

Durch eine eingehende Untersuchung von fünf über eine

---

[1]) Die stetige Folge der Punkte, die ihre Lage unverändert beibehalten, ist doch nicht aus dem Begriff der Drehung ersichtlich. Gerade diese Stelle ist recht geeignet, darauf hinzuweisen, daſs der Begriff der festen Linie, um die die Drehung erfolgt, vor dem Begriff der Drehung da ist, d. h. eben daraus erkannt wird, daſs durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist.

[2]) Man vergleiche die vorige Anmerkung. Ist es denn kein Grundsatz in der obigen Erklärung, daſs unzählig viele Punkte fest bleiben? und ist es kein Grundsatz, daſs diese unzählig vielen Punkte stetig aufeinander folgen? Also zwei Grundsätze auf einmal.

mögliche Elementarlinie aufgestellten Sätzen kommt man zu dem Axiom: „Alle etwa existierenden Elementarlinien sind Kopien voneinander."

„Über dieses 'etwa' kommt man nicht hinaus, falls man nicht durch ein Axiom die Existenz des Gebildes feststellt. Das Axiom I., welches unter dem Namen 'Gerade' die Elementarlinie einführt, ist nicht mehr und nicht weniger als der Ausdruck unserer Überzeugung von dem Vorhandensein einer solchen Elementarlinie."[1])

Hiermit seien die Betrachtungen über die Gerade abgeschlossen.

Die fünf Kapitel des vorliegenden Bandes haben sich mit der Behandlung der geometrischen Grundlagen beschäftigt. Verfasser hofft, zur Klarlegung derselben teils durch die kritische Übersicht über das vorhandene Material, teils durch seine eigenen Untersuchungen einen brauchbaren Beitrag geliefert zu haben und übergiebt sein Buch der nachsichtigen Beurteilung der mathematischen Lehrerwelt mit dem Bewufstsein, überall Vollständigkeit wenigstens angestrebt zu haben. Inwieweit der Gedanke, eine derartige kritische Zusammenstellung der Litteratur zu geben, Berechtigung habe, darüber wird der Erfolg zu entscheiden haben; jedenfalls halte ich es nicht für überflüssig, auch hier noch einmal darauf hinzuweisen, dafs die Zitate gerade bei den Grundbegriffen besonders zahlreich und ausführlich gegeben werden mufsten. Selbstverständlich wird bei anderen Fragen z. B. bei der Behandlung der Kongruenz sich das Zitatenbeiwerk auf ein Minimum beschränken können.

---

[1]) Dazu bemerkt Wernicke in einer Anmerkung: „So sagt auch Bolyai, dafs es sich nicht nur darum handle, die geometrischen Begriffe scharf zu bestimmen, sondern auch darum, ihr Sein im Raume zu beweisen. (Vergl. Frischauf, Elemente 34.)" Bei früherer Gelegenheit schon habe ich darauf hingewiesen, dafs es nach meiner Ansicht ganz ohne Bedeutung ist — und ich konnte auch gewichtige Stimmen in gleichem Sinne anführen — eine Untersuchung anzustellen, ob es in Wirklichkeit derartige Gebilde giebt oder nicht. Die Grundlagen können rein hypothetisch sein in Bezug auf ihre Existenz.

Der zweite Band wird im allgemeinen folgenden Inhalt haben: I. Richtung und Abstand; Lage von Punkten, Geraden und Kreisen in ihren gegenseitigen Beziehungen. — Maſsbeziehungen. — II. Parallelenaxiom. — III. Winkel. — IV. Geometrische Hülfsbegriffe, als da sind z. B. Kongruenz; Bewegung; Dimension; Begriff; Definition; Beweis; Erklärung; Forderung; Lehrsatz; Grundsatz; Gestalt; Gröſse; Lage; Figur; Geometrischer Ort; Symmetrie; Beweis etc. — V. Methode.

Alphabetisches Verzeichnis der zitierten Werke.

I. Kapitel.

Der Raum.

Seite

Bartholomäi, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. — Jena 1860 123

Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. — Zürich 1870 154

Becker, Elemente auf neuer Grundlage. — Berlin 1877 123

Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Berlin 1879 . . . 124

Behl, Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. — Hildesheim 1886 125

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844 141

Brewer, Lehrbuch der Geometrie und ebenen Trigonometrie. — Düsseldorf 1822 125

Crelle, Über Parallelentheorien. — Berlin 1816 142

Donadt, Das mathematische Raumproblem. — Leipzig 1881 . . 149

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877. 126

Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870 131

von Forstner, Grundrifs der Elemente der reinen Mathematik. Berlin 1826 155

Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Nachrichten 1868. No. 9 (Seite 193) . . . 155

Helmholtz, Über den Ursprung der geometrischen Axiome. — Pop.-wiss. Vorträge. — Braunschweig 1876 . . . . . . 128 u. 141

Klügel, Wörterbuch 140

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817 131

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879 133

E. Müller, Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869 . . . 133

J. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 134

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873 135

v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie. — Grunerts Archiv. Bd. 49 (Seite 178) 140

Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. — Leipzig 1887 135

Seite

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. — Göttinger Abhandlungen 1867 129
Rosanes, Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. — Breslau 1871 . . . . 128 u. 147
Schlegel, Über den sogenannten vierdimensionalen Raum. — Berlin 1889 142
Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Masses. — Leipzig 1874 136
Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 157
Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857 . 137
Sonnenburg, Lehrbuch der gesamten Elementargeometrie. — Bremen 1868 138
Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836 . . 139
Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874 . . 139
Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Masses. — Braunschweig 1887 140
Worpitzky, Elemente der Mathematik. III. — Berlin 1874 . . . 138

II. Kapitel.

Geometrie.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840 166
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 167
J. K. Becker, Elemente 163
J. K. Becker, Lehrbuch 163
Bretschneider 167
Brewer 163
Crelle, Über Parallelentheorien 168
Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826 . 169
Ebensperger, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Nürnberg 1850 163
Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. — Braunschweig 1888 . . . 169
F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. II. — Leipzig 1887 164
v. Forstner 169
Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. — Bern 1843 169
Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889 . 170
J. Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877 . 164
Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenburg 1870 170
Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. III 167
Klügel, Wörterbuch 166
Lambert, Organon 166
Legendre, Elemente der Geometrie. ed. Crelle. — Berlin 1844 . 164
J. Müller 164
Schindler, Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883 164

Seite
Schmitz-Dumont 168
Seeger, Elemente der Geometrie. — Wismar 1887 165
Thibaut, Grundriſs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822 . 165
Ulrich 165
Ziegler, Grundriſs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881 . . 165

III. Kapitel.

Raumgebilde.

Arneth 240
August, Lehrbuch der Mathematik. I. — Berlin 1852 190
Baltzer, Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874 193
Bartholomäi, Vorlesungen 195
Bartholomäi, Planimetrie 241
Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842 . . . 196
Becker, J. K., Elemente 196
Becker, J. K., Lehrbuch 198
Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiet etc.. 244
Becker, F., Die ebene Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870 233
Beckmann, Die geometrischen Grundgebilde etc. — Trier . . . 239
Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen i/V. 249
Behl 198
Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. — Köln u. Neuſs 1877 . 242
Bretschneider . . . . 173 u. 243
Brewer 199
Crelle, Über Parallelentheorien. — Berlin 1816 243
Crelle, Lehrbuch 251
Dronke, Die Elemente der ebenen Geometrie. — M.-Gladbach . 200
Ebensperger 200
Euklid, Elemente. — ed. Dippe. — Halle 200
Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876 203
Féaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Paderborn 1882 204
Fenkner 231
Focke und Craſs, Lehrbuch der Geometrie. — München 1878 . 233
v. Forstner 254
Francoeur 253
Frankenbach 256
Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870. 204
Gauſs, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Bunzlau 1885 . 205
Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857 . . 205
Gilles 206
Grunert 256
Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882 257
Heinze, Elementar-Geometrie. — Berlin 1877 207

Seite

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1867 . 231
Helmes, Die Elementarmathematik. II. — Hannover 1874 . . . 257
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881 207
Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884 208
Hoffmann, J. C. V., Vorschule der Geometrie. — Halle 1874 . . 208
J. J. J. Hoffmann, Geometrische Anschauungslehre. — Mainz 1839 228
Kästner, Anfangsgründe etc. — Wien 1788 230
Kambly, Die Elementar-Mathematik. II. — Breslau 1884 210
Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie 210
Köstler, Vorschule der Geometrie. — Halle 1887 211
Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Halle 1889 211
Kommerell, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882 211
Koppe, Die Planimetrie. — Essen 1885 231
Kries 211
Kröger, Leitfaden für den Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886 212
Kruse, Elemente der Geometrie. I. — Berlin 1875 212
Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 212
Leesekamp 213
Legendre (Crelle) 213
Lieber und von Lühmann, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1877 213
Liese, Angewandte Elementar-Mathematik. I. — Berlin 1875 . . 214
Löser, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Weinheim 1882 . 232
Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. — Berlin 1874 . 214
Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881 214
Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien. — Leipzig 1881 . . 214
Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879 214
E. Müller 214
H. Müller, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1874 . . 216
J. Müller 216
J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844 . . . 217
Nagel 217
Ohm, Die reine Elementar-Mathematik. — Berlin 1835 228
Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823 259
v. Pfeil 239
Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827 . 217
Rausenberger 218
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 219
Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht. — Berlin 1886 219
Reidt, Elemente. II. — Berlin 1888 221
Rottock, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888 221
Rummer, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Heidelberg 1869 221
Sadebeck, Elemente der Geometrie. — Breslau 1872 221
Schindler 221

Seite

Schlegel, Raumlehre. — Leipzig 1872 222
Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. II. — Wolfenbüttel 1879 223
Schlömilch 224
Schmitz-Dumont. 248
Schurig 224
Schwabe und Schmidt 224
Schweder 224
Snell. 224
Sonnenburg 224
Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Potsdam 1873 . . 225
Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888 225
Stegmann, Grundlehre der ebenen Geometrie. — Kempten 1886 225
Sturm, J. B., Die Grundanschauungen der Mathematik 247
von Swinden, Elemente der Geometrie. ed. Jacobi. — Jena 1834 225
Thibaut 225
Ulrich 233
Unger, Die Geometrie des Euklid. — Erfurt 1833 231
Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Kassel 1881 226
Wernicke 236
Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. I. — Halle 1863 226
Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877. 226
Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 226
Worpitzky 227
Wunder, Lehrbuch der Mathematik. III. — Leipzig 1840. . . . 228
Ziegler. 228

IV. Kapitel.

Die Ebene.

Arneth 288
August. 288
Baltzer 271
Bartholomäi, Planimetrie 288
Beck 289
F. Becker 285
J. K. Becker, Lehrbuch 289
J. K. Becker, Elemente 273
Beez 295
Boymann. 289
Bretschneider 286
Crelle, Zur Theorie der Ebene 262
Crelle, Zur Parallelentheorie 286
Crelle, Lehrbuch 287
Deahna, Demonstratio theorematis, esse superficiem planam . . 272
Dronke 274

Seite
Ebensperger 275
Erdmann 275
Euklid 276
Fabian 276
F. Fischer 289
Frankenbach 289
Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842 . . . 290
Frischauf, Absolute Geometrie 291
Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864 292
Gaufs 272
Grunert 287
Heinze, C. 293
Helmes 293
Helmholtz, Pop.-wiss. Vorträge. II. 2. 285
Klügel, Wörterbuch 284
Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879 298
Kruse 276
Kunze 277
Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. — Stuttgart 1881 299
Martini, Die Krümmung ebener Kurven. — Rottweil 1877 . . . 299
Menger 294
Milinowski 277
E. Müller 278
J. Müller 278
J. H. T. Müller 294
H. Müller, Über den ersten planimetr. Unterricht. — Berlin 1889 298
Paucker 295
Pfleiderer 278
Rausenberger 279
Schindler 280
Schlegel, Raumlehre 281
Schlegel, Lehrbuch 282
Schmitz-Dumont 295
v. Swinden 282
Thibaut 283
Ulrich 284
Wernicke 298
Wolff 284

V. Kapitel.

Die Gerade.

Arneth 346
August 309

Seite

Baltzer 310
Bartholomäi, Vorlesungen 311
Bartholomäi, Planimetrie 347
Beck 311
F. Becker 355
J. C. Becker, Elemente 311
J. C. Becker, Lehrbuch 313
Beckmann 355
Beez 355
Behl 314
Benzenberg, Anfangsgründe. — Düsseldorf 1818 338
Bretschneider 344
Crelle, Parallelentheorieen 345
Crelle, Lehrbuch 346
Donadt 357
Fabian 314
Féaux 315
v. Forstner 349
Francoeur 349
Frankenbach 349
Frantz 349
Gaufs 315
Heger 315
Heinze 316
Helmes 350
Helmholtz, Vorträge. III 344
Henrici und Treutlein 316
Hoch 316
Hoffmann 317
Junghans, Lehrbuch der el. Geometrie. — Berlin 1879. 317
Kaiser, Über einige Hauptpunkte des geometr. Unterrichts. — Remscheidt 1881 357
Kästner, Anfangsgründe 325
Kästner, Abhandlungen. III. 326
Kästner, Abhandlungen. I. 327
Klügel 327
Kober 318
Köstler, Leitfaden 318
Kommerell 318
Koppe 339
Korneck 358
Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852 358
Kries 318
Kruse 319

	Seite
Kunze	320
Legendre	321
Lieber und von Lühmann	321
Liese	322
Majer	359
Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. — Mainz 1815	351
Milinowski	322
Mink	322
E. Müller	322
Hub. Müller	324
H. Müller	359
J. H. T. Müller	324
Ohm	338
Paucker	352
Petersen, Lehrbuch. ed. Fischer-Benzon. — Kopenhagen 1881	325
v. Pfeil	341
Pfleiderer	325
Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878	360
Rausenberger	331
Recknagel	332
Reidt, Anleitung	332
Reidt, Elemente	332
Schindler	332
Schlegel, Raumlehre	333
Schlegel, Elemente	333
Schmitz-Dumont	353
Snell	333
Spitz	333
Steiner, Gesammelte Werke. I. p. 237	354
v. Swinden	334
Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847	354
Thibaut	335
Ulrich	339
Unger	338
Wagner	340
Wernicke	360
Wiegand	336
Wolf	326
Wolff	337
Worpitzky	337
Ziegler	338

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 2.80.

Einzeln:
I. Teil. Trigonometrie. 3. Aufl. [84 S.] 1885. ℳ 1.80.
II. — Stereometrie. 3. Aufl. [48 S.] 1886. ℳ 1.—

———— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. ℳ 1.20.

Reishaus, Dr. **Th.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Stralsund, Vorschule zur Geometrie. 2 Abteilungen. gr. 8. 1879. geh. ℳ 3.20.

Einzeln:
I. Abt. Lehrbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [IV u. 134 S.] ℳ 2.—
II. — Wiederholungs- und Aufgabenbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [86 S.] ℳ 1.20.

Schilke, Dr. phil. **E.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i. L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] gr. 8. 1890. kart. ℳ 1.—

Schlömilch, Dr. **Oskar**, Geh. Schulrat im Königl. Sächsischen Kultusministerium, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maſses. Ein Lehrbuch. gr. 8. geh. ℳ 7.60.

Einzeln:
I. Heft. Planimetrie. 7. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 163 S.] 1888. ℳ 2.—
II. — Ebene Trigonometrie. 6. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 97 S.] 1883. ℳ 1.60.
II. Teil. Geometrie des Raumes. 3. Auflage. [VII u. 266 S.] 1874. ℳ 4.—
Heft I und II bildeten früher den I. Teil; der II. Teil wird bei der nächsten Auflage in Heft III und IV zerfallen.

Schotten, Dr. **Heinrich**, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. gr. 8. 1890. geh.

Schüller, **W. J.**, Seminarlehrer in Boppard a/Rh., Verknüpfung einfacher Raumgebilde mit dem Rechnen. gr. 8. 1890. geh. (Ung. 4 Bogen.)

Schulze, Dr. **Karl**, Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg, Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- u. Realschulen. 2 Hefte. Mit Figuren im Text. gr. 8. kart. je n. ℳ 1.20.

Einzeln:
I. Heft. Trigonometrie. [VIII u. 72 S.] 1890.
II. — Stereometrie. [IV u. 60 S.] 1890.

Thieme, Dr. **H.**, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluſs an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. ℳ 1.20.

Zehme, Dr. **W.**, Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. 6. Auflage. Mit 15 lithographierten Tafeln in besonderem Heft. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1880. geh. ℳ 2.40.

Zeuthen, **H. G.**, Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. 1882. geh. ℳ 2.—

INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

DR. HEINRICH SCHOTTEN.

ZWEITER BAND.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

DR. HEINRICH SCHOTTEN.

ZWEITER BAND.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

Vorwort.

Länger als ursprünglich beabsichtigt war hat sich die Herausgabe des zweiten Bandes meiner vergleichenden Planimetrie verzögert. Aber mannigfache Hindernisse, deren Angabe hier überflüssig erscheint, standen im Wege.

Bei der Veröffentlichung des zweiten Bandes mufs ich zunächst den Herren Rezensenten des ersten Bandes meinen Dank aussprechen für die durchweg wohlwollende Beurteilung, die sie meinen Bestrebungen haben zuteil werden lassen. So erfreulich aber auch die einstimmige Anerkennung seitens der Kritik mich berührt hat, umso mehr war die Thatsache betrübend, dafs das Interesse der Fachgenossen sich meinem Buche nur in verschwindendem Mafse zugewendet zu haben scheint, so dafs der ideale Zweck, dem meine Arbeit gewidmet ist, eine Umschau des Geleisteten zu geben und „meine Fachgenossen über neuesten Stand wie Entwickelung der Planimetrie nach Inhalt und Methode zu orientieren,“[1]) bisher nur in sehr bescheidenen Grenzen sich verwirklicht haben dürfte.

Den Wünschen der Herren Rezensenten bin ich, soweit möglich, entgegengekommen; besonders habe ich an Stelle der früheren alphabetischen Reihenfolge der Zitate die chronologische eingeführt, wodurch die Übersicht über die Entwicklung der methodischen Fragen zu bedeutenderer Klarheit gelangt. Ich hoffe dadurch den Wert dieses „Zitatenschatzes“ wesentlich erhöht zu haben. Das wäre der beste Lohn für die allerdings nicht kleine Mehrarbeit.

Der Grundgedanke des vorliegenden Werkes hat, was mich besonders gefreut hat, allgemein Zustimmung und Beifall gefunden. Nur der Herr Rezensent im „Paed. Archiv“[2]) hat

---

[1]) S. Günther in seiner Besprechung des 1. Bandes H. Z. XXI. p. 529.

[2]) Paed. Arch. Band XXXIII. 1891. p. 760. — Auch diese Besprechung ist im übrigen durchaus anerkennend.

meine Aufgabe völlig mifsverstanden, wenn er sagt: „Zu bedauern ist, dafs der Herr Verfasser nicht zunächst seine Ansichten im Zusammenhange dargelegt hat.“ Das hätte ich bei der meiner Arbeit zugrunde liegenden Absicht nur dann thun können, wenn ich das ganze Werk auf einmal veröffentlicht hätte. Es ist aber doch wohl allgemein üblich, gröfsere Werke in einzelnen Bänden zu publizieren. Auch den Vorwurf des Herrn Rezensenten mufs ich zurückweisen, der darin liegt, dafs ich eine Reihe unwichtiger Lehrbücher beim Zitieren hätte weglassen können. Auch hier bin ich von ihm mifsverstanden worden. Es sollen ja nicht nur die wichtigen Arbeiten dem Leser vorliegen, er soll zugleich die Möglichkeit haben nachzuschlagen, wie irgend einer der mathematischen Schriftsteller über irgend einen wichtigen Punkt sich geäufsert hat: der Leser soll die Möglichkeit haben, die Auffassung auch derer kennen zu lernen, die selbst ohne Einflufs auf die Entwicklung geblieben sind. Denn auch die Kenntnis, wie sich Ansichten Bahn gebrochen und welche Ansichten allgemeinere Verbreitung gefunden haben, scheint mir lehrreich und interessant.

Von der ursprünglichen Absicht, im zweiten Bande auch auf die grundlegenden metaphysischen Fragen einzugehen, sowie eine ausführliche Darstellung der Entwicklung der Metageometrie zu geben, hat Verfasser aus praktischen Gründen Abstand genommen. Doch finden sich im dritten Kapitel Hinweisungen und Literaturangaben zu der letzteren Frage, da es sich bei dem Thema dieses Kapitels nicht umgehen liefs, hier und da das Gebiet der Metageometrie zu streifen.

Die ausführliche Behandlung und der Reichtum der Zitate, besonders im zweiten und dritten Kapitel, haben ferner dazu geführt, diesen zweiten Band auf die vorliegenden vier Kapitel zu beschränken. Es müssen also die im ersten Bande am Schlusse angekündigten Kapitel über geometrische Hülfsbegriffe und die Methode einem weiteren Bande vorbehalten bleiben.

II. Teil.

Richtung und Abstand als Grundlage der einleitenden Betrachtungen.

I. Kapitel.

Richtung und Abstand. Lagen- und Mafsuntersuchungen.

Im ersten Teile war schon angekündigt, dafs noch eine ausführliche Behandlung der Begriffe Richtung und Abstand folgen werde; und in der That bedürfen diese beiden Begriffe noch eines näheren Eingehens. Dabei würde eine gründliche Erörterung der Frage nach dem Wesen der Geometrie, insofern ob sie als Wissenschaft a priori oder als Erfahrungswissenschaft aufzufassen sei, unumgänglich sein; ja gerade diese beiden Begriffe scheinen geeignet zu sein, an die Spitze derartiger Erörterungen überhaupt gestellt zu werden. Dennoch hat es sich der Verfasser versagt, gerade auf diese Frage näher einzugehen, da das vorliegende Werk ja vorwiegend der Schule zu gute kommen soll und deshalb den Hauptwert auf die praktische Verwendbarkeit legen mufs. An anderer Stelle wird der Verfasser seinen Standpunkt in der berührten Frage ausführlich darlegen, hier soll nur so viel gesagt werden, dafs das Apriori der geometrischen Wissenschaft nach des Verfassers Ansicht einmal darin liegt, dafs wir es mit begrifflichen Abstraktionen (Idealgebilden) zu thun haben, dann aber darin, dafs diese Abstraktionen nach logischen Gesetzen des Denkens gebildet sind. Dafs Erfahrung mit in Frage kommt, wird wohl von keiner Seite geleugnet werden,[1]) aber nicht das ist das Entscheidende, dafs Erfahrung vorliegt, sondern darauf ist das Hauptgewicht zu legen, dafs diese Erfahrung auf gesetz-

[1]) Das liegt auch schon in Kants Worten „Begriffe ohne Anschauung sind leer"; Anschauung aber ist Erfahrung.

mäſsigem Wege der Denkthätigkeit verarbeitet wird resp. durch gesetzmäſsiges Denken geregelt wird; unsere Erfahrung macht die Geometrie nicht zur Erfahrungswissenschaft, die Art aber, wie sie zu stande kommt, macht sie zu einer Wissenschaft a priori.[1]) Wie sich die reine Anschauung, frei von Zufälligkeiten und subjektiven Fehlern, eine Funktion des Verstandes, von der sinnlichen Anschauung unterscheidet, so die Geometrie von den Erfahrungswissenschaften im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes. Nehmen wir z. B. den Begriff Dreieck, so ist es unhaltbar, darunter etwa ein schematisches Gebilde zu denken — alle unsere Vorstellungen sind bestimmte Vorstellungen —, sondern die Allgemeinheit des Begriffes liegt darin, daſs wir uns ein zwar ganz bestimmtes, aber von allen besonderen Bedingungen freies Dreieck vorstellen.

§ 1. Richtung.

Was nun den Begriff Richtung betrifft, so kann Verfasser sich von vornherein auf seine Ausführungen am Anfang des fünften Kapitels im ersten Bande beziehen. Es war gezeigt worden, daſs wir bei der Betrachtung der geometrischen Gebilde als selbständiger Formen — oder wie wir jetzt lieber uns ausdrücken wollen: als Begriffe — vom Punkte ausgehen müssen. Während uns nun die Betrachtung eines einzelnen Punktes nichts Unterscheidbares bietet, treten bei der Setzung zweier Punkte sofort zwei Begriffe — Prädikate, wie Bolzano[2]) sagt — in Evidenz: Richtung und Abstand. Wir haben es hier, wenn wir unsere Betrachtung vorläufig auf den Begriff

---

[1]) In dieser Wesenheit der Geometrie sehe ich daher ihre Apriorität d. h. ihre allgemeine Gültigkeit und ihre Notwendigkeit; daher auch die feste Überzeugung von ihrer Wahrheit.

[2]) Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804.

§ 6. „Da Ein Punkt für sich allein nichts Unterscheidbares bietet, . . ., so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung [S]ystem zweier Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken [de]r Punkte entspringen gewisse Prädikate (Begriffe) I. Entfernung, [Ric]htung.“

Richtung beschränken, mit einer Qualitätsbeziehung[1]) zu thun. Wir fassen hier den Begriff Richtung in dem reinen, ursprünglichen eng eingeschränkten Sinne, der eben nur in dem Auffassen zweier von einander getrennter Punkte auftritt. Darin, dafs wir unsere Gedanken von einem Punkte auf einen zweiten richten,[2]) liegt eben der Begriff Richtung — und dafs dies psychologisch mit einem Aufwand von Minimum an Arbeit geschieht, darin liegt das Wesen des Begriffes Richtung: zugleich aber — und das möge gleich hier ausgesprochen werden — sein Zusammenhang mit dem Begriffe Abstand, als dem kürzesten Wege von einem Punkte zum andern. Der Begriff der Richtung kann nicht zur Klarheit kommen, wenn wir nicht zwei Punkte zu Hilfe nehmen, von ihrer Betrachtung ausgehen. Auch die Zitate werden das zeigen; wer auch immer den Versuch macht, die Richtung zu erklären, geht von dem Setzen zweier Punkte aus. Ausgangspunkt und Zielpunkt bestimmen Richtung. Dabei ist nicht zu übersehen, dafs es für denselben Ausgangspunkt unendlich viele Punkte giebt, die als Zielpunkte identische Richtung ergeben, und dafs umgekehrt bei festem Zielpunkt auch unendlich viele Ausgangspunkte identische Richtung ergeben. Hier aber handelt es sich schon nicht mehr um den reinen Begriff Richtung, wir vergleichen hier schon Richtungen mit einander, wenn auch der besondere Fall eintritt, dafs diese Richtungen identisch sind. Der Sprachgebrauch hat sich nun auch bei der Anwendung des Begriffes Richtung erweitert. Wir werden unbedenklich sagen, sich auf einem Kreise in einer bestimmten

[1]) Nichts Quantitatives mischt sich ein: es kann durchaus nicht gesagt werden, wie grofs etwa ist die Richtung oder ist diese Richtung gröfser oder jene — ganz abgesehen davon, dafs hier schon der Begriff nicht mehr rein für sich auftritt. Nicht eine bestimmte Richtung ist es, die den Begriff ausmacht, sondern Richtung. Insofern als Richtung als Aufeinanderbeziehen zweier Punkte aufgefafst werden mufs, ist der Begriff eine Relation.

[2]) An Stelle des psychischen Vorganges können wir auch direkt das ins Auge Fassen eines Punktes verwenden, das Richten unseres Blickes auf einen Gegenstand; in diesem Falle ist unser Auge der eine, der angesehene Gegenstand der andere Punkt. (Genau genommen ist der Gegenstand der Ausgangspunkt, unser Auge der Zielpunkt.)

Richtung bewegen: niemand wird zweifelhaft sein, was darunter zu verstehen ist, selbst wenn man sagte, sich auf einem Kreise von einem Punkte zu einem andern in bestimmter Richtung bewegen, es ist aber festzuhalten, dafs wir es hier nicht mehr mit dem reinen Begriff Richtung zu thun haben, wie er sich psychologisch bei dem Setzen zweier Punkte ergiebt.[1])

Es wird aber nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dafs die oben angestellten Erörterungen ganz allgemein gültig

---

[1]) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dafs meiner Auffassung des Begriffes Richtung Widerspruch erwachsen ist. So heifst es in der Rezension des ersten Bandes, die Ernest Lindenthal in der Zeitschrift für das Realschulwesen XVI. Jahrgang, Heft 11, veröffentlicht hat: „Im Gegenteile kommt man zum Begriffe der Geraden erst durch die Erarbeitung der Zwillingsbegriffe „gerade" und „krumm"." Sowie wir nicht verstünden, was „hell" ist, wenn alle Gegenstände gleich hell beleuchtet wären, ebenso wenig könnten wir den Begriff „Gerade" gewinnen, wenn es blofs gerade Linien gäbe. Daneben bleibt freilich wahr, dafs der Begriff „Gerade" so einfach ist, dafs er durch andere Begriffe nicht erläutert werden kann. Die zwei ersten Begriffe (Richtung und Abstand) bezeichnet der Verfasser als unmittelbare Grundbegriffe a priori und sagt: „Setzen wir im Gedanken zwei Punkte, so ist damit sofort auch Richtung und Abstand gesetzt." Das ist nicht richtig; denn mit Hilfe zweier Punkte allein kommen wir niemals zum Begriffe Richtung, wohl aber mit Hilfe dreier Geraden, von welchen die erste und zweite dieselbe Richtung, die erste und dritte aber verschiedene Richtungen haben. Der Begriff „Gerade" geht also dem Begriffe „Richtung" voraus, nicht aber umgekehrt. Gäbe es in dieser Welt blofs Gerade einer und derselben Richtung oder, wie der Verfasser sagen würde, von ähnlicher Richtung, so wüfsten wir nicht, was überhaupt Richtung ist."

Meine Ausführungen haben gezeigt, dafs ich mich dieser Ansicht nicht anzuschliefsen vermag. Man vergl. übrigens das Zitat aus Max Simons Programmarbeit. Geradezu entgegentreten aber mufs ich dem folgenden Satze der erwähnten Besprechung: „Richtung überhaupt" und „bestimmte Richtung" sind als Begriffe ebenso nur einmal vorhanden wie etwa der Begriff „die Eins".

Das ist ganz entschieden nicht richtig. „Richtung überhaupt" ist allerdings nur einmal vorhanden, es handelt sich hier eben um den Begriff Richtung; „bestimmte Richtung" aber ist eine konkrete Anwendung und deshalb unzählig, so dafs es auch besser heifsen müfste „bestimmte Richtungen".

sind, nämlich im Raume, nicht eingeschränkt durch den Begriff irgend einer Fläche oder Linie; käme diese letztere Bedingung hinzu, so sind Ebene und Gerade diejenige Fläche resp. Linie, in denen der Begriff Richtung sich mit dem allgemein gültigen deckt[1]) — in jeder anderen Fläche (Linie) aber hat er eine besondere Bedeutung. So segelt ein Schiff auf unserer Erde in einer bestimmten Richtung, aber hier hat das Wort eine ganz andere Bedeutung als bei der reinen Auffassung der unmittelbaren Relation zweier Punkte.

Auf die Seite 307 im ersten Bande angeführten Mifsbräuche des Wortes Richtung nochmals einzugehen, halte ich für überflüssig; wohl niemand, der sich auch nur einmal die Mühe genommen hat, sich den Begriff Richtung klar zu machen, wird in die dort erwähnten Fehler verfallen, ja ich glaube bestimmt, dafs auch im gewöhnlichen Leben dieser Fehler nur vereinzelt vorkommt, nämlich die Verwechslung von Ziel und Richtung.[2])

Was sich sonst noch über den Begriff Richtung sagen läfst, wird sich ungezwungen bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten und der Kritik der Zitate ergeben. Zuerst mufs ich auf einen Aufsatz eingehen, auf den ich auch schon im ersten Bande p. 307 hingewiesen habe; er rührt von J. C. V. Hoffmann her und ist in seiner Zeitschrift Bd. 3 veröffentlicht. Der Aufsatz ist überschrieben „Studien über geometrische Grundbegriffe“ und enthält unter I „den Begriff der Richtung und Verwandtes“.

Hoffmann leitet den Artikel mit den Worten ein: „Wie in den meisten Lehrbüchern der Geometrie die Untersuchungen über unsere Raumvorstellungen und die Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe (gleichsam der metaphysische Teil) die schwächste Seite ist, so wird ganz besonders unter diesen Grundbegriffen der Begriff der Richtung vernachlässigt. Kaum erörtert oder umschrieben, geschweige denn definiert,

---

[1]) Es liefse sich hierauf vielleicht eine Definition von Ebene und Gerade gründen.

[2]) Herr Direktor Thaer ist anderer Ansicht, er schreibt mir: „Ziel“ und „Richtung“, die Verwechslung mag in Schülerköpfen häufiger sein als man denkt.

wird er meist stillschweigend vorausgesetzt als unmittelbar klar (nicht erklärbar) oder nicht erklärungsbedürftig. Das Einzige, was die Erörterungen dieses Begriffes gemeinsam haben, ist seine Unzertrennbarkeit von dem Begriffe der Geraden."

Hoffmann giebt dann eine Zusammenstellung[1]) von Erörterungen „ohne jeden kritischen Kommentar". Interessant ist, dafs weder Euklid noch Legendre, weder Herbart noch Klügel (Wörterbuch) für nötig halten, den Begriff zu erklären. An diese Auslese schliefst sich dann die Darstellung von Hoffmanns eigener Ansicht, in der er zu zeigen versucht, dafs der Richtungsbegriff ganz klar ist und dafs er doch sich einer Definition nicht entzieht.

„Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt."

Hoffmann kommt so auf Bewegung, Bewegbares und Kraft als Ursache der Bewegung. Während, durchaus richtig, von der Kraft abstrahiert wird, geht H. auf die andern Punkte näher ein. Dabei kommt er zu dem richtigen Resultat, dafs jeder Raumteil ewig an einer Stelle bleibt und dafs einzig und allein die Materie bewegbar ist. Der Raum ermöglicht nur die Bewegung. Denkt man sich nun ein Stoffteilchen bewegt, so mufs noch bevor es seine Ruhelage verläfst, um an sein Ziel zu gelangen, schon eine Auswahl unter den unzählig vielen Zielpunkten getroffen sein. Diese Auswahl fufst bei wirklicher Bewegung auf der bewegenden Kraft, bei der idealen Bewegung auf dem Willen des betrachtenden Subjekts.

In der Auswahl des Zieles liegt der Keim dessen, was

---

[1]) Die zitierten Autoren sind Baltzer, B. Becker, J. C. Becker, Fresenius, Fries, Helmes, Kambly, Kober, E. Müller, J. Müller, T. Müller, Ohm, Recknagel, Reidt, Riecke, Schlömilch, Snell, J. Steiner, Thibaut, Trendelenburg, Mauritius. Aus der Arbeit von Mauritius (Osterprogramm, Coburg 1870) wird sehr ausführlich zitiert. Als wichtigsten Satz möchte ich hier folgenden wiedergeben: „Die Richtung ist weder eine Qualität noch eine Quantität, sondern ein Begriff, welcher zur Drehung in demselben Verhältnis steht, wie der Punkt zur Linie. Auch irrt man, wenn man der Geraden als solcher eine Richtung zuschreibt."

wir Richtung nennen, daher Richtung vor Linie. Dies scheint uns mit unserer Ansicht völlig übereinzustimmen, wenn auch der Wortlaut ein anderer ist. Was nämlich ist die Auswahl des Zieles denn anderes, als das Setzen eines zweiten Punktes? Also auch Hoffmann kommt zu dem Resultat, dafs mit dem Setzen zweier Punkte Richtung gegeben ist, wenn er auch sagt, dafs nur der Keim dessen, was wir Richtung nennen, in der Auswahl des Zieles d. h. dem Setzen des zweiten Punktes liege.

Als zweites Moment kommt hinzu die Fixierung des Zieles während der Bewegung (dauernder Hinblick aufs Ziel oder das im Auge Behalten desselben). Nur der werdenden Linie kommt Richtung zu, doch schreiben wir sie auch der gewordenen zu. Das sei psychologisch zu erklären.

Der Gedanke, dafs eigentlich nur der werdenden Linie Richtung zukomme,[1]) — und dann selbstverständlich auch nur eine — hat auf den ersten Anblick etwas sehr Bestechendes, kann aber doch nur bei der ganz äufserlichen Auffassung direkter Bewegung von Materie bestehen. Gerade der Hinweis auf die Psychologie mufste dazu führen, diese Ansicht zu modifizieren. Bei genauer Erörterung ergiebt sich doch, dafs wir nicht einen sich bewegenden Punkt annehmen dürfen, sondern eine Reihe von verschiedenen Punkten, eine Punktreihe, deren Träger dann, wenn wir sie in ihrer Gesamtheit zusammenfassen, eine Linie ist. Schon bei der Zusammenfassung eines Minimums von verschiedenen Punkten aber, d. h. bei zwei Punkten, resultiert der Begriff Richtung, ja in diesem Falle haben wir ihn in seiner ganzen Reinheit. Der folgende Satz bestätigt, nach unserer Ansicht, die eben gegebenen Ausführungen.

Jede Linie hat doppelte Richtung. Die Wahl derselben ist rein willkürlich, subjektiv. Daher erfordert auch die Richtung notwendig ein Subjekt, Lage und Länge dagegen hat die Linie auch ohne Subjekt.

„Das Ziel soll aber nicht blofs ausgewählt und während

---

[1]) „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung.“ Bolze in H. Z. II p. 334. — Vergl. ferner H. Z. III p. 120.

der Bewegung fixiert, sondern es soll auch erreicht werden.“ Es liegt also in der Bewegung auch das Streben nach dem Ziele und das erklärt auch, „dafs die Richtung in der Geraden, d. h. in dem kürzesten Wege zur Erscheinung kommt.“ Denn jede Kraftwirkung unterliegt dem Beharrungsgesetze; dieses aber erlaubt dem Bewegten nicht, ein neues Ziel zu wählen, wodurch die Fixierung des ersten Zieles gestört und eine Verzögerung in der Bewegung bewirkt werden würde. Das Wesen der geraden Linie wurzelt in dem Beharrungsgesetz.“[1])

Als das wichtigste der drei Momente bezeichnet H. die Fixierung des Zieles. Er fährt dann fort:

„Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, dafs Richtung kein Gröfsenbegriff ist. Denn die Wahl und Fixierung eines Räumlichen ist weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig. (Richtungen lassen sich weder addieren, noch substrahieren etc.) Man kann deshalb auch nicht sagen: „Diese Richtung ist gröfser (kleiner) als jene“.“[2])

Erst durch Einmischung des Zeitbegriffes käme man auf die Geschwindigkeit und so dazu, die Richtung als intensive Gröfse anzusehen, die sie doch nicht sei; denn man könne nicht von einer stärkeren oder schwächeren Richtung sprechen. „Sie ist vielmehr eine rein räumliche Qualität oder eine Modalität der Bewegung und als solche gegen Gröfse völlig indifferent.“ H. bejaht dann unbedingt die Frage, ob Richtung der Veränderung fähig sei oder nicht,[3]) wobei er die

---

[1]) Dem gegenüber möchten wir noch einmal auf das von uns oben ausgesprochene psychologische Gesetz von dem Minimum psychischer Arbeit bei der Erfassung zweier Punkte hinweisen, das uns eine natürlichere Erklärung zu bieten scheint, als das Beharrungsgesetz. Die Natur arbeitet immer mit einem Minimum von Kraft, dies Gesetz gilt allgemein.

[2]) Man vergl. unsere Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[3]) Ich kann meine Richtung ändern (man sagt auch wohl die Richtung ändern), aber man meint damit eine neue andere Richtung resp. ein anderes Ziel wählen. Eine Richtung an sich läfst sich nicht ändern. Indem das Subjekt einen Punkt in einer bestimmten Richtung bewegt denkt, kann es dieser Bewegung Einhalt thun und dann ihn in einer andern Richtung bewegt denken, wofür man kurz aber falsch

Frage erörtert, wodurch die Richtungen nicht geändert werden können. Er kommt dabei auf die Äquivalenz verschiedener Ziele zu sprechen, auf das Vor- und Hintereinanderliegen von Punkten, das Decken oder Verdecken. (Gemeint ist hier jedenfalls, dafs die Gerade in gewisser Lage unserem Auge als Punkt erscheint.)

Nach diesen Erörterungen heifst es: „Wodurch wird nun aber die Richtung geändert? Durch nichts anderes als durch Wahl und Fixierung eines neuen Zieles.“

Und weiter führt Hoffmann nun aus, dafs ein bewegter Punkt nur eine Richtung haben kann, verschiedene Richtungen dagegen nur nach einander annehmen kann.

Hiermit aber widerspricht sich der Verfasser selbst, denn hierin liegt ja doch, dafs nicht die Richtung geändert wird, sondern dafs wir mit der Veränderung des Zieles eine neue Richtung einschlagen. Richtung selbst ist einer Veränderung durchaus unzugänglich; so wenig wie sie einer Vergröfserung oder Verkleinerung fähig ist, so wenig ist sie überhaupt veränderlich.

Auf die weiteren Ausführungen Hoffmanns werden wir im dritten Kapitel noch näher eingehen.

Von weiteren hierher gehörigen Artikeln der Hoffmannschen Zeitschrift verdienen noch folgende erwähnt zu werden.

Bd. I. p. 235 sagt Kober (Über die Definitionen der geometr. Grundbegriffe):

„Der Begriff „gerade“ kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung“.“

„Soll eine bestimmte gerade Linie fixiert werden, so ist aufser der Richtung noch ein Punkt nötig: Eine gerade Linie ist bestimmt durch einen Punkt und die Richtung. — Die Richtung kann durch einen (zweiten) Punkt (als Ziel der Richtung) ersetzt werden.“

Aus dem zweiten Aufsatze geht hervor, dafs Gerade und

---

sagt, man habe die Richtung geändert. Man vergl. meine Ausführungen Bd. I p. 308 und den Artikel Bewegung im fünften Kapitel. Lindenthal äufsert sich in seiner schon erwähnten Rezension hierüber folgendermafsen: „Auf den ersten Anblick unrichtig, in der That aber sehr treffend ist, was der Verf. auf Seite 308 sagt.“

Richtung nicht zusammenfallen und zum Schlufs kommt Kober zu dem nämlichen Resultat wie wir, dafs die Richtung eben in dem Setzen eines zweiten Punktes besteht.

Der zu Kobers Aufsatz in Beziehung stehende Cialas in Bd. II der H. Z. ist schon in Bd. I p. 301 erwähnt.

Auch Beckers Aufsatz in H. Z. Bd. II p. 89—97 beschäftigt sich mit dem Begriff Richtung: „Einer Linie als Raumgebilde kommt eine Stellung, nicht aber eine Richtung zu. Diese ist ein Merkmal der Bewegung oder anderer Thätigkeiten. Das Auge sieht einen Gegenstand in einer bestimmten Richtung, und ein bewegter Punkt, der von einer bestimmten Stelle aus immer in derselben Richtung gesehen wird, bewegt sich mit unveränderter Richtung. Die Bahn aber, welche dabei jeder einzelne seiner Punkte durchläuft,[1]) hat eine bestimmte Stellung und nicht eine Richtung."

Kober nimmt noch einmal das Wort in dieser Sache in Bd. III p. 535, weist besonders Verwechslung von Ziel und Richtung[2]) zurück, erklärt sich gegen die Auffassung, als ob nur der werdenden Linie eine Richtung zukomme, nicht aber der gewordenen[3]) und bekämpft schliefslich Beckers eben zitierte Worte.

Im 21. Bd. der H. Z. spricht sich der Herausgeber noch einmal über den Begriff Richtung aus, indem er wesentlich seine früheren Erörterungen rekapituliert. Die betreffende Stelle — Seite 252 — lautet: „Der Begriff Richtung erfordert einen psychischen Bewegungsprozefs in unserer Vorstellung. Er ist gebunden an die Gerade mit einem Ursprung und einem Ziel. Richtung ist nicht zu denken ohne die Vorstellung einer Bewegung in einer Geraden vom Ursprung nach dem Ziel; aber selbst wenn die wirkliche oder die psychische Bewegung nicht zu Stande kommt, so ist wenigstens das Streben, das Ziel zu erreichen, vorhanden. Man kann daher auch kurz und bündig definieren: Richtung ist Streben nach dem Ziel."

---

[1]) Nicht recht klar.

[2]) Bolze, H. Z. Bd. II p. 334.

[3]) Man vergl. meine obigen Ausführungen zu Hoffmanns Aufsatz.

Am Schlufs des Artikels wird des Aufsatzes gedacht: Die Richtung einer geraden Linie als mathematische Gröfse betrachtet. Ein Beitrag zur Elementargeometrie von Dr. Adrian zu Stavenhagen, der im Zentralorgan f. d. J. d. Realschulwesens, Bd. 18, Seite 228, abgedruckt ist.

Es heifst darin: „Gewöhnlich wird das Wort Richtung in der Planimetrie ohne Definition gebraucht. Von unserem Gesichtspunkte aus aber brauchen wir eine ganz genaue Definition. Zu diesem Zwecke setzen wir die Richtung einer Geraden als Fundamentalrichtung fest.“ Die wunderlichste Erklärung, die man sich ausdenken kann, die vor allem an dem logischen Grundfehler leidet, dafs der zu erklärende Begriff in der Erklärung selbst wieder verwendet wird.

Eine eigenartige Erklärung findet sich in dem Aufsatz: Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibauts Beweis der Summe der Dreieckswinkel für die gesamte Elementar-Geometrie und besonders für die Theorie der Parallelen von Dr. th. F. H. Germar (Grunerts Archiv, Bd. 15, p. 361). Es heifst dort: „Das Wort Richtung ist nämlich von der Bewegung des Auges hergenommen und bezeichnet diejenige Stellung desselben, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht. Kann nun eine Linie entweder durch ihre eigene oder des Auges Bewegung in eine solche Stelle kommen, dafs in der Richtung desselben alle Elemente der Linie in einen Punkt zusammenzufallen scheinen oder sich decken, so hat sie in allen ihren Elementen die nämliche Richtung wie die Richtung des Auges, also einerlei Richtung. Dies erhellet auch schon aus der Art, wie die gerade Linie praktisch geprüft wird.“

Wenn auch diese Ausführungen manches Unklare enthalten — ich meine da vor allen Dingen die Worte: die Stellung des Auges, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht —, so läfst sich doch dem darin liegenden Grundgedanken eine gewisse Berechtigung nicht absprechen; besonders ist die Erklärung von einerlei Richtung (nach dem Grundsatze, sind zwei Dinge mit einem dritten äquivalent, so sind sie es auch untereinander) recht beachtenswert. Für unsere Betrachtungen ist das Wesentliche

die Zurückführung des Begriffes Richtung auf den physischen Vorgang der Augenstellung.

Im 49. Bande von Grunerts Archiv p. 178 findet sich ferner ein hierher gehöriger Aufsatz von L. v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie, dem wir folgendes entnehmen:

„Gerade bezeichnet, nach dem völlig korrekten Sprachgebrauche, die Unveränderlichkeit einer Richtung; gerade ist also an sich selbst schon ein zusammengesetzter Begriff, enthaltend Richtung und deren Unveränderlichkeit."

„Der Begriff Richtung und der Begriff Linie sind ganz gewifs verschiedene. In der Linie liegt der Begriff der Länge, in der Richtung nicht."

„Es ist nicht notwendig, die Richtung durch eine gerade Linie auszudrücken; bekanntlich bedient man sich dazu auch des Kreisbogens."

„Gröfse und Richtung sind einfache Begriffe."

Hierzu bemerkt der Verfasser in einer Anmerkung: „Wollte man Richtung erklären, etwa durch die gerade Linie, so erklärte man das Einfache durch das Zusammengesetzte. Jedermann weifs, auch ohne die unmögliche Erklärung, dafs eine Bewegung, etwa das Ziehen eines Kreises, in irgend einer Richtung erfolgt, ohne doch dabei an die gerade Linie zu denken."

Wir selbst haben folgendes diesen Ausführungen hinzuzufügen.

Wir stimmen mit dem Verfasser darin überein, dafs wir den Begriff der Geraden in doppelter Beziehung auffassen, qualitativ und quantitativ; Richtung und Abstand (Länge) vereinigen sich in der Geraden. Der Begriff der Richtung, den v. Pfeil als einen einfachen bezeichnet, ist nach unserer Ansicht ein Begriff a priori, das a priori in dem Sinne genommen, in dem wir es am Anfange dieses Kapitels geschildert haben. Richtung ist vor der Geraden da, sofort mit dem Setzen zweier Punkte. Dagegen möchten wir statt Unveränderlichkeit sagen: Beibehaltung derselben Richtung, da nach unseren obigen Ausführungen „Richtung überhaupt" unveränderlich ist. Was ferner den erweiterten Gebrauch des Wortes Richtung betrifft (z. B. beim Ziehen eines Kreises resp. der Bewegung

auf einer krummen Linie), so haben wir es dabei eben nicht mehr mit dem reinen Begriff zu thun: wir dürfen also diesen Sprachgebrauch bei der Erörterung des Begriffes selbst nicht in Betracht ziehen. Daſs übrigens die Begriffe Gerade und Richtung nicht identifiziert werden dürfen, dafür möchten wir noch folgendes ausführen. Von der Geraden kann man ein Stück — eine Strecke — nehmen, von der Richtung nicht;[1]) Richtung ist immer etwas Unteilbares, Ganzes. Eine Strecke können wir verlängern, etwas Ähnliches giebt es von der Richtung nicht. Wir sprechen ferner von entgegengesetzten Richtungen; kann man aber etwa von entgegengesetzten Geraden sprechen?

Kant, Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume. — 1768.

„Denn die Lagen der Teile des Raumes in Beziehung aufeinander setzen die Gegend voraus, nach welcher sie in solchem Verhältnis geordnet sind, und im abgezogensten Verstande besteht die Gegend nicht in der Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere, welches eigentlich der Begriff der Lage ist, sondern in dem Verhältnis des Systems dieser Lagen zu dem absoluten Weltraume.“[2])

---

[1]) Es ist undenkbar, Richtung quantitativ aufzufassen.

[2]) Kant geht in dieser Abhandlung von dem Begriff der Gegend aus, von dem er leider eine uns nicht befriedigende Erklärung giebt. Nach unserer Ansicht kann der Begriff der Gegend erst mit Hilfe des Begriffes Richtung erklärt werden: Gegend ist bestimmte Richtung. (Was ferner den allgemeinen Gebrauch dieses Wortes angeht, so ist er ein schwankender zum Teil irdisch, zum Teil auf den allgemeinen Weltenraum bezogen. Insofern wir das Wort Gegend auf der Erde gebrauchen, ist es eingeschränkt durch die Beschaffenheit der Erdoberfläche.) Nach den weiteren Worten faſst Kant unter „Lage“ das zusammen, was wir als Richtung und Abstand gesondert betrachten, indem er die Lage als die Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere bezeichnet. Es ist also offenbar, daſs der Begriff Richtung, wie wir ihn darstellen, dem der Lage vorausgeht — jedenfalls ein einfacher Begriff gegenüber dem zusammengesetzten der Lage ist. Wenn nun Kant die Gegend wiederum als das Verhältnis des Systems der Lagen gegen den allgemeinen Weltenraum bezeichnet, so kommt er damit zu einem noch zusammengesetzteren Begriffe, der sich von dem reinen, einfachen Begriffe der Richtung wesentlich unterscheidet.

Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804.

§ 6. „Da ein Punkt für sich allein betrachtet nichts Unterscheidbares bietet..., so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweier Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen gewisse Prädikate (Begriffe) I. Entfernung; II. Richtung."[1])

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 4: „Das Erste, was bei Linien in Betrachtung kommt, ist ihre Richtung. Denken wir die Linie nur nach einer einzigen bestimmten Richtung hin, so haben wir die gerade ... Linie."

p. 5: „Das, was bei einer Linie in Untersuchung gezogen werden kann, ist ihre Richtung und Gröfse. Ein Punkt

---

[1]) Wir haben auf diese Stelle schon am Anfang dieses Kapitels hingewiesen. Bolzano geht auf die Natur der beiden Prädikate (Begriffe) nicht näher ein, aber aus den Worten: „Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen", sowie daraus, dafs er auf die beiden Prädikate nicht weiter eingeht, kann man wohl mit Recht schliefsen, dafs auch Bolzano die in Frage stehenden Begriffe als ursprüngliche auffafst, hinter die ein weiteres Zurückgehen nicht möglich ist. Ich glaube auch kaum, dafs im Ernst jemand dieser Ansicht nicht zustimmt: es wird sich nur empfehlen, das Wort „apriori" zu vermeiden, da es bei vielen, wie es scheint, in argem Mifskredit steht. Wie in der Chemie für unser menschliches Erkennen gewisse Grundstoffe (einfache Stoffe, Elemente) existieren — von denen jederzeit erwartet werden kann, dafs sie noch weiterer Zerlegung fähig sind —, so müssen wir auch bei dem hier behandelten Gegenstande gewisse Begriffe als einfache, ursprüngliche anerkennen, deren Analyse dem menschlichen Geiste zur Zeit nicht möglich ist (ob in der Zukunft, diese Frage gehört nicht hierher). Ob wir nun diese ursprünglichen, einfachen Vorstellungen als apriorische bezeichnen oder anders, das ist meiner Meinung nach doch nur von untergeordnetem Werte, aber für die allgemeine Diskussion ist es doch bequem, eine derartige Bezeichnung zu haben. Wenn ein Rezensent (des I. Bandes) Vorstellungen a priori Wunder nennt, so läfst sich dem eben doch nur entgegenhalten, dafs es für unser Erkennen Grenzen giebt, jenseits deren für uns das Wunder oder das Apriori liegt. Fafst man das Apriori in der oben von uns dargestellten Weise auf, so, meine ich, müfste es doch als berechtigt anerkannt werden.

ist nicht hinreichend, um ihre Richtung zu bestimmen, denn durch ihn können unendlich viele Linien gehen, wovon jede eine andere Richtung hat. Ein zweiter Punkt in dieser Linie unterscheidet aber diese Linie von jeder anderen.[1]) Zwei Punkte bestimmen also die Richtung einer Linie."

Develey, E., Anfangsgründe der Geometrie in einer natürlichen Ordnung und nach einem durchaus neuen Plane. — Deutsch von Deyhle. — Stuttgart 1818.

Nach einer längeren Ausführung über die Gerade heifst es p. 9:

„Dieses angenommen, so wollen wir in dem Raume einen Punkt und eine unbestimmte gerade Linie, die durch diesen Punkt geht, betrachten; diese gerade Linie wird um diesen Punkt, den man als fest annimmt, nach allen erdenklichen Seiten sich drehen können; in ihrer Bewegung wird sie also einen anderen festen Punkt antreffen können, der in einer gröfseren oder kleineren Entfernung vom ersten willkürlich angenommen wird; dann wird diese unbestimmte gerade Linie, wenn man sie durch diese zwei unbeweglichen Punkte gehen und hierauf anhalten läfst, ihre Lage im Raume nicht mehr ändern können."[2])

„Betrachtet man aber die verschiedenen Lagen dieser geraden Linie, indem sie sich um den ersten Punkt drehte, als wenn sie eben so viele verschiedene gerade Linien bildete,[3]) so wird man einsehen, dafs alle diese Linien im Augenblicke, wo sie den zweiten Punkt treffen, zusammenfallen und nur eine und eben dieselbe gerade Linie bilden; denn diese verschiedenen Geraden sind nur eine einzige Gerade in verschiedenen Lagen, und unter allen diesen Lagen hat eine einzige durch den zweiten Punkt eine bestimmte Richtung."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

---

[1]) Das gilt doch nur von den geraden Linien. Ebenso gilt der folgende Satz nur von der Geraden.

[2]) Ganz dieselben Resultate, als wenn wir von zwei Punkten ausgehen.

[3]) Was der eigentlich richtige Gedanke ist.

wird er meist stillschweigend vorausgesetzt als unmittelbar klar (nicht erklärbar) oder nicht erklärungsbedürftig. Das Einzige, was die Erörterungen dieses Begriffes gemeinsam haben, ist seine Unzertrennbarkeit von dem Begriffe der Geraden."

Hoffmann giebt dann eine Zusammenstellung[1]) von Erörterungen „ohne jeden kritischen Kommentar". Interessant ist, dafs weder Euklid noch Legendre, weder Herbart noch Klügel (Wörterbuch) für nötig halten, den Begriff zu erklären. An diese Auslese schliefst sich dann die Darstellung von Hoffmanns eigener Ansicht, in der er zu zeigen versucht, dafs der Richtungsbegriff ganz klar ist und dafs er doch sich einer Definition nicht entzieht.

„Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt."

Hoffmann kommt so auf Bewegung, Bewegbares und Kraft als Ursache der Bewegung. Während, durchaus richtig, von der Kraft abstrahiert wird, geht H. auf die andern Punkte näher ein. Dabei kommt er zu dem richtigen Resultat, dafs jeder Raumteil ewig an einer Stelle bleibt und dafs einzig und allein die Materie bewegbar ist. Der Raum ermöglicht nur die Bewegung. Denkt man sich nun ein Stoffteilchen bewegt, so mufs noch bevor es seine Ruhelage verläfst, um an sein Ziel zu gelangen, schon eine Auswahl unter den unzählig vielen Zielpunkten getroffen sein. Diese Auswahl fufst bei wirklicher Bewegung auf der bewegenden Kraft, bei der idealen Bewegung auf dem Willen des betrachtenden Subjekts.

In der Auswahl des Zieles liegt der Keim dessen, was

[1]) Die zitierten Autoren sind Baltzer, B. Becker, J. C. Becker, Fresenius, Fries, Helmes, Kambly, Kober, E. Müller, J. Müller, T. Müller, Ohm, Recknagel, Reidt, Riecke, Schlömilch, Snell, J. Steiner, Thibaut, Trendelenburg, Mauritius. Aus der Arbeit von Mauritius (Osterprogramm, Coburg 1870) wird sehr ausführlich zitiert. Als wichtigsten Satz möchte ich hier folgenden wiedergeben: „Die Richtung ist weder eine Qualität noch eine Quantität, sondern ein Begriff, welcher zur Drehung in demselben Verhältnis steht, wie der Punkt zur Linie. Auch irrt man, wenn man der Geraden als solcher eine Richtung zuschreibt."

wir Richtung nennen, daher Richtung vor Linie. Dies scheint uns mit unserer Ansicht völlig übereinzustimmen, wenn auch der Wortlaut ein anderer ist. Was nämlich ist die Auswahl des Zieles denn anderes, als das Setzen eines zweiten Punktes? Also auch Hoffmann kommt zu dem Resultat, dafs mit dem Setzen zweier Punkte Richtung gegeben ist, wenn er auch sagt, dafs nur der Keim dessen, was wir Richtung nennen, in der Auswahl des Zieles d. h. dem Setzen des zweiten Punktes liege.

Als zweites Moment kommt hinzu die Fixierung des Zieles während der Bewegung (dauernder Hinblick aufs Ziel oder das im Auge Behalten desselben). Nur der werdenden Linie kommt Richtung zu, doch schreiben wir sie auch der gewordenen zu. Das sei psychologisch zu erklären.

Der Gedanke, dafs eigentlich nur der werdenden Linie Richtung zukomme,[1]) — und dann selbstverständlich auch nur eine — hat auf den ersten Anblick etwas sehr Bestechendes, kann aber doch nur bei der ganz äufserlichen Auffassung direkter Bewegung von Materie bestehen. Gerade der Hinweis auf die Psychologie mufste dazu führen, diese Ansicht zu modifizieren. Bei genauer Erörterung ergiebt sich doch, dafs wir nicht einen sich bewegenden Punkt annehmen dürfen, sondern eine Reihe von verschiedenen Punkten, eine Punktreihe, deren Träger dann, wenn wir sie in ihrer Gesamtheit zusammenfassen, eine Linie ist. Schon bei der Zusammenfassung eines Minimums von verschiedenen Punkten aber, d. h. bei zwei Punkten, resultiert der Begriff Richtung, ja in diesem Falle haben wir ihn in seiner ganzen Reinheit. Der folgende Satz bestätigt, nach unserer Ansicht, die eben gegebenen Ausführungen.

Jede Linie hat doppelte Richtung. Die Wahl derselben ist rein willkürlich, subjektiv. Daher erfordert auch die Richtung notwendig ein Subjekt, Lage und Länge dagegen hat die Linie auch ohne Subjekt.

„Das Ziel soll aber nicht blofs ausgewählt und während

---

[1]) „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung." Bolze in H. Z. II p. 334. — Vergl. ferner H. Z. III p. 120.

der Bewegung fixiert, sondern es soll auch erreicht werden.“ Es liegt also in der Bewegung auch das Streben nach dem Ziele und das erklärt auch, „dafs die Richtung in der Geraden, d. h. in dem kürzesten Wege zur Erscheinung kommt.“ Denn jede Kraftwirkung unterliegt dem Beharrungsgesetze; dieses aber erlaubt dem Bewegten nicht, ein neues Ziel zu wählen, wodurch die Fixierung des ersten Zieles gestört und eine Verzögerung in der Bewegung bewirkt werden würde. Das Wesen der geraden Linie wurzelt in dem Beharrungsgesetz.“[1])

Als das wichtigste der drei Momente bezeichnet H. die Fixierung des Zieles. Er fährt dann fort:

„Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, dafs Richtung kein Gröfsenbegriff ist. Denn die Wahl und Fixierung eines Räumlichen ist weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig. (Richtungen lassen sich weder addieren, noch substrahieren etc.) Man kann deshalb auch nicht sagen: „Diese Richtung ist gröfser (kleiner) als jene“.“[2])

Erst durch Einmischung des Zeitbegriffes käme man auf die Geschwindigkeit und so dazu, die Richtung als intensive Gröfse anzusehen, die sie doch nicht sei; denn man könne nicht von einer stärkeren oder schwächeren Richtung sprechen. „Sie ist vielmehr eine rein räumliche Qualität oder eine Modalität der Bewegung und als solche gegen Gröfse völlig indifferent.“ H. bejaht dann unbedingt die Frage, ob Richtung der Veränderung fähig sei oder nicht,[3]) wobei er die

---

[1]) Dem gegenüber möchten wir noch einmal auf das von uns oben ausgesprochene psychologische Gesetz von dem Minimum psychischer Arbeit bei der Erfassung zweier Punkte hinweisen, das uns eine natürlichere Erklärung zu bieten scheint, als das Beharrungsgesetz. Die Natur arbeitet immer mit einem Minimum von Kraft, dies Gesetz gilt allgemein.

[2]) Man vergl. unsere Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[3]) Ich kann meine Richtung ändern (man sagt auch wohl die Richtung ändern), aber man meint damit eine neue andere Richtung resp. ein anderes Ziel wählen. Eine Richtung an sich läfst sich nicht ändern. Indem das Subjekt einen Punkt in einer bestimmten Richtung bewegt denkt, kann es dieser Bewegung Einhalt thun und dann ihn in einer andern Richtung bewegt denken, wofür man kurz aber falsch

Frage erörtert, wodurch die Richtungen nicht geändert werden können. Er kommt dabei auf die Äquivalenz verschiedener Ziele zu sprechen, auf das Vor- und Hintereinanderliegen von Punkten, das Decken oder Verdecken. (Gemeint ist hier jedenfalls, dafs die Gerade in gewisser Lage unserem Auge als Punkt erscheint.)

Nach diesen Erörterungen heifst es: „Wodurch wird nun aber die Richtung geändert? Durch nichts anderes als durch Wahl und Fixierung eines neuen Zieles."

Und weiter führt Hoffmann nun aus, dafs ein bewegter Punkt nur eine Richtung haben kann, verschiedene Richtungen dagegen nur nach einander annehmen kann.

Hiermit aber widerspricht sich der Verfasser selbst, denn hierin liegt ja doch, dafs nicht die Richtung geändert wird, sondern dafs wir mit der Veränderung des Zieles eine neue Richtung einschlagen. Richtung selbst ist einer Veränderung durchaus unzugänglich; so wenig wie sie einer Vergröfserung oder Verkleinerung fähig ist, so wenig ist sie überhaupt veränderlich.

Auf die weiteren Ausführungen Hoffmanns werden wir im dritten Kapitel noch näher eingehen.

Von weiteren hierher gehörigen Artikeln der Hoffmannschen Zeitschrift verdienen noch folgende erwähnt zu werden.

Bd. I. p. 235 sagt Kober (Über die Definitionen der geometr. Grundbegriffe):

„Der Begriff „gerade" kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung"."

„Soll eine bestimmte gerade Linie fixiert werden, so ist aufser der Richtung noch ein Punkt nötig: Eine gerade Linie ist bestimmt durch einen Punkt und die Richtung. — Die Richtung kann durch einen (zweiten) Punkt (als Ziel der Richtung) ersetzt werden."

Aus dem zweiten Aufsatze geht hervor, dafs Gerade und

---

sagt, man habe die Richtung geändert. Man vergl. meine Ausführungen Bd. I p. 308 und den Artikel Bewegung im fünften Kapitel. Lindenthal äufsert sich in seiner schon erwähnten Rezension hierüber folgendermafsen: „Auf den ersten Anblick unrichtig, in der That aber sehr treffend ist, was der Verf. auf Seite 308 sagt."

Richtung nicht zusammenfallen und zum Schlufs kommt Kober zu dem nämlichen Resultat wie wir, dafs die Richtung eben in dem Setzen eines zweiten Punktes besteht.

Der zu Kobers Aufsatz in Beziehung stehende Cialas in Bd. II der H. Z. ist schon in Bd. I p. 301 erwähnt.

Auch Beckers Aufsatz in H. Z. Bd. II p. 89—97 beschäftigt sich mit dem Begriff Richtung: „Einer Linie als Raumgebilde kommt eine Stellung, nicht aber eine Richtung zu. Diese ist ein Merkmal der Bewegung oder anderer Thätigkeiten. Das Auge sieht einen Gegenstand in einer bestimmten Richtung, und ein bewegter Punkt, der von einer bestimmten Stelle aus immer in derselben Richtung gesehen wird, bewegt sich mit unveränderter Richtung. Die Bahn aber, welche dabei jeder einzelne seiner Punkte durchläuft,[1]) hat eine bestimmte Stellung und nicht eine Richtung."

Kober nimmt noch einmal das Wort in dieser Sache in Bd. III p. 535, weist besonders Verwechslung von Ziel und Richtung[2]) zurück, erklärt sich gegen die Auffassung, als ob nur der werdenden Linie eine Richtung zukomme, nicht aber der gewordenen[3]) und bekämpft schliefslich Beckers eben zitierte Worte.

Im 21. Bd. der H. Z. spricht sich der Herausgeber noch einmal über den Begriff Richtung aus, indem er wesentlich seine früheren Erörterungen rekapituliert. Die betreffende Stelle — Seite 252 — lautet: „Der Begriff Richtung erfordert einen psychischen Bewegungsprozefs in unserer Vorstellung. Er ist gebunden an die Gerade mit einem Ursprung und einem Ziel. Richtung ist nicht zu denken ohne die Vorstellung einer Bewegung in einer Geraden vom Ursprung nach dem Ziel; aber selbst wenn die wirkliche oder die psychische Bewegung nicht zu Stande kommt, so ist wenigstens das Streben, das Ziel zu erreichen, vorhanden. Man kann daher auch kurz und bündig definieren: Richtung ist Streben nach dem Ziel."

---

[1]) Nicht recht klar.

[2]) Bolze, H. Z. Bd. II p. 334.

[3]) Man vergl. meine obigen Ausführungen zu Hoffmanns Aufsatz.

Am Schlufs des Artikels wird des Aufsatzes gedacht: Die Richtung einer geraden Linie als mathematische Gröfse betrachtet. Ein Beitrag zur Elementargeometrie von Dr. Adrian zu Stavenhagen, der im Zentralorgan f. d. J. d. Realschulwesens, Bd. 18, Seite 228, abgedruckt ist.

Es heifst darin: „Gewöhnlich wird das Wort Richtung in der Planimetrie ohne Definition gebraucht. Von unserem Gesichtspunkte aus aber brauchen wir eine ganz genaue Definition. Zu diesem Zwecke setzen wir die Richtung einer Geraden als Fundamentalrichtung fest.“ Die wunderlichste Erklärung, die man sich ausdenken kann, die vor allem an dem logischen Grundfehler leidet, dafs der zu erklärende Begriff in der Erklärung selbst wieder verwendet wird.

Eine eigenartige Erklärung findet sich in dem Aufsatz: Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibauts Beweis der Summe der Dreieckswinkel für die gesamte Elementar-Geometrie und besonders für die Theorie der Parallelen von Dr. th. F. H. Germar (Grunerts Archiv, Bd. 15, p. 361). Es heifst dort: „Das Wort Richtung ist nämlich von der Bewegung des Auges hergenommen und bezeichnet diejenige Stellung desselben, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht. Kann nun eine Linie entweder durch ihre eigene oder des Auges Bewegung in eine solche Stelle kommen, dafs in der Richtung desselben alle Elemente der Linie in einen Punkt zusammenzufallen scheinen oder sich decken, so hat sie in allen ihren Elementen die nämliche Richtung wie die Richtung des Auges, also einerlei Richtung. Dies erhellet auch schon aus der Art, wie die gerade Linie praktisch geprüft wird.“

Wenn auch diese Ausführungen manches Unklare enthalten — ich meine da vor allen Dingen die Worte: die Stellung des Auges, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht —, so läfst sich doch dem darin liegenden Grundgedanken eine gewisse Berechtigung nicht absprechen; besonders ist die Erklärung von einerlei Richtung (nach dem Grundsatze, sind zwei Dinge mit einem dritten äquivalent, so sind sie es auch untereinander) recht beachtenswert. Für unsere Betrachtungen ist das Wesentliche

die Zurückführung des Begriffes Richtung auf den physischen Vorgang der Augenstellung.

Im 49. Bande von Grunerts Archiv p. 178 findet sich ferner ein hierher gehöriger Aufsatz von L. v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie, dem wir folgendes entnehmen:

„Gerade bezeichnet, nach dem völlig korrekten Sprachgebrauche, die Unveränderlichkeit einer Richtung; gerade ist also an sich selbst schon ein zusammengesetzter Begriff, enthaltend Richtung und deren Unveränderlichkeit."

„Der Begriff Richtung und der Begriff Linie sind ganz gewifs verschiedene. In der Linie liegt der Begriff der Länge, in der Richtung nicht."

„Es ist nicht notwendig, die Richtung durch eine gerade Linie auszudrücken; bekanntlich bedient man sich dazu auch des Kreisbogens."

„Gröfse und Richtung sind einfache Begriffe."

Hierzu bemerkt der Verfasser in einer Anmerkung: „Wollte man Richtung erklären, etwa durch die gerade Linie, so erklärte man das Einfache durch das Zusammengesetzte. Jedermann weifs, auch ohne die unmögliche Erklärung, dafs eine Bewegung, etwa das Ziehen eines Kreises, in irgend einer Richtung erfolgt, ohne doch dabei an die gerade Linie zu denken."

Wir selbst haben folgendes diesen Ausführungen hinzuzufügen.

Wir stimmen mit dem Verfasser darin überein, dafs wir den Begriff der Geraden in doppelter Beziehung auffassen, qualitativ und quantitativ; Richtung und Abstand (Länge) vereinigen sich in der Geraden. Der Begriff der Richtung, den v. Pfeil als einen einfachen bezeichnet, ist nach unserer Ansicht ein Begriff a priori, das a priori in dem Sinne genommen, in dem wir es am Anfange dieses Kapitels geschildert haben. Richtung ist vor der Geraden da, sofort mit dem Setzen zweier Punkte. Dagegen möchten wir statt Unveränderlichkeit sagen: Beibehaltung derselben Richtung, da nach unseren obigen Ausführungen „Richtung überhaupt" unveränderlich ist. Was ferner den erweiterten Gebrauch des Wortes Richtung [illegible] (z. B. beim Ziehen eines Kreises resp. der Bewegung

auf einer krummen Linie), so haben wir es dabei eben nicht mehr mit dem reinen Begriff zu thun: wir dürfen also diesen Sprachgebrauch bei der Erörterung des Begriffes selbst nicht in Betracht ziehen. Dafs übrigens die Begriffe Gerade und Richtung nicht identifiziert werden dürfen, dafür möchten wir noch folgendes ausführen. Von der Geraden kann man ein Stück — eine Strecke — nehmen, von der Richtung nicht;[1]) Richtung ist immer etwas Unteilbares, Ganzes. Eine Strecke können wir verlängern, etwas Ähnliches giebt es von der Richtung nicht. Wir sprechen ferner von entgegengesetzten Richtungen; kann man aber etwa von entgegengesetzten Geraden sprechen?

Kant, Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume. — 1768.

„Denn die Lagen der Teile des Raumes in Beziehung aufeinander setzen die Gegend voraus, nach welcher sie in solchem Verhältnis geordnet sind, und im abgezogensten Verstande besteht die Gegend nicht in der Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere, welches eigentlich der Begriff der Lage ist, sondern in dem Verhältnis des Systems dieser Lagen zu dem absoluten Weltraume.“[2])

---

[1]) Es ist undenkbar, Richtung quantitativ aufzufassen.

[2]) Kant geht in dieser Abhandlung von dem Begriff der Gegend aus, von dem er leider eine uns nicht befriedigende Erklärung giebt. Nach unserer Ansicht kann der Begriff der Gegend erst mit Hilfe des Begriffes Richtung erklärt werden: Gegend ist bestimmte Richtung. (Was ferner den allgemeinen Gebrauch dieses Wortes angeht, so ist er ein schwankender zum Teil irdisch, zum Teil auf den allgemeinen Weltenraum bezogen. Insofern wir das Wort Gegend auf der Erde gebrauchen, ist es eingeschränkt durch die Beschaffenheit der Erdoberfläche.) Nach den weiteren Worten fafst Kant unter „Lage“ das zusammen, was wir als Richtung und Abstand gesondert betrachten, indem er die Lage als die Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere bezeichnet. Es ist also offenbar, dafs der Begriff Richtung, wie wir ihn darstellen, dem der Lage vorausgeht — jedenfalls ein einfacher Begriff gegenüber dem zusammengesetzten der Lage ist. Wenn nun Kant die Gegend wiederum als das Verhältnis des Systems der Lagen gegen den allgemeinen Weltenraum bezeichnet, so kommt er damit zu einem noch zusammengesetzteren Begriffe, der sich von dem reinen, einfachen Begriffe der Richtung wesentlich unterscheidet.

Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804.

§ 6. „Da ein Punkt für sich allein betrachtet nichts Unterscheidbares bietet . . ., so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweier Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen gewisse Prädikate (Begriffe) I. Entfernung; II. Richtung.“[1])

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 4: „Das Erste, was bei Linien in Betrachtung kommt, ist ihre Richtung. Denken wir die Linie nur nach einer einzigen bestimmten Richtung hin, so haben wir die gerade . . . Linie.“

p. 5: „Das, was bei einer Linie in Untersuchung gezogen werden kann, ist ihre Richtung und Gröfse. Ein Punkt

---

[1]) Wir haben auf diese Stelle schon am Anfang dieses Kapitels hingewiesen. Bolzano geht auf die Natur der beiden Prädikate (Begriffe) nicht näher ein, aber aus den Worten: „Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen“, sowie daraus, dafs er auf die beiden Prädikate nicht weiter eingeht, kann man wohl mit Recht schliefsen, dafs auch Bolzano die in Frage stehenden Begriffe als ursprüngliche auffafst, hinter die ein weiteres Zurückgehen nicht möglich ist. Ich glaube auch kaum, dafs im Ernst jemand dieser Ansicht nicht zustimmt: es wird sich nur empfehlen, das Wort „apriori“ zu vermeiden, da es bei vielen, wie es scheint, in argem Mifskredit steht. Wie in der Chemie für unser menschliches Erkennen gewisse Grundstoffe (einfache Stoffe, Elemente) existieren — von denen jederzeit erwartet werden kann, dafs sie noch weiterer Zerlegung fähig sind —, so müssen wir auch bei dem hier behandelten Gegenstande gewisse Begriffe als einfache, ursprüngliche anerkennen, deren Analyse dem menschlichen Geiste zur Zeit nicht möglich ist (ob in der Zukunft, diese Frage gehört nicht hierher). Ob wir nun diese ursprünglichen, einfachen Vorstellungen als apriorische bezeichnen oder anders, das ist meiner Meinung nach doch nur von untergeordnetem Werte, aber für die allgemeine Diskussion ist es doch bequem, eine derartige Bezeichnung zu haben. Wenn ein Rezensent (des I. Bandes) Vorstellungen a priori Wunder nennt, so läfst sich dem eben doch nur entgegenhalten, dafs es für unser Erkennen Grenzen giebt, jenseits deren für uns das Wunder oder das Apriori liegt. Fafst man das Apriori in der oben von uns dargestellten Weise auf, so, meine ich, müfste es doch als berechtigt anerkannt werden.

ist nicht hinreichend, um ihre Richtung zu bestimmen, denn durch ihn können unendlich viele Linien gehen, wovon jede eine andere Richtung hat. Ein zweiter Punkt in dieser Linie unterscheidet aber diese Linie von jeder anderen.[1]) Zwei Punkte bestimmen also die Richtung einer Linie."

Develey, E., Anfangsgründe der Geometrie in einer natürlichen Ordnung und nach einem durchaus neuen Plane. — Deutsch von Deyhle. — Stuttgart 1818.

Nach einer längeren Ausführung über die Gerade heifst es p. 9:

„Dieses angenommen, so wollen wir in dem Raume einen Punkt und eine unbestimmte gerade Linie, die durch diesen Punkt geht, betrachten; diese gerade Linie wird um diesen Punkt, den man als fest annimmt, nach allen erdenklichen Seiten sich drehen können; in ihrer Bewegung wird sie also einen anderen festen Punkt antreffen können, der in einer gröfseren oder kleineren Entfernung vom ersten willkürlich angenommen wird; dann wird diese unbestimmte gerade Linie, wenn man sie durch diese zwei unbeweglichen Punkte gehen und hierauf anhalten läfst, ihre Lage im Raume nicht mehr ändern können."[2])

„Betrachtet man aber die verschiedenen Lagen dieser geraden Linie, indem sie sich um den ersten Punkt drehte, als wenn sie eben so viele verschiedene gerade Linien bildete,[3]) so wird man einsehen, dafs alle diese Linien im Augenblicke, wo sie den zweiten Punkt treffen, zusammenfallen und nur eine und eben dieselbe gerade Linie bilden; denn diese verschiedenen Geraden sind nur eine einzige Gerade in verschiedenen Lagen, und unter allen diesen Lagen hat eine einzige durch den zweiten Punkt eine bestimmte Richtung."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

---

[1]) Das gilt doch nur von den geraden Linien. Ebenso gilt der folgende Satz nur von der Geraden.

[2]) Ganz dieselben Resultate, als wenn wir von zwei Punkten ausgehen.

[3]) Was der eigentlich richtige Gedanke ist.

Richtung bewegen: niemand wird zweifelhaft sein, was darunter zu verstehen ist, selbst wenn man sagte, sich auf einem Kreise von einem Punkte zu einem andern in bestimmter Richtung bewegen, es ist aber festzuhalten, dafs wir es hier nicht mehr mit dem reinen Begriff Richtung zu thun haben, wie er sich psychologisch bei dem Setzen zweier Punkte ergiebt.[1])

Es wird aber nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dafs die oben angestellten Erörterungen ganz allgemein gültig

---

[1]) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dafs meiner Auffassung des Begriffes Richtung Widerspruch erwachsen ist. So heifst es in der Rezension des ersten Bandes, die Ernest Lindenthal in der Zeitschrift für das Realschulwesen XVI. Jahrgang, Heft 11, veröffentlicht hat: „Im Gegenteile kommt man zum Begriffe der Geraden erst durch die Erarbeitung der Zwillingsbegriffe „gerade“ und „krumm“.“ Sowie wir nicht verstünden, was „hell“ ist, wenn alle Gegenstände gleich hell beleuchtet wären, ebenso wenig könnten wir den Begriff „Gerade“ gewinnen, wenn es blofs gerade Linien gäbe. Daneben bleibt freilich wahr, dafs der Begriff „Gerade“ so einfach ist, dafs er durch andere Begriffe nicht erläutert werden kann. Die zwei ersten Begriffe (Richtung und Abstand) bezeichnet der Verfasser als unmittelbare Grundbegriffe a priori und sagt: „Setzen wir im Gedanken zwei Punkte, so ist damit sofort auch Richtung und Abstand gesetzt.“ Das ist nicht richtig; denn mit Hilfe zweier Punkte allein kommen wir niemals zum Begriffe Richtung, wohl aber mit Hilfe dreier Geraden, von welchen die erste und zweite dieselbe Richtung, die erste und dritte aber verschiedene Richtungen haben. Der Begriff „Gerade“ geht also dem Begriffe „Richtung“ voraus, nicht aber umgekehrt. Gäbe es in dieser Welt blofs Gerade einer und derselben Richtung oder, wie der Verfasser sagen würde, von ähnlicher Richtung, so wüfsten wir nicht, was überhaupt Richtung ist.“

Meine Ausführungen haben gezeigt, dafs ich mich dieser Ansicht nicht anzuschliefsen vermag. Man vergl. übrigens das Zitat aus Max Simons Programmarbeit. Geradezu entgegentreten aber mufs ich dem folgenden Satze der erwähnten Besprechung: „Richtung überhaupt“ und „bestimmte Richtung“ sind als Begriffe ebenso nur einmal vorhanden wie etwa der Begriff „die Eins“.

Das ist ganz entschieden nicht richtig. „Richtung überhaupt“ ist allerdings nur einmal vorhanden, es handelt sich hier eben um den Begriff Richtung; „bestimmte Richtung“ aber ist eine konkrete Anwendung und deshalb unzählig, so dafs es auch besser heifsen müfste „bestimmte Richtungen“.

sind, nämlich im Raume, nicht eingeschränkt durch den Begriff irgend einer Fläche oder Linie; käme diese letztere Bedingung hinzu, so sind Ebene und Gerade diejenige Fläche resp. Linie, in denen der Begriff Richtung sich mit dem allgemein gültigen deckt[1]) — in jeder anderen Fläche (Linie) aber hat er eine besondere Bedeutung. So segelt ein Schiff auf unserer Erde in einer bestimmten Richtung, aber hier hat das Wort eine ganz andere Bedeutung als bei der reinen Auffassung der unmittelbaren Relation zweier Punkte.

Auf die Seite 307 im ersten Bande angeführten Mifsbräuche des Wortes Richtung nochmals einzugehen, halte ich für überflüssig; wohl niemand, der sich auch nur einmal die Mühe genommen hat, sich den Begriff Richtung klar zu machen, wird in die dort erwähnten Fehler verfallen, ja ich glaube bestimmt, dafs auch im gewöhnlichen Leben dieser Fehler nur vereinzelt vorkommt, nämlich die Verwechslung von Ziel und Richtung.[2])

Was sich sonst noch über den Begriff Richtung sagen läfst, wird sich ungezwungen bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten und der Kritik der Zitate ergeben. Zuerst mufs ich auf einen Aufsatz eingehen, auf den ich auch schon im ersten Bande p. 307 hingewiesen habe; er rührt von J. C. V. Hoffmann her und ist in seiner Zeitschrift Bd. 3 veröffentlicht. Der Aufsatz ist überschrieben „Studien über geometrische Grundbegriffe" und enthält unter I „den Begriff der Richtung und Verwandtes".

Hoffmann leitet den Artikel mit den Worten ein: „Wie in den meisten Lehrbüchern der Geometrie die Untersuchungen über unsere Raumvorstellungen und die Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe (gleichsam der metaphysische Teil) die schwächste Seite ist, so wird ganz besonders unter diesen Grundbegriffen der Begriff der Richtung vernachlässigt. Kaum erörtert oder umschrieben, geschweige denn definiert,

---

[1]) Es liefse sich hierauf vielleicht eine Definition von Ebene und Gerade gründen.

[2]) Herr Direktor Thaer ist anderer Ansicht, er schreibt mir: „Ziel" und „Richtung", die Verwechslung mag in Schülerköpfen häufiger sein als man denkt.

wird er meist stillschweigend vorausgesetzt als unmittelbar klar (nicht erklärbar) oder nicht erklärungsbedürftig. Das Einzige, was die Erörterungen dieses Begriffes gemeinsam haben, ist seine Unzertrennbarkeit von dem Begriffe der Geraden."

Hoffmann giebt dann eine Zusammenstellung[1]) von Erörterungen „ohne jeden kritischen Kommentar". Interessant ist, dafs weder Euklid noch Legendre, weder Herbart noch Klügel (Wörterbuch) für nötig halten, den Begriff zu erklären. An diese Auslese schliefst sich dann die Darstellung von Hoffmanns eigener Ansicht, in der er zu zeigen versucht, dafs der Richtungsbegriff ganz klar ist und dafs er doch sich einer Definition nicht entzieht.

„Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt."

Hoffmann kommt so auf Bewegung, Bewegbares und Kraft als Ursache der Bewegung. Während, durchaus richtig, von der Kraft abstrahiert wird, geht H. auf die andern Punkte näher ein. Dabei kommt er zu dem richtigen Resultat, dafs jeder Raumteil ewig an einer Stelle bleibt und dafs einzig und allein die Materie bewegbar ist. Der Raum ermöglicht nur die Bewegung. Denkt man sich nun ein Stoffteilchen bewegt, so mufs noch bevor es seine Ruhelage verläfst, um an sein Ziel zu gelangen, schon eine Auswahl unter den unzählig vielen Zielpunkten getroffen sein. Diese Auswahl fufst bei wirklicher Bewegung auf der bewegenden Kraft, bei der idealen Bewegung auf dem Willen des betrachtenden Subjekts.

In der Auswahl des Zieles liegt der Keim dessen, was

[1]) Die zitierten Autoren sind Baltzer, B. Becker, J. C. Becker, Fresenius, Fries, Helmes, Kambly, Kober, E. Müller, J. Müller, T. Müller, Ohm, Recknagel, Reidt, Riecke, Schlömilch, Snell, J. Steiner, Thibaut, Trendelenburg, Mauritius. Aus der Arbeit von Mauritius (Osterprogramm, Coburg 1870) wird sehr ausführlich zitiert. Als wichtigsten Satz möchte ich hier folgenden wiedergeben: „Die Richtung ist weder eine Qualität noch eine Quantität, sondern ein Begriff, welcher zur Drehung in demselben Verhältnis steht, wie der Punkt zur Linie. Auch irrt man, wenn man der Geraden als solcher eine Richtung zuschreibt."

wir Richtung nennen, daher Richtung vor Linie. Dies scheint uns mit unserer Ansicht völlig übereinzustimmen, wenn auch der Wortlaut ein anderer ist. Was nämlich ist die Auswahl des Zieles denn anderes, als das Setzen eines zweiten Punktes? Also auch Hoffmann kommt zu dem Resultat, dafs mit dem Setzen zweier Punkte Richtung gegeben ist, wenn er auch sagt, dafs nur der Keim dessen, was wir Richtung nennen, in der Auswahl des Zieles d. h. dem Setzen des zweiten Punktes liege.

Als zweites Moment kommt hinzu die Fixierung des Zieles während der Bewegung (dauernder Hinblick aufs Ziel oder das im Auge Behalten desselben). Nur der werdenden Linie kommt Richtung zu, doch schreiben wir sie auch der gewordenen zu. Das sei psychologisch zu erklären.

Der Gedanke, dafs eigentlich nur der werdenden Linie Richtung zukomme,[1]) — und dann selbstverständlich auch nur eine — hat auf den ersten Anblick etwas sehr Bestechendes, kann aber doch nur bei der ganz äufserlichen Auffassung direkter Bewegung von Materie bestehen. Gerade der Hinweis auf die Psychologie mufste dazu führen, diese Ansicht zu modifizieren. Bei genauer Erörterung ergiebt sich doch, dafs wir nicht einen sich bewegenden Punkt annehmen dürfen, sondern eine Reihe von verschiedenen Punkten, eine Punktreihe, deren Träger dann, wenn wir sie in ihrer Gesamtheit zusammenfassen, eine Linie ist. Schon bei der Zusammenfassung eines Minimums von verschiedenen Punkten aber, d. h. bei zwei Punkten, resultiert der Begriff Richtung, ja in diesem Falle haben wir ihn in seiner ganzen Reinheit. Der folgende Satz bestätigt, nach unserer Ansicht, die eben gegebenen Ausführungen.

Jede Linie hat doppelte Richtung. Die Wahl derselben ist rein willkürlich, subjektiv. Daher erfordert auch die Richtung notwendig ein Subjekt, Lage und Länge dagegen hat die Linie auch ohne Subjekt.

„Das Ziel soll aber nicht blofs ausgewählt und während

---

[1]) „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung.“ Bolze in H. Z. II p. 334. — Vergl. ferner H. Z. III p. 120.

der Bewegung fixiert, sondern es soll auch erreicht werden.“ Es liegt also in der Bewegung auch das Streben nach dem Ziele und das erklärt auch, „dafs die Richtung in der Geraden, d. h. in dem kürzesten Wege zur Erscheinung kommt.“ Denn jede Kraftwirkung unterliegt dem Beharrungsgesetze; dieses aber erlaubt dem Bewegten nicht, ein neues Ziel zu wählen, wodurch die Fixierung des ersten Zieles gestört und eine Verzögerung in der Bewegung bewirkt werden würde. Das Wesen der geraden Linie wurzelt in dem Beharrungsgesetz.“[1])

Als das wichtigste der drei Momente bezeichnet H. die Fixierung des Zieles. Er fährt dann fort:

„Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, dafs Richtung kein Gröfsenbegriff ist. Denn die Wahl und Fixierung eines Räumlichen ist weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig. (Richtungen lassen sich weder addieren, noch substrahieren etc.) Man kann deshalb auch nicht sagen: „Diese Richtung ist gröfser (kleiner) als jene“.“[2])

Erst durch Einmischung des Zeitbegriffes käme man auf die Geschwindigkeit und so dazu, die Richtung als intensive Gröfse anzusehen, die sie doch nicht sei; denn man könne nicht von einer stärkeren oder schwächeren Richtung sprechen. „Sie ist vielmehr eine rein räumliche Qualität oder eine Modalität der Bewegung und als solche gegen Gröfse völlig indifferent.“ H. bejaht dann unbedingt die Frage, ob Richtung der Veränderung fähig sei oder nicht,[3]) wobei er die

---

[1]) Dem gegenüber möchten wir noch einmal auf das von uns oben ausgesprochene psychologische Gesetz von dem Minimum psychischer Arbeit bei der Erfassung zweier Punkte hinweisen, das uns eine natürlichere Erklärung zu bieten scheint, als das Beharrungsgesetz. Die Natur arbeitet immer mit einem Minimum von Kraft, dies Gesetz gilt allgemein.

[2]) Man vergl. unsere Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[3]) Ich kann meine Richtung ändern (man sagt auch wohl die Richtung ändern), aber man meint damit eine neue andere Richtung resp. ein anderes Ziel wählen. Eine Richtung an sich läfst sich nicht ändern. Indem das Subjekt einen Punkt in einer bestimmten Richtung bewegt denkt, kann es dieser Bewegung Einhalt thun und dann ihn in einer andern Richtung bewegt denken, wofür man kurz aber falsch

Frage erörtert, wodurch die Richtungen nicht geändert werden können. Er kommt dabei auf die Äquivalenz verschiedener Ziele zu sprechen, auf das Vor- und Hintereinanderliegen von Punkten, das Decken oder Verdecken. (Gemeint ist hier jedenfalls, dafs die Gerade in gewisser Lage unserem Auge als Punkt erscheint.)

Nach diesen Erörterungen heifst es: „Wodurch wird nun aber die Richtung geändert? Durch nichts anderes als durch Wahl und Fixierung eines neuen Zieles."

Und weiter führt Hoffmann nun aus, dafs ein bewegter Punkt nur eine Richtung haben kann, verschiedene Richtungen dagegen nur nach einander annehmen kann.

Hiermit aber widerspricht sich der Verfasser selbst, denn hierin liegt ja doch, dafs nicht die Richtung geändert wird, sondern dafs wir mit der Veränderung des Zieles eine neue Richtung einschlagen. Richtung selbst ist einer Veränderung durchaus unzugänglich; so wenig wie sie einer Vergröfserung oder Verkleinerung fähig ist, so wenig ist sie überhaupt veränderlich.

Auf die weiteren Ausführungen Hoffmanns werden wir im dritten Kapitel noch näher eingehen.

Von weiteren hierher gehörigen Artikeln der Hoffmannschen Zeitschrift verdienen noch folgende erwähnt zu werden.

Bd. I. p. 235 sagt Kober (Über die Definitionen der geometr. Grundbegriffe):

„Der Begriff „gerade" kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung"."

„Soll eine bestimmte gerade Linie fixiert werden, so ist aufser der Richtung noch ein Punkt nötig: Eine gerade Linie ist bestimmt durch einen Punkt und die Richtung. — Die Richtung kann durch einen (zweiten) Punkt (als Ziel der Richtung) ersetzt werden."

Aus dem zweiten Aufsatze geht hervor, dafs Gerade und

---

sagt, man habe die Richtung geändert. Man vergl. meine Ausführungen Bd. I p. 308 und den Artikel Bewegung im fünften Kapitel. Lindenthal äufsert sich in seiner schon erwähnten Rezension hierüber folgendermafsen: „Auf den ersten Anblick unrichtig, in der That aber sehr treffend ist, was der Verf. auf Seite 308 sagt."

Zusätze.[1]) Jede Richtung hat von Punkt zu Punkt dieselbe Form.

Alle Richtungen sind unter sich kongruent.[2])

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie.[3]) — Berlin 1878.

p. 68: „In dem Nacheinander als diskursiver Reihe lassen sich zwei verschiedene Beziehungsformen der Einzelglieder bestimmen; wir nennen dieselben Richtung der Reflexion, des Fortschrittes der Denkbewegung, nach vorwärts und nach rückwärts. Diese beiden Richtungen sind absolut einander entgegengesetzt."

p. 70: „Der Richtungsbegriff hat in der Weise, wie er hier gebildet und gebraucht worden, durchaus nichts Räumliches an sich."

p. 269: „Die Betrachtung des Inhaltes der Gebilde kann nun wiederum sich spalten in:

a) eine solche, welche nur die äufsern Beziehungen ... (Gröfse)

b) Betrachtung der innern Beziehungen ... Diese Betrachtung ist diejenige des Nebeneinander; und die innere Beziehung, welche zwischen den Elementen des Nebeneinander möglich ist, erhält dieser spezifischen Begriffskombination gemäfs den spezifischen Namen Richtung."[4])

Krause, Kant- und Helmholtz etc. — Lahr 1878.

---

[1]) Hier hätte man als ersten Zusatz erwarten dürfen, dafs durch die Reihenordnung zweier Punkte die Ordnung der Aufeinanderfolge für alle Punkte bestimmt sei.

[2]) Dieser Satz kann leicht mifsverstanden werden; auch ist er streng genommen nicht richtig. Nicht die Richtungen sind kongruent, sondern deren anschauliche Bilder, die Geraden.

[3]) Man vergl. Zeit und Raum etc. von Schmitz-Dumont (und die Bedeutung der Pangeometrie von demselben).

[4]) Die Unterscheidung in äufsere und innere Beziehungen, als deren Repräsentanten die Gröfse resp. die Richtung hingestellt werden, scheint uns gekünstelt. Auch ist absolut zu betonen, dafs Richtung ein räumlicher Begriff ist, der nur durch die Betrachtung des räumlichen Nebeneinander von Punkten (Elementen) gebildet wird.

p. 80: „Nehmen wir als erstes Beispiel die Begriffe von den Anschauungen „Richtung", „Lage", „Stellung" im Gegensatz zu „Linie", „Fläche", „Körper", so findet man, dafs man Linien, Flächen und Körper vergröfsern und verkleinern, Richtungen dagegen nicht vergröfsern kann. Richtungsunterschiede kann man vergröfsern, aber nicht Richtungen selbst; diese kann man nur verändern.[1]) Also kann der Begriff der Anschauung „Richtung" nicht unter den Begriff der Gröfse fallen. Vielleicht fällt er dann unter den Begriff Qualität oder Relation. Nun ist die Beziehung kenntlich daran, dafs sie stets ein Zweites voraussetzt, damit sie stattfinden kann, und bei der Richtung finden wir, dafs alles Gerichtete auf irgend etwas gerichtet sein müsse, daher zur Angabe der Richtung wenigstens zwei Punkte erfordert werden, während die Qualität ein solches Zweites nicht bedarf; also finden wir, dafs die Anschauung Richtung sich dem Begriffe der Beziehung unterordnen lasse.[2]) Die Richtung einer Linie wird durch ihre Beziehung zu andern ausdrückbar."

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel 1879.

p. 7: „Ein Punkt hat im Anfange seiner Ortsänderung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen heifst ihre Richtung.[3])

Behält der Punkt die zuerst gewählte Richtung bei, so

---

[1]) Während wir mit dem ersten Teile der Ausführungen uns völlig einverstanden erklären können, müssen wir diesem letzten Satze wiederum entschieden entgegentreten. Doch will Krause ja in der Hauptsache nur gegen die Auffassung des Richtungsbegriffes als eines quantitativen sprechen, wie aus dem folgenden „also" hervorgeht.

[2]) Mit vollem Rechte fafst Krause den Begriff Richtung als Relation auf. Nach unsern Ausführungen am Anfange dieses Paragraphen wird man verstehen, warum wir Relation und Qualität nicht streng geschieden haben, sondern hier diesen, dort jenen Begriff verwenden, ohne eine besondere Unterscheidung zu machen.

[3]) Dieselbe Erklärung findet sich in der Raumlehre. — Selbstverständlich das Unterscheidende nur in geometrischem Sinne genommen.

heifst seine Bewegung einfach und die von ihm beschriebene Strecke gerade. — Das besondere Merkmal einer einfachen Bewegung eines Punktes ist also ihre Richtung.“

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

p. 10: „Sowie die Strecke als ein von einem Punkte bereits zurückgelegter geradliniger Weg von bestimmter Länge aufgefafst wird, kann man eine gerade Linie auch als einen von einem bestimmten Punkte nach einem andern Punkte erst zurückzulegenden Weg von unbestimmter Länge ansehen, und in dieser Beziehung nennen wir die gerade Linie Richtung.[1])

Unter Richtung versteht man die von einem bestimmten Punkte (Anfangspunkt) nach einem andern Punkte (Zielpunkt) hinführende gerade Linie von unbestimmter Länge.[2])

Da man Anfangs- und Zielpunkt einer Richtung mit einander vertauschen kann, so enthält eine Gerade zwei einander entgegengesetzte Richtungen.“

Beyersdorff, Die Raumvorstellungen. — In. Diss. Leipzig (ohne Jahr, wahrscheinlich um 1880).

p. 41: „Ist die gerade Linie in der Anschauung völlig klar, so verbindet sich mit ihr der Begriff der Richtung, die wir uns ja nur denken können als eine von einem Punkte ausgehende gerade Linie.“

Henrici und Treutlein, Lehrbuch d. Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 3: „Wählt man auf einer Geraden einen Punkt A als Ausgang, einen andern B als Ziel einer Bewegung, so wird

---

[1]) Auch hier mufste wiederum an Stelle der Geraden der Strahl gesetzt werden.

[2]) Wir würden umgekehrt sagen: In der von einem bestimmten Punkte (Anfangspunkt) nach einem andern Punkte (Zielpunkt) hinführenden Linie kommt die Richtung vom einen nach dem andern Punkte zur Anschauung. Ebenso die vom zweiten nach dem ersten Punkte. Daher haben wir bei einer Geraden zwei — und zwar einander entgegengesetzte — Richtungen.

durch diese fortschreitende Bewegung eine Richtung bestimmt und nur im Gedanken an diese Bewegung eines Punktes spricht man auch von der Richtung einer Geraden. Da aber Ausgang und Ziel auch vertauscht werden können, so hat man in der Geraden einen Richtungsgegensatz, einen zweifachen Richtungssinn oder zwei Richtungen zu unterscheiden; die eine heifst Gegenrichtung der andern."

Schindler, die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 6: „Richtung heifst die räumliche Beziehung zwischen zwei Punkten."

„Durch 2 Punkte sind stets zwei entgegengesetzte Richtungen bestimmt."

„Eine Richtung ist durch 2 Punkte bestimmt. Die Ausdehnung der Richtung wird wie ein gestreckter, gerader Faden wahrgenommen." [1])

Hoch, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Halle 1884.

p. 2: „Ein Punkt hat bei dem Beginn seiner Bewegung die Auswahl unter einer unendlichen Menge von Bewegungen. Das die unendlich vielen Bewegungen Unterscheidende heifst Richtung. Die entgegengesetzte Richtung ist jene, welche angiebt, wie man von dem bei der Bewegung erreichten Punkte wieder zurückkommen könnte zum Ausgangspunkte.

Von der entgegengesetzten Richtung wohl zu unterscheiden ist die Bedeutung der verschiedenen Richtung."

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 7: „Unter Richtung von einem Punkte 1 nach einem Punkte 2 versteht man den von 1 über 2 ins Unendliche gehenden Strahl. Von einem dritten Punkte sagt man: „Er liegt in dieser Richtung", wenn er in dem eben definierten Strahle liegt."

F. Fischer, Anfangsgründe der Math. II. — Leipzig 1887.

---

[1]) Während wir mit den ersten Sätzen des Verfassers völlig übereinstimmen, scheint uns der Ausdruck „Ausdehnung der Richtung" recht unglücklich gewählt.

p. 3: „Die Gerade ist durch zwei Punkte, da sie ihre Richtung unzweideutig festsetzen, vollkommen bestimmt."

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

p. 8: „Während die erstere Definition auf den Begriff der Richtung zurückgeht, der selbst erst mit Hilfe der Geraden festgestellt werden kann, ..."

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

p. 8: „Um die Schwierigkeiten, welche sich einer Definition der Geraden entgegenstellen, zu heben, hat man in neuerer Zeit den Begriff der Richtung zu Hilfe genommen ... — Ob der Begriff Richtung aber ein so klarer und präziser ist, dafs man durch ihn den Begriff Gerade deutlich erklären könne, ist mir sehr fraglich. Wundt fafst allerdings den Begriff Richtung als den allgemeinern, Gerade als den speziellern, Helmholtz jedoch umgekehrt den der Geraden als den allgemeinern auf, da in ihm sich zwei entgegengesetzte Richtungen unterscheiden lassen."[1])

„Will man aber angeben, dafs ein Punkt auf dem kürzesten Wege sich nach einem andern Punkte bewegen solle, so sagt man ausdrücklich, er bewegt sich in „gerader Richtung" nach demselben. Also Richtung definiert nicht die Gerade, sondern umgekehrt die Gerade eine bestimmte Richtung."[2])

„Da sich Richtung nicht vergröfsern oder verkleinern läfst, so fällt der Begriff Richtung nicht unter die Kategorie „Gröfse", speziell Raumgröfse, sondern, weil das Gerichtete auf etwas gerichtet sein mufs, unter die Kategorie „Relation"."[3])

---

[1]) Beez spricht dann ausführlich über den verschiedenen Gebrauch der Richtung: nördliche Richtung, Richtung des Uhrzeigers u. s. f. (dafür besser im Sinne des Uhrzeigers).

[2]) Beez würde nicht auf diesen Ausweg, der keiner ist, verfallen sein, wenn er sich die Frage gestellt hätte, was man wohl unter „schiefer Richtung" verstehen müsse. „Gerade Richtung" ist ein volkstümlicher Pleonasmus, weiter nichts; dieser Ausdruck kann nicht als Beweis dafür angezogen werden, dafs Richtung durch Gerade definiert werde.

[3]) Hierin der innere Grund gegen die obigen Bemerkungen von Beez.

Es wird dann Schlömilchs Versuch mit dem Dorfjungen angegeben, durch den auch die Priorität der Richtung vor der Geraden verdeutlicht wird, was Beez aber nicht anerkennt.

Schram und Schüssler, Vorschule der Mathematik. — Wien 1889.

p. 122: „Von einem Punkte können unzählig viele Gerade ausgehen; alle diese Geraden haben verschiedene Richtungen."

Zindler, Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis. — Wien 1889.

p. 3: „Wenn wir uns nach den geometrischen Grundvorstellungen umsehen, so ..., sondern es giebt hier mehrere auf einander nicht zurückführbare und undefinierbare Fundamentalvorstellungen.[1]) Als solche müssen z. B. die Richtung ... etc. angesehen werden."

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890.

Auf Seite 21 wird gegen Wundts (Logik S. 450 ff.) Definitionen polemisiert, wobei Verfasser sagt:

„Dann ist der in (Definition) 1) und 4) auftretende Begriff der Richtung einfacher auf den Begriff der Geraden als den grundlegenden zu beziehen."

Seite 31 heifst es: „Denkt man auf einer unbegrenzten Geraden einen beweglichen Punkt fortschreitend, so dafs er zuerst nach dem Bestimmungspunkt A und dann nach dem Bestimmungspunkt B gelangt, so fafst man hiermit die Gerade als Richtung auf und zwar als die Bestimmung der Richtung, in welcher vom Punkte A aus der Punkt B liegt; da nun etc.... d. h.: Jede Gerade bedeutet zwei einander entgegengesetzte Richtungen im Raume."

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 9: „Eine Linie kann bezüglich gedacht werden; eine bezüglich gedachte Linie heifst Richtung."[2])

---

[1]) Vorstellungen a priori.

[2]) Wir müssen offen gestehen, dafs uns der Sinn dieser Erklärung nicht klar geworden ist.

M. Simon, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. — Strafsburg 1891.

p. 11: „Richtung wird uns am geläufigsten durch den Blick, den Lichtstrahl und durch das Senkblei, durchs Zeigen u. s. w. Auch ohne Tasten und Sehen würde der geotropische Nervenreiz die senkrechte Richtung geben. Abstand und Richtung, wie sie die geläufigsten, sind sie auch vielleicht die tiefstliegenden Begriffe, fast so tief wie die Kausalität. Der zweite Punkt (Ort) wirkt durch sein blofses Auftreten und hat Abstand und Richtung zur Folge.“[1])

„Richtung bedarf zu ihrer Fixierung zwar nicht, wie Mauritius meint, einer bestimmten Geraden, wohl aber einer bestimmten Reihenfolge. Sie hängt auf das innigste mit dem Willensakte, der von 1 zu 2 übergehen läfst, mit dem etwaigen Innervationsgefühl zusammen, ja sie scheint mit dem Willen selbst untrennbar verbunden und nicht blofs, weil Bewegung ohne Richtung nicht denkbar, sondern in ihrem innersten Wesen liegt eine Bewegungsempfindung. Dabei ist auch ein gewisses zeitliches Moment zu betonen; fasse ich zwei Punkte zugleich auf, so erhalte ich sofort den Abstand, und dies ist der innere Grund, weshalb AB gleich BA ist; fasse ich die Punkte nach einander auf, so erhalte ich die Richtung, und da zeitlich AB das Entgegengesetzte von BA ist, so giebt sich dieser Gegensatz auch in der Richtung kund.“

„Im Wesen der Richtung, welche im Losreifsen von 1 und Übergehen auf 2 besteht, liegt ausschliefslich die Gleichmäfsigkeit, und wenn wir die Gerade nicht hätten, würde kein Mensch Anstofs nehmen, den Kreis eine Linie zu nennen, die in allen ihren Teilen dieselbe Richtung hat.“

---

§ 2. Abstand.

Während sich dem Begriffe der Richtung, wie wir gesehen haben, das vielfältige Interesse der Geometrie zugewendet

[1]) Diese Ausführungen stimmen völlig mit den unsrigen überein, wie wir sie auch schon im ersten Bande dieses Werkes ausgesprochen haben.

und durch eine Reihe besonderer Arbeiten bethätigt hat, liegen über den Schwesterbegriff Abstand keine derartigen Arbeiten vor. Selbst in den Lehrbüchern ist er meist mit Stillschweigen übergangen. Offenbar hat man in früheren Zeiten diesen Begriff als einen quantitativen einer Erläuterung überhaupt nicht für bedürftig gehalten, Abstand direkt als eine Gröſse angesehen, wie die Zahlen, mit der sich ohne weiteres operieren lasse. Erst die Untersuchungen der neuesten Geometrie haben sich auch mit diesem Begriffe beschäftigt, aber seltsamerweise hat sich hier das Verhältnis umgekehrt: während die ursprüngliche Vorstellung der Richtung nicht angezweifelt wird, erfährt dieselbe Auffassung des Begriffes Abstand entrüstete Zurückweisung. Daſs gerade in der Beurteilung dieser Frage das entscheidende Moment für die Beurteilung der metageometrischen Deutungen liege, werde ich an anderer Stelle nachzuweisen suchen.[1]) Hier genügt es mit Bestimmtheit auszusprechen, daſs Richtung und Abstand völlig gleichwertige Begriffe sind in metaphysischer Hinsicht; im selben Moment, wo der Begriff der Richtung bei der Betrachtung zweier Punkte zum Bewuſstsein kommt (entspringt, wie Bolzano sagt), entsteht auch der Begriff der kürzesten Entfernung,[2])

---

[1]) Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, legt F. Klein — Math. Annalen IV — eine gerade Linie durch sie. Diese schneidet die Fundamentalfläche in zwei weiteren Punkten, die mit den gegebenen ein gewisses Doppelverhältnis besitzen. Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Konstanten c multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichnet Klein als die Entfernung der beiden Punkte. — Es wird also die Gerade zur Definition der Entfernung benutzt, während sie doch auf dem Begriffe der Entfernung fuſst; es werden Strecken — bei dem Doppelverhältnis — verwendet. In welchem Verhältnis stehen diese Strecken zum Begriffe der Entfernung? Die Fundamentalfläche selbst ist ferner ebenfalls ein Gebilde unseres Raumes. — Ist die angenommene Gerade eine Euklidische?

[2]) Zu diesem Begriffe findet sich in Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe, folgende Bemerkung:

p. 167: „In den Begriffen einer gröſsten oder kleinsten Entfernung zweier Raumpunkte hat man es mit solchen Grenzbegriffen zu thun: die Natur der Ortsdaten ist so beschaffen, daſs sich für jeden beliebigen Unterschied je zweier unter ihnen andere Ortsdaten ausfindig machen lassen, deren Unterschied unter jenen herabsinkt oder ihn übersteigt.

des Abstandes; einer ist ebenso natürlich und ursprünglich wie der andere. Auf diesen Punkt noch näher einzugehen, ist überflüssig, wir können uns im wesentlichen auf das im ersten Paragraphen bezüglich der Richtung Gesagte berufen.[1]) Während die Richtung nun ihren anschaulichen Ausdruck in dem Strahl findet, tritt der Abstand in der Strecke in Evidenz. Durch die Strecke wird der Abstand zweier Punkte und zwar der sogenannten Endpunkte bestimmt.[2]) Die drei Begriffe Gerade, Strahl, Strecke sind sehr scharf aus einander zu halten; gerade in ihrer mifsbräuchlichen Anwendung liegt die Ursache der vielfachen Verwirrung und Unklarheit in den hier behandelten Fragen. Ganz besonders aber sei auch hier noch einmal hervorgehoben, dafs sofort mit dem Setzen zweier Punkte der Begriff Abstand auftritt, auch ohne dafs er seine Veranschaulichung in der Strecke findet.[3]) Die Strecke ist

Man möchte meinen, dies sei so evident, dafs niemand dawider sündigen werde; trotzdem findet sich in vielen Schlüssen, die eben darum Fehlschlüsse sind, die Existenz eines irgend einem Raumpunkte nächsten Punktes, die Existenz kleinster Teile einer Linie u. dergl. vorausgesetzt."

Ein näheres Eingehen auf diese Sätze verbietet sich hier, zumeist weil die Kenntnis des vorliegenden, höchst wichtigen Werkes nicht allgemein vorausgesetzt werden darf und daher die Erläuterung sich zu umfangreich gestalten würde. Doch sei das Werk zu eingehendem Studium empfohlen, ebenso wie die Aufsätze desselben Verfassers in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie: Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. Bd. 9 (p. 433), 10 (p. 419), 11 (p. 53; p. 249), 15 (p. 127).

[1]) Auch die Ausführungen am Anfange des fünften Kapitels im ersten Bande dürften zur Vergleichung herangezogen werden.

[2]) Man könnte auch sagen, die Strecke sei das Mafs des Abstandes.

[3]) Dieselbe Ansicht findet man ausgesprochen in B. Bolzano, Die drei Probleme der Rektifikation, der Komplanation und der Kubierung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen etc. (Leipzig 1817, Kummer). Der Verfasser spricht sich in den Paragraphen 11—20 über Beziehungen zwischen Punkten und Linien aus. Im § 20 heifst es: „Der Begriff der Entfernung ist viel einfacher, als der der Länge, weil sich Entfernung bei jedem Systeme zweier Punkte findet, ohne dafs man sie sich mit irgend einer Linie, am wenigsten aber mit einer geraden, verbunden zu denken braucht." In den folgenden Paragraphen behandelt Bolzano das Thema noch in seinen Einzelheiten (bis § 30) ausführlicher.

gewissermaſsen erst sekundär das Bild des primären Begriffes Abstand. Zwei Punkte haben Abstand, auch ohne daſs die zugehörige Strecke vorhanden ist, während umgekehrt natürlich, wenn uns eine Strecke gegeben ist, dies nicht anders möglich ist, als daſs der Abstand der Endpunkte gleichzeitig da ist.[1])

Da Abstand und Richtung gleichzeitig bei dem Setzen oder Erfassen zweier Punkte auftreten, überhaupt nur durch Abstraktion von einander getrennt, auseinander gehalten werden können, so deutet dieser enge Zusammenhang auf eine innere Verwandtschaft. Diese liegt in dem von uns im § 1 erwähnten Gesetze, daſs wir die beiden Punkte mit einem Minimum von psychischer Arbeit erfassen: so fallen Richtung und Abstand psychologisch zusammen.[2]) Fassen wir die Frage rein mechanisch, so kommen wir zu demselben Resultat: sich in der Richtung auf etwas hin bewegen, heiſst doch nichts anderes als auf dem kürzesten Wege sich nach etwas hin bewegen. Also auch bei dieser Auffassung sind Richtung und Abstand identisch.[3])

Zum Schluſs dieser Betrachtungen müssen wir dann noch des Problems der Umkehrbarkeit gedenken. Günther schreibt darüber in „Der Thibautsche Beweis“ p. 5: „... stets erheben sich die allgemeinen Schwierigkeiten bei dem Versuche, zu beweisen, daſs eine mit umgewechselten Endpunkten neben die erste gelegte Strecke durchaus mit jener identisch, also umkehrbar sei.“ Bei unserer Auffassung des Begriffes Abstand als einer ursprünglichen Vorstellung, die sofort beim Erfassen zweier Punkte auftritt, wird die Frage überhaupt nicht auftauchen können, da beide Punkte völlig gleiche Beziehung zum Abstand haben resp. umgekehrt der Abstand beiden

---

[1]) Man vergl. Bd. I p. 305/6.

[2]) Bei Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe, findet sich eine ähnliche Bemerkung gelegentlich der Diskussion über die Entstehung des Begriffes der mathematischen Geraden, indem die beiläufige Gerade als Linie kleinsten physischen und psychischen Kraftmaſses bezeichnet wird.

[3]) Man vergl. Simon „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie“ p. 12. Dort heiſst es am Schlusse ähnlicher Betrachtungen: „In diesem Zurückführen liegt die Unauflöslichkeit der Begriffe Abstand und Richtung.“

Punkten gegenüber sich identisch verhält. Eines Beweises für die Identität $AB = BA$, quantitativ genommen, bedürfen wir also nicht. Äufserst sympathisch ist uns, was Simon in seiner Programmarbeit „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie" zu dieser Frage schreibt. Zum Teil sind seine Aufserungen schon im § 1 S. 41 wiedergegeben. Hier interessiert vor allen Dingen folgende Stelle (p. 11): „Dabei ist auch ein gewisses zeitliches Moment zu betonen; fasse ich zwei Punkte zugleich auf, so erhalte ich den Abstand, und dies ist der innere Grund, weshalb $AB = BA$ ist; fasse ich die Punkte nach einander auf, so erhalte ich die Richtung."

Ein ganz neues Moment würde in die Erörterung der vorliegenden Frage hineingetragen werden müssen, wenn wir die Gerade vor der Strecke betrachteten. Nehmen wir dann auf der Geraden zwei Punkte an, so könnte der Abstand AB als ein völlig verschiedener von dem Abstand BA angesehen werden, wenn wir die Aufeinanderfolge der Auffassung beibehielten. BA würde dann ∞ sein; wir würden uns somit den Anschauungen nähern, die die Gerade als einen Kreis mit unendlich grofsem Radius ansehen. Doch ist hier nicht der Platz, auf diese Gedanken näher einzugehen, wenn auch betont werden mufs, dafs eine derartige Betrachtungsweise wegen ihrer Analogie mit den entsprechenden Betrachtungen beim Kreise vielleicht nicht ohne methodisches Interesse sein würde.

Nach den vorstehenden Auseinandersetzungen tritt der Begriff des Abstandes in seiner ganzen Reinheit nur hervor bei der Auffassung zweier Punkte. Dennoch wird es sich empfehlen, den Begriff zu erweitern und ihm noch eine weitere begriffliche Ausdehnung zu geben, wodurch seine Brauchbarkeit bei der Erörterung der einfachsten Lagenverhältnisse in erhöhtem Mafse sich geltend macht. Ich meine diese Erweiterung in dem Sinne, dafs wir auch von dem Abstand eines Punktes von einer Geraden, resp. überhaupt von einer Linie, ja auch von dem Abstand eines Punktes von einer Fläche, einem Körper sprechen. Selbstverständlich mufs hier eine genaue Festsetzung stattfinden darüber, was man in diesen Fällen unter Abstand zu verstehen habe. Gemeint ist

— und darüber wird wohl kein Zweifel bestehen, weil ja Abstand überhaupt nur zwischen zwei Punkten in Betracht kommen kann — der Abstand von demjenigen Punkte des räumlichen Gebildes, der dem betrachteten Punkte am nächsten liegt, für den wir den Ausdruck „Nachbarpunkt“ einführen wollen. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche z. B. ist also der Abstand des Punktes und seines Nachbarpunktes auf der Fläche; dieser Abstand wird in der Strecke zwischen diesen beiden Punkten veranschaulicht.

Abgesehen von einigen wenigen, leicht zu charakterisierenden Ausnahmen (wenn wir z. B. den Mittelpunkt eines Kreises oder einer Kugel nehmen) wird es immer nur einen solchen Punkt geben, wie uns ohne weiteres die reine Anschauung lehrt. Für die Planimetrie würde der Abstand in diesem erweiterten Sinne also noch in zwei Fällen zu betrachten sein bei der Geraden und beim Kreise. Es wird zur gröfseren Klarheit nötig sein, hier einige Betrachtungen aus dem dritten Paragraphen dieses Kapitels, der sich mit Lagenuntersuchungen beschäftigt, vorwegzunehmen. Nehmen wir an, dafs eine Gerade und ein Punkt gegeben seien, so kann der Punkt P auf der Geraden 𝔊 liegen oder aufserhalb. Liegt P in 𝔊, so ist der Abstand selbstverständlich gleich Null, denn Punkt P fällt hier mit seinem Nachbarpunkt zusammen, liegt auf (in) seinem Nachbarpunkt. Liegt P aufserhalb 𝔊, so können wir den Abstand von P und seinem Nachbarpunkte A betrachten, der in der Strecke PA in Evidenz tritt: PA ist dann der Abstand des Punktes P von der Geraden 𝔊. Wir werden ohne weiteres einsehen, dafs es keinen zweiten Punkt auf 𝔊 giebt, der gleich nah an P liegt. Betrachten wir Kreis und Punkt, so haben wir zunächst den schon bekannten Begriff des Zentralabstandes d. h. des Abstandes P von Z. Hierzu kommt dann der neue des Abstandes, den P vom Kreise selbst hat. Die Fruchtbarkeit der hier ausgesprochenen und neu bestimmten Begriffe wird sich im § 3 zeigen.

Hiermit sollen die Erörterungen des Begriffes Abstand selbst abgebrochen werden, da die genaueren Untersuchungen über den Abstand zweier „endlich benachbarten“ Punkte, sowie zweier „unendlich benachbarten“ Punkte aus dem Rahmen der

im Elementarunterricht verwertbaren Begriffsbestimmungen herausfallen; doch wollte ich wenigstens hier darauf hingewiesen haben.

Es folgen nun die Zitate, wobei selbstverständlich die Lehrbücher keine Berücksichtigung finden, in denen entweder in Form einer Erklärung oder eines Grundsatzes weiter nichts ausgesagt wird, als dafs die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei oder dafs es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade gebe oder dafs eine begrenzte Gerade (d. h. eine Strecke) eine Länge sei oder dergl.

In vielen Werken findet sich auch eine Erklärung, wie die folgende: Die Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten und wird auch der Abstand der beiden Punkte genannt, oder: Die Strecke bestimmt den Abstand der beiden Punkte A und B. Auch diese Erklärungen sollen nicht zitiert werden.

Ganz abgesehen wird ferner von denjenigen Werken, in denen der Satz über die kürzeste Entfernung als Lehrsatz bewiesen wird, da diese Auffassung mit der unsrigen ganz unvereinbar ist. Wir sehen in diesen sogenannten Beweisen auch nur einen circulus.

Hauff, Lehrbegriff d. r. Elem.-Math. — Frankfurt a/M. 1803.

p. 134: „Die kleinste mögliche Linie von einem Punkte nach einem andern oder nach einer Linie oder Fläche heifst der Abstand oder die Entfernung (distantia) des Punktes vom andern Punkte oder von der Linie oder Fläche.“[1])

---

[1]) Hauff fafst also auch den Begriff Abstand in dem weiteren Sinne, allerdings ohne nähere Begriffsbestimmung. — Das erste Zitat will ich aufserdem benutzen, um folgendes auszusprechen. Die Existenz des durch Superlativ Ausgedrückten ist logisch unmittelbar gewifs, nicht dagegen die des einfach positiv gesetzten. Im Gebrauch des Superlativ liegt also das logisch wirklich Vorhandene z. B. die kürzeste Linie. Es ist der Begriff der Grenze, des Genauen, des Vollendeten. Innerhalb eines Jahres giebt es einen heifsesten Tag, aber es braucht keinen wirklich heifsen Tag zu geben. — Hiergegen läfst sich nun, wenn man eben wegen des Grenzbegriffes die Singularität des Gesetzten folgern will,

p. 135: „Unter allen Linien, die von einem Punkte nach einem andern möglich sind, ist die gerade die kürzeste."

Dazu ein weitläufiger (Euklidischer) Beweis von 4 Seiten. Resultat:

p. 139: „Der Abstand eines Punktes A von einem andern B ist also die gerade Linie AB."[1])

In einer Anmerkung heifst es: „Euklides hat von diesem Satze nur den ersten Teil, nämlich den Satz: die gerade Linie ist kleiner als jede gebrochene zwischen den nämlichen Endpunkten, bewiesen (Elem. I, 20). Archimedes hingegen hat den Satz in seiner ganzen Allgemeinheit als ein Axiom aufgeführt. Spätere Geometer sind ihm darin gefolgt, nur zum Teil mit dem Unterschiede, dafs sie den Satz unter dem etwas veränderten Ausdrucke: die gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern, als Definition zum Grunde gelegt haben, wie noch ganz neuerlich Legendre (Elémens de Géométrie. Paris 1794. Def. III) gethan hat. Allein da der Satz in der That ebenso wenig eine Definition, als ein Axiom, sondern ein Lehrsatz ist, so mufs er, so gut wie andere Lehrsätze, bewiesen werden."

---

einwenden, dafs die Existenz des superlativ Gesetzten noch vieldeutig sein kann, es gab keinen heifsesten Tag, viele waren von gleicher Temperatur oder auf der Kugel sind zwischen zwei Punkten viele kürzeste Linien vorhanden. Du Bois-Reymond sagt in seiner allgemeinen Funktionentheorie p. 285: „Das Axiom, dafs die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei, und dafs es auch nur einen kürzesten Weg giebt, ist kein eigentliches geometrisches Axiom. Die Untersuchung zeigt, dafs der ihm zu Grunde liegende Begriff der Rektifizierbarkeit ein analytischer ist, weil ein Grenzbegriff darin steckt."

[1]) p. 73 heifst es schon: „Zwischen zwei Punkten ist nicht mehr als eine gerade Linie möglich."

„Durch zwei Punkte ist also die gerade Linie zwischen ihnen, ihrer Lage und Länge nach, gegeben."

„Teils aus diesem, teils aus einem andern erst späterhin zu entdeckenden Grunde wird der Abstand zweier Punkte durch die gerade Linie bestimmt, die sich von dem einen nach dem andern ziehen läfst."

Förstemann, Lehrb. d. Geometrie. — Danzig 1827.

p. 3: „Der Abstand zweier Punkte ist die Länge der Geraden zwischen denselben.“[1])

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

p. 9: „Die Gröfse einer Geraden ist bestimmt durch die beiden Endpunkte derselben; die Gerade selbst heifst die Entfernung dieser beiden Punkte.“[2])

Bretschneider, Lehrgebäude der nied. Geometrie. — Jena 1844.

p. 20: „Sind die beiden Endpunkte einer vollbegrenzten Geraden gegeben, so ist letztere selbst dadurch ihrer Gröfse und Lage nach bestimmt. Man sagt daher, dafs die zwischen zwei Punkten liegende vollbegrenzte Gerade den Abstand oder die Entfernung der Punkte von einander messe, und diese Entfernung wird dann die Gröfse oder Länge der Geraden genannt.“[3])

Recht, Die Elemente der Geometrie. — München 1844.

p. 8: „Derjenige Weg nun (eines Punktes zu einem andern), der an Inhalt der kleinste ist, bezeichnet die gerade Linie und giebt deswegen die kürzeste Entfernung oder blofs die Entfernung der beiden Punkte von einander an.“[4])

---

[1]) Das ist nicht ohne weiteres, wenigstens in dieser Fassung, richtig. Aufserdem wird ungenau Gerade statt Strecke gebraucht. Die Länge der Strecke ist nicht der Abstand, sondern in ihr kommt der Abstand zur Veranschaulichung.

[2]) Siehe unsere Anmerkung zu dem Zitat auf S. 47.

[3]) Mit dieser Erklärung kann man sich einverstanden erklären. Noch besser würde man allerdings sagen, dafs die Strecke das Mafs für die fortschreitende (geradlinige) Bewegung sei, sowie der Winkel das Mafs für die drehende Bewegung ist.

[4]) Richtiger müfste es heifsen: Derjenige Weg . . . wird durch die gerade Linie bezeichnet (zur Anschauung gebracht).

„Die gerade Linie ist die Richtung der kürzesten Entfernung zweier ihrer Punkte."[1]

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

p. 237: „Die Gerade ist unter allen Linien zwischen zwei Punkten die kürzeste und daher das Mafs ihres Abstandes von einander; oder: zwei feste Punkte A, C bestimmen die Gröfse der geraden Verbindungslinie."

Waitz, Lehrbuch der Psychologie. — Braunschweig 1849.

p. 226: „Wie die Richtung ist auch die Länge unmittelbar mit der Vorstellung der Linie gegeben."[2]

p. 223: „Die Gröfsenschätzung der Linie giebt die erste Vorstellung der Entfernung; denn die Linie, abgesehen von ihrer psychologischen Entstehung und als fertiges Ganze aufgefafst, ist die Menge des Zwischenliegenden, das sich zwischen zwei ausgezeichnete Punkte oder Stellen eingeschaltet findet."[3]

Bartholomäi, Geometrie.[4] — Jena 1851.

p. 5: „Sobald wir zwei Punkte A, B auf einander beziehen, so stellen wir uns die Entfernung zwischen beiden vor, d. h. wir haben es mit einer Dimension, d. h. mit der Linie zu thun."

[1]) Der Verfasser dokumentiert durch diesen nicht ungeschickt gewählten Ausdruck den engen Zusammenhang zwischen Richtung und Abstand.

[2]) Der Begriff der Länge ist auch bei krummen Linien vorhanden. Er darf mit dem des Abstandes nicht verwechselt werden.

[3]) Bolzano, Die drei Probleme etc., sagt § 15: „Die zwischen den Punkten a und b enthaltene Gerade heifst ein Raumding [Raumding heifst überhaupt jedes System (jeder Inbegriff) von Punkten], das alle und sonst keine Punkte enthält, als die zwei a und b samt allen, die zwischen ihnen liegen."

[4]) Das folgende Zitat wird mit einer gröfseren Ausführlichkeit gegeben, trotzdem dafs es schon im ersten Bande vorkommt. Der Grund hierfür wird klar sein.

Es heifst dann weiter: „Wenn wir die Abhängigkeit der Elemente einer Linie einsehen wollen, so müssen wir dieselbe entstehen lassen.“ (Bewegter Punkt *A*, unendlich viele Wege bis *B*.) „Übersehen wir alle diese Linien, so drängen sich uns die Vorstellungen von Richtung und Entfernung auf.“[1])

„Insofern nun der eine Punkt *A* dem Punkte *B* unausgesetzt zustrebt, ist die entstandene Linie Richtung, und insofern er in jener Richtung wirklich bis *B* geht, ist sie Entfernung.“

„Nennen wir also die so entstandene Linie *AB* eine Gerade, so haben wir die Erklärung: Die gerade Linie ist Richtung oder Entfernung.“

Der Verfasser geht dann näher auf den Zusammenhang von Richtung und Entfernung ein und kommt zu dem Resultat:

„Mithin kann die Gerade als Richtung nicht zugleich die Entfernung vorstellen, denn diese mufs immer zwischen zwei bestimmten Punkten gedacht werden. Als Entfernung jedoch ist die Gerade auch Ausdruck der Richtung.“[2])

Es wird aus diesen Erörterungen sodann gefolgert, dafs die Gerade durch zwei Punkte völlig bestimmt ist und weitere Erörterungen hieran geknüpft.

p. 7 heifst es: „Die Gerade als Entfernung ist auch Richtung, tritt also auch als Entfernung in Gegensatz zur krummen Linie. Gleichwohl ist die krumme Linie auch Entfernung, also nicht von der Geraden verschieden.“[3])

---

[1]) Die unmittelbare Erzeugung der Begriffe Richtung und Entfernung wird hier von der Vorstellung der verschiedenen Wege von einem Punkte zu einem andern abhängig gemacht, was uns nicht richtig erscheint. Immerhin stimmen Bartholomäis Auseinandersetzungen im wesentlichen mit den unsrigen überein, da er denselben Ausgangspunkt nimmt, nämlich die Betrachtung zweier Punkte.

[2]) Man vergl. hierzu besonders die betreffenden Stellen in Simons Programmabhandlung.

[3]) Hier würde an Stelle des Wortes Entfernnng besser das Wort Länge gewählt worden sein; also: Gleichwohl hat die krumme Linie auch Länge und ist insofern — in quantitativer Hinsicht — mit der [Ge]raden vergleichbar.

Durch Vergleichung ergiebt sich:

1. „Nur die Gerade ist bestimmter Ausdruck der Entfernung, nicht die krumme Linie.“

2. „Die Gröfse dieser Entfernung ist vollkommen bestimmt, während sie bei anderen Linien bald gröfser, bald kleiner ausfällt.“

3. „Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.“

p. 10 heifst es: „Wenn von der Gröfse einer Geraden die Rede ist, so kann sie nur als Entfernung aufgefafst werden.“

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 4: „Grundsatz. Die gerade Linie ist kleiner als jede andere Linie, die mit der geraden dieselben Endpunkte hat.

Zusatz. Daher ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten die rein anschauliche Vorstellung der Entfernung oder des Abstandes der beiden Punkte von einander.[1])

Anmerkung. Euklides nimmt diesen Satz nicht als Grundsatz an, er beweist vielmehr, dafs zwei gerade Linien, die von den Endpunkten einer dritten ausgehen und mit einander zusammenstofsen, gröfser sind als die dritte. Daraus folgt dann unser Satz für eine beliebig gebrochene Linie leicht. Krumme Linien aber, die mit einer Geraden einerlei Endpunkte haben, machen Weitläufigkeiten und nötigen zu Annahmen, die mindestens keine gröfsere anschauliche Klarheit haben, als der einfache Satz selbst.[2]) Die Forderung, alles zu beweisen, was sich noch irgend beweisen lasse, scheint hier mehr von philosophischem als von geometrischem Interesse zu sein. Archimedes, der gröfste Geometer des Altertums, sagt daher ohne Bedenken: ich nehme an, dafs unter solchen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade die kleinste sei.“

---

[1]) Hiermit ist das Verhältnis zwischen Strecke und Abstand vortrefflich gekennzeichnet.

[2]) Das ist sehr richtig. Eine richtige Auffassung der Geraden nach qualitativer und quantitativer Bestimmung enthebt uns überhaupt solcher Künsteleien.

August, Lehrb. d. Math. — Berlin 1852.

p. 9: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Die Länge einer geraden Linie zwischen zwei Punkten bestimmt daher die Entfernung dieser Punkte."

Bartholomäi, Philosophie der Math. — Jena 1860.

p. 12: „Wenn wir nun zwei Dinge zusammenfassen, so mufs sich notwendig der Begriff der Richtung erzeugen. Damit verknüpft sich zugleich der Begriff der Distanz, denn Distanz ist der Grad des Aufsereinander."

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie.—Halle 1864.

p. 17: „Die gerade Linie dient daher (weil sie die kürzeste ist) dazu, die Entfernung zweier Punkte zu messen; und umgekehrt wird unter Entfernung eines Punktes von einem andern stets die kürzeste Entfernung, also die Entfernung in gerader Linie verstanden."

Adam, Lehrbuch d. eb. u. körperl. Geometrie. — Berlin, Stubenrauch, 1869.

„Jede von zwei Punkten begrenzte gerade Linie heifst eine Strecke... Der Abstand oder die Entfernung der beiden Endpunkte von einander wird durch die zugehörige Strecke bestimmt. Daher sagt man:

Jede durch zwei Punkte begrenzte gerade Linie hat eine bestimmte Länge.

Der Begriff: Abstand oder Entfernung nimmt allemal auf die gerade Linie Bezug. Daher sollte man nicht sagen:

Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte von einander;

wohl aber kann es heifsen:

Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten."

E. Müller, Elemente der Geometrie. II. — Braunschweig 1869.

p. 11: „Die Strecke zwischen zwei Punkten, also an sich völlig bestimmt,*) dient auch zur Bestimmung der Entfernung oder des Abstandes der Punkte."

*) „Nicht als die kürzeste Linie, wie man gewöhnlich sagt, sondern als an und für sich völlig bestimmte Linie dient die Strecke zur Bestimmung der Entfernung, zum Messen; denn nicht die kleinste, sondern die völlig bestimmte Gröfse bildet die Einheit beim Messen gleichartiger Gröfsen."[1])

Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872.

p. 2: „Wodurch mifst man die Entfernung zweier bestimmten Punkte A und B?"[2])

Nagel, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Zwischen zwei Punkten läfst sich nur eine einzige gerade Linie ziehen. Daher wird auch die Entfernung zweier Punkte durch die gerade Linie gemessen, welche beide Punkte verbindet."

Helmes, Die Elem.-Mathematik. — Hannover 1874.

p. 5: „Die Ursprünglichkeit und Gemeinsamkeit der Vorstellung der geraden Linie beruht auf den gleich ursprünglichen und gemeinsamen Vorstellungen der Richtung und Entfernung von einem Punkte im Raume nach einem andern, als deren Ausdruck und räumliche Darstellung wir uns eben die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten denken."[3])

---

[1]) Das ist richtig. Hätten wir nur einen ganz bestimmten Kreis, so könnten wir auch ihn zur Messung der Entfernung zweier Punkte auf ihm benutzen.

[2]) Auch hier also wird die Strecke als das Mafs der Entfernung bezeichnet. Besser ist es immerhin, die Strecke als anschauliche Vorstellung des Abstandes zu bezeichnen.

[3]) Diese Erklärung stimmt mit unseren Ausführungen völlig überein.

„Die andere Grundvorstellung, dafs die gerade Linie zwischen zwei Punkten den Ausdruck der Entfernung dieser Punkte enthalte, spricht sich in einem andern Grundsatze über die gerade Linie aus, „dafs sie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist", ein Satz, der freilich in Beziehung auf jede Verbindung der Punkte durch mehrere gerade Linien eines strengen und einfachen Beweises fähig ist, in Beziehung auf eine krumme Verbindungslinie aber nur durch eine weiter verfolgte Anschauung näher und näher gelegt, niemals aber streng bewiesen werden kann."[1])

H. Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

p. 2: „Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird. Die Gerade, welche die beiden Punkte enthält, heifst der Träger der Strecke. Die Punkte A und B sind die Endpunkte der Strecke AB oder BA."

„Eine Strecke wird als Mafs für den Abstand ihrer Endpunkte betrachtet[2]) oder als Mafs für den geradlinigen Weg, welchen der eine Punkt (Anfangspunkt) zurücklegen mufs, um mit dem andern (Endpunkt im engern Sinne) zusammenzufallen."

Hablüzel, Lehrb. der synthet. Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 36: „Unter der Entfernung oder dem Abstande eines Punktes von einem andern oder von einer Geraden oder zweier Parallelen wird ihre kürzeste Verbindungslinie verstanden."

Schmitz-Dumont, Zeit und Raum. — Leipzig 1875.

p. 38: „Ist die Bewegung von dem einen Orte zum andern

---

[1]) Da der Verfasser in seiner ersten Ausführung den Begriff der Entfernung als einen ursprünglichen bezeichnet, als deren „Ausdruck und räumliche Darstellung" er die Gerade denkt, so hätte er unseres Erachtens nicht nötig gehabt, auf einen Beweis noch zu reflektieren.

[2]) Diese Worte sind in der neuesten (3.) Auflage leider verändert.

nun derart, dafs es nur die direkte unvermittelte Beziehung ist, in welcher irgend welche Unterschiede sich nicht angeben lassen, so nennt man dies Bewegung in gerader Linie, welche von allen möglichen Bewegungen die zweckmäfsigste zum Mafse der vorher definierten Entfernung (unvermittelte Beziehung) ist. Man nennt sie auch schlechthin Entfernung. Sie mufs die kürzeste Linie sein, weil bei ihr alle Vermittelung, Unterschiede der Richtung, welche wieder ein neues Moment in der Thätigkeit des Bewufstseins (Bewegung) veranlassen würden, ausgeschlossen ist."[1])

Fabian-Zmurko, Lehrb. d. Math. — Lemberg 1876.

p. 11: „Die Länge einer zwei Punkte verbindenden, geradlinigen Strecke wird die Entfernung dieser Punkte genannt."

Es werden zwei vollkommen gleichlange Drahtstücke, das eine DE gerade, das andere AC gebogen, verglichen, indem sie mit A und D aufeinander gelegt werden. Dann fällt C zwischen D und E. Es heifst dann:

„Aus dieser nur erfahrungsmäfsig erkannten Thatsache schliefsen wir nun, dafs die Entfernung der Enden eines geradgemachten Linienstückes eine gröfsere Länge besitze, als dies vor dem Geradmachen der Fall war.[2]) Die Länge eines geradlinigen Stückes DC ist also kleiner, als die eines gebogenen Stückes DBC. Hieraus folgt: Die Gerade, welche zwei Punkte mit einander verbindet, ist kürzer als jede andere, von einem zum andern führende Linie."

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie a. n. Gr. — Berlin 1877.

---

[1]) Ähnliche Erörterungen finden sich auch in des Verfassers „Pangeometrie, Leipzig 1877". Die unvermittelte Beziehung zweier Punkte aufeinander, darin liegt das Wesen des Begriffes Abstand.

[2]) Der hier eingeschlagene Weg zur Verdeutlichung des Verhältnisses zwischen einer Strecke und einer krummen Verbindungslinie scheint uns sehr praktisch. Auf natürlichste Weise ergiebt sich aus ihm die im folgenden ausgesprochene Schlufsfolgerung.

p. 5: „Dabei ist unter dem Abstande zweier Punkte die Länge der kürzesten Linie zu verstehen, welche durch dieselben begrenzt werden kann."

p. 6: „Die Anschauung lehrt uns an jeder Linie die Form, d. h. die Qualität der Ausdehnung von der Gröfse oder Quantität der Ausdehnung unterscheiden. Wir vermögen uns vorzustellen, dafs eine Linie von geg. Länge ihre Form stetig ändere und dabei die Länge beibehalte." Daher die Linien in Bezug auf Länge vergleichbar, gleichartig.

„Sind aber zwei Punkte getrennt, so hat jede sie verbindende Linie eine Länge, die gröfser als Null, und unter allen möglichen mufs es mithin auch mindestens eine von solcher Länge geben, dafs eine noch kürzere unmöglich wäre, und dies ist dann eine kürzeste Linie."

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 7: „Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gehen, also auch nur eine Strecke begrenzt werden. Diese ist kürzer als jede andere Linie zwischen denselben Endpunkten."

„Die Länge der Strecke AB ist das Mafs für den Abstand der Punkte A und B."

Heinze, Die Elem.-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 12: „Wer also von einem Punkte zu einem andern in gerader Linie geht, geht immer den nämlichen Weg. Wenn man also die Entfernung zweier Punkte angeben soll, so giebt man sie in gerader Linie an, weil diese bestimmt ist und sich niemand dabei irren kann.

Es giebt aber auch zwischen zwei Punkten keinen näheren Weg, als den in gerader Linie, denn kein Punkt kann einen kürzeren Weg führen, als den, welcher vor dem andern liegt. Darum ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten nicht allein ihre bestimmte Entfernung, sondern auch ihre kürzeste Entfernung."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 68 werden die Beziehungen im Nebeneinander geschieden in a) die innere Beziehung als Gröfse der Richtung; b) die innere Beziehung als Entfernung.

p. 272: „Es wurde ausgeführt, dafs die Denkthätigkeit im Nebeneinander die beiden Begriffe „Entfernung, Richtung" als komplementäre Bestimmung der inneren Beziehung bildet."

p. 274: „Die gerade Linie ist identisch mit dem Begriff der kürzesten, weil beide Attribute hierbei nichts anderes besagen, als die logische Forderung, „zwei Elemente (Punkte) unmittelbar im Denken zu verbinden"."

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 1: „Das Mafs für die Entfernung zweier Punkte A und B heifst Strecke."

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 7: „Entfernung heifst eine kürzeste Länge."

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 8: „Die zwischen zwei Punkten liegende gerade Linie ist das Mafs für die Entfernung der beiden Punkte."

F. Fischer, Anfangsgründe d. Math. — Leipzig 1887.

p. 5: „Zwei Punkte A und B grenzen auf der Geraden G ein Stück von bestimmter Gröfse, die Strecke AB, ab. Die Strecke AB giebt den Abstand oder die Entfernung der beiden Punkte A und B an, weil gerade Linien die einzigen sind, welche sich stets zur Deckung bringen lassen, und daher ihre Teilstücke allein direkt verglichen oder gemessen werden können."

Zindler, Beiträge zur Theorie der math. Erkenntnis. — Sitzungsberichte. Wien 1889.

p. 3: „Wenn wir uns nach den geometrischen Grundvorstellungen umsehen, so . . . giebt es hier mehrere aufeinander nicht zurückführbare und undefinierbare Fundamentalvorstellungen. Als solche müssen z. B. . . ., die Distanz, . . . angesehen werden"

p. 4: „Die Objekte, welche unter einige der oben angegebenen Grundbegriffe fallen, sind Vergleichungsrelationen zugänglich, wie die Möglichkeit ihrer quantitativen Messung erkennen läfst."

„Die Vorstellung einer Punktdistanz kann als Vorstellung einer Relation zwischen zwei absoluten psychologischen Ortsbestimmungen aufgefafst werden (cf. Meinong, Hume-Studien II. p. 50 [620]). Mit diesen ersten Relationen befafst sich jedoch die Mathematik nicht, denn um absolute Distanzbestimmungen ist es ihr nicht zu thun, sondern nur mit Relationen zwischen diesen Relationen . . ."[1])

„Wenn also auch die Distanzen als Relationen zwischen absoluten Fundamenten [Fundamente einer Relation heifsen die Dinge, die in Relation stehen, also bei Verträglichkeitsrelationen die Dinge (Vorstellungen, Urteile), die mit einander verträglich oder unverträglich sind, bei Vergleichungsrelationen die Dinge (Vorstellungen etc.), die mit einander verglichen werden. Ausführlicheres cf. Meinong a. a. O. II. p. 44 [614] f.] zu fassen sind, so sind doch diese ersten Relationen an und für sich für die Geometrie irrelevant.[2]) Die Relationen müssen sich zuletzt auf Fundamente stützen, die nicht mehr Relationen sind. Man könnte aber eben schon die Strecken als jene primären Fundamente ansehen, welche in den Relationsurteilen der Längenmessung auftreten. Dann ist ein weiteres Zurück-

[1]) Will die Mathematik bestimmte Definitionen aufstellen, so mufs sie sich allerdings um solche ersten Relationen kümmern; aber, wie gesagt, nur bei den Begriffsbestimmungen.

[2]) Dem müssen wir nochmals entschieden widersprechen. Wir halten im Gegenteil gerade die Untersuchungen für prinzipiell aufserordentlich wichtig, besonders bei der Frage nach den Grundlagen der Geometrie.

gehen auf die absoluten Orte nicht notwendig. Wenn man die psychologische Vorstellungsweise zu Rate zieht, ergiebt sich folgendes: Man kann sich eine Distanz einmal als durch zwei Punkte gegeben denken, das andere Mal durch eine Strecke.[1]) Im ersten Falle liegt in der Distanzvorstellung die Vorstellung einer Relation zwischen absoluten psychologischen Orten, im zweiten Falle ist von einer Relation nichts zu bemerken. Es ist von einem Vergleich zwischen irgend etwas nichts zu bemerken, wie etwa früher die Orte der Punkte verglichen wurden. Man stellt sich nur ein Stück einer Geraden vor."[2])

„Es ist auch nur ein Objekt, was jetzt vorgestellt wird; nämlich die Strecke, während früher zwei Punkte vorgestellt wurden."

„Der Umstand, dafs man zu einer Distanzmessung die gerade Linie benötigt, bringt es mit sich, dafs man sich in der Geometrie die Distanzen immer durch Gerade ausgefüllt denkt, daher in der Geometrie nicht von Punktdistanzen, sondern von Strecken die Rede ist."[3])

„Es ist überhaupt schwer abzusehen, wieso für den wissenschaftlichen Gebrauch der Geometrie Distanz etwas wesentlich anderes sein sollte, als ein Stück einer Geraden. Es ergiebt sich also folgendes: Das, was man ohne Unterschied schlechtweg Vorstellung einer Distanz nennt, existiert unzweifelhaft in zwei psychologisch verschiedenen Formen, nämlich Vor-

---

[1]) Diese Scheidung scheint uns nicht richtig. Die Strecke ist nur die anschauliche Darstellung der Distanz zweier Punkte, nicht etwas anderes als Punktdistanz, das diesem gegenüber gestellt werden könnte.

[2]) Dieses Stück einer Geraden können wir uns aber nicht ohne die Begrenzungspunkte vorstellen. Bei einer Strecke treten also sehr wohl Relationen auf, die Beziehungen der Strecke zu ihren Begrenzungspunkten und der Begrenzungspunkte unter einander. Die Strecke kann demnach nicht als ein primäres Fundament angesehen werden. Es handelt sich nicht, wie Verfasser meint, um ein Objekt — das wäre nur eine sehr äufserliche Auffassung —, sondern um mehrere. Erst bei der Vergleichung mehrerer Strecken kann man in gewissem Sinne von den inneren Beziehungen der Bestimmungsstücke einer Strecke absehen.

[3]) Auch dies mufs bestritten werden. Man vergl. Bolzanos am Anfange dieses Paragraphen zitierten Ausspruch.

stellung einer Punktdistanz und einer Strecke. Nur die letzte Vorstellungsweise aber ist es, welche eine mathematische Bearbeitung erfährt und der Ausgangspunkt des Längenbegriffes wird, indem die Strecken unmittelbare Fundamente der in der Geometrie auftretenden Vergleichungsrelationsurteile über lineare Ausdehnungen werden."

Haller von Hallerstein, Lehrb. d. Elem.-Math. — Berlin 1890.

p. 4: „Die Strecke mifst die Entfernung zweier Punkte."

---

§ 3. Lagen- und Mafsuntersuchungen.

In den meisten Lehrbüchern schliefst sich direkt an die Erörterung der bis jetzt behandelten Grundbegriffe, wobei diese jedoch durchaus nicht gebührende Berücksichtigung erfahren, die Lehre von den Winkeln an. An der Spitze steht eine der üblichen Definitionen, dann folgen sofort die besonderen Arten: das Ganze schliefst sich höchst unvermittelt an den Anfang an und ist offenbar gar nicht geeignet, weder auf den Schüler besonders anregend einzuwirken, noch ihm einen wirklichen Begriff geometrischer Betrachtungsweise und mathematischen Denkens zu geben. Viele Lehrbücher geben auch erst noch eine Zusammenstellung allgemein mathematischer und dann besonderer geometrischer Grundsätze, wobei das Bemühen, den Stoff zu beschränken, meist zu einer Auswahl drängt, die je nach dem subjektiven Empfinden des Verfassers sich regelt, oft aber auch den Eindruck macht, als wäre hier schon eine gewisse Norm getroffen. Der Gedanke, dafs es im Unterricht auf ein paar sogenannte Grundsätze mehr oder weniger nicht ankomme, scheint allmählich mehr und mehr Anhänger zu gewinnen,[1]) seit — soweit ich es übersehen kann — E. Müller zuerst dafür eingetreten ist. Aber ebenso sehr wie die Zahl der Grundsätze methodisch nicht ins Ge-

[1]) Man vergleiche Band I, Seite 29.

wicht fällt, mit ebenso entschiedenen Nachdruck mufs hervorgehoben werden, dafs nichts thörichter sein dürfte, als am Anfange des Unterrichts dem Schüler eine Tabelle Grundsätze einzuprägen, mit denen er vorläufig gar nichts anzufangen weifs.[1]) Mit diesem Verfahren hatte man sich entschieden von der natürlichen Lehrweise — und keineswegs zum Vorteile des Unterrichts — entfernt. Man bringe die Grundsätze da, wo man ihrer zuerst bedarf.

Meiner Meinung nach müssen sich an die ersten Betrachtungen über Raum, Körper, Flächen, Linien und Punkte (ausgehend von der Grenzbetrachtung),[2]) nach einer kurzen Hinweisung auf die Bedeutung der Geometrie, wobei wesentlich der praktische Wert betont werden darf, sofort Untersuchungen über die Lage anschliefsen. Hierbei geht man dann, wie ich schon dargelegt, vom Punkte aus, da die Raumgebilde jetzt losgelöst von ihren direkten Beziehungen (Grenzen) als selbständige Gebilde angesehen werden müssen. In früheren Zeiten pflegte man der Kombinationslehre einen ganz besonderen Wert für die Bildung beizulegen und in ihr das vorzüglichste Bildungsmittel des mathematischen Unterrichts zu sehen. Und gewifs nicht ganz mit Unrecht! Vor einer übertriebenen Schätzung mufs man sich allerdings hüten, aber die Wichtigkeit dieses Zweiges mufs anerkannt werden. Nur möchte ich auch hier betonen, dafs es nach meiner Meinung weniger auf die Lehren der Kombination selbst ankommt,

---

[1]) Vergl. Lehrproben und Lehrgänge. 32. Heft. 1892: Dr. A. Gille, Didaktisches aus dem planimetrischen Unterrichte. In diesem Aufsatze heifst es p. 95: „In den meisten Lehrbüchern werden die Grundsätze nach alter Euklidischer Manier für sich allein, ohne Zusammenhang mit den andern der eigentlichen Planimetrie vorausgeschickt. So unvermittelt an den Schüler herangebracht, in welchem sich gar kein Interesse denselben entgegenstreckt, können sie durch ihre abstrakte und oft recht unklare Form nicht dazu beitragen, ihm den Eingang zur Mathematik leichter und angenehmer zu machen.“ Ebenfalls in diesem Sinne schreibt mir Direktor Thaer-Halle: „Was ich für nötig halte zu betonen, ist, dafs nicht alle Grundsätze den gesamten Lehrsätzen vorangestellt werden können.“

[2]) Gerade und Ebene werden als bekannte Vorstellungen vorausgesetzt und vorläufig nicht eingehend behandelt.

als auf eine geschickte Anwendung in den verschiedenen Zweigen des mathematischen Unterrichts. So bietet auch der planimetrische Unterricht auf allen verschiedenen Stufen ein sehr geeignetes Feld zu Kombinationen — und gerade diese praktische Kombinationslehre erscheint mir von gröfserem methodischem Werte, als die eigentliche theoretische. So möchte ich ein Beispiel erwähnen, das mir besonders geeignet erscheint, die Wahrheit des Ausgeführten zu bekräftigen, das ist die Lehre vom Parallelogramm. Hier bietet sich bei der Aufstellung der Umkehrungen eine sehr gute Gelegenheit, Kombinationen (im ganzen 9) zu bilden, über deren Gültigkeit natürlich Untersuchungen anzustellen resp. Beweise beizubringen sind. So gestaltet sich diese eine Figur zu einer reichhaltigen Quelle fruchtbarster Thätigkeit.

Diese Kombinationen haben ferner das Gute, dafs sie gewissermafsen ein Gerippe des Inhalts geben, das leicht im Gedächtnis haftet oder wenigstens leicht wieder reproduziert werden kann.

Der Gang des planimetrischen Anfangsunterrichtes mag sich nun folgendermafsen gestalten.

Lagenbetrachtungen.

I. Systematischer Aufbau.[1]

A.

1. Punkt und Punkt.

(Bei diesen Erörterungen kommt man zu den Begriffen: Richtung, Abstand, Strecke, Strahl, Gerade, Kreis. Vergleichungen von Strecken schliefsen sich an.)

2. Punkt und Gerade.

3. Punkt und Kreis.

---

[1]) Ich beschränke mich bei diesen ersten Betrachtungen auf je zwei Elemente. Es könnte in Erwägung gezogen werden, ob man weitere Elemente in den Kreis der Betrachtung ziehen soll; z. B. die Möglichkeit unendlich vieler Geraden durch einen Punkt, dem dual die unendlich vielen Punkte auf einer Geraden gegenüberstehen. Wenn man derartige Betrachtungen schon hier anstellen will, dann mufs man jedenfalls das duale Prinzip anwenden.

B.

1. Gerade und Punkt.
2. Gerade und Gerade.
3. Gerade und Kreis.

C.

1. Kreis und Punkt.
2. Kreis und Gerade.
3. Kreis und Kreis.

II. Ausführung.

A) 1. Punkt und Punkt. Hier kann ich mich prinzipiell ganz kurz fassen, da die wichtigsten hierher gehörigen Untersuchungen schon im Anfange des fünften Kapitels im ersten Bande zum Teil erledigt sind, zum Teil in den beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels.[1]) Es möge nur noch einmal wiederholt werden, dafs wir mit Hülfe dieser einfachen Elemente eine ganze Reihe sich natürlich ergebender neuer Elemente erhalten. Besonders möchte ich als äufserst wichtig das betonen, dafs sich bei diesen Betrachtungen die Elementargebilde Gerade und Kreis (s. I 5) aufs natürlichste ergeben. Gerade diese erste Untersuchung ist also von ganz besonderer Bedeutung. Will man die Begriffe des Strahlenbüschels und der Punktreihe entwickeln, so bietet sich ebenfalls hier die natürlichste Gelegenheit. Ich mufs allerdings gestehen, dafs ich den Begriff des Strahlenbüschels im planimetrischen Elementarunterricht für entbehrlich halte, während auf der andern Seite die Punktreihe nicht wohl entbehrt werden kann. Punktreihe und Träger der Punktreihe sind zwei dem kindlichen Begreifen zugängliche Vorstellungen, deren innere Beziehung mir für die Auffassung der Geometrie sehr wertvoll erscheint und die ich deshalb nicht bei Seite lassen möchte. Sie sind übrigens besonders bei der Entwickelung des geometrischen Ortes von wesentlicher Bedeutung und es bietet sich auch sonst häufiger Gelegenheit, von ihnen Gebrauch zu machen.

[1]) Man vergleiche auch das dritte Kapitel des ersten Bandes.

Auch dafs der mifsverständlichen Auffassung, als wenn eine Linie etwa aus einzelnen Punkten bestände oder aus solchen zusammengesetzt gedacht werden könne, durch eine klare Erfassung der Begriffe Punktreihe und Träger der Punktreihe entgegengearbeitet wird, läfst es uns wünschenswert erscheinen, diese Betrachtungen gleich anfänglich zu erledigen.

Was nun die praktische Durchführung betrifft, so wird man natürlich auch hier sich schon von Anfang an der Tafel bedienen, obwohl die ersten Untersuchungen ebenso gut und unverändert auch im Raume angestellt werden können. Merkt man, dafs man es mit einer verständnisvollen Klasse zu thun hat, so wird es gewifs von Nutzen sein, darauf hinzuweisen, dafs Richtung, Abstand, Strecke, Strahl, Gerade zu ihrer Vorstellung der Ebene nicht bedürfen. Vorsichtig mufs man dabei — wie ich glaube — allerdings sein. Man könnte leicht mehr Verwirrung hervorrufen, als durch diese Verallgemeinerung Nutzen geschaffen wird. Der Fall, dafs die beiden Punkte zusammenfallen, darf bei diesen Betrachtungen nicht übergangen werden. Er ist als der speziellere Fall dem Aufsereinanderliegen nachzustellen.

Unter die Begriffe, die sich bei der Betrachtung zweier Punkte ergeben, gehört wesentlich der der Strecke, in der der Abstand zur Veranschaulichung kommt, die in gewissem Sinne als das Mafs des Abstandes — besser der geradlinigen Bewegung — aufgefafst werden kann.

Von dem Begriffe der Bewegung — der uns weiter unten theoretisch beschäftigen wird — mache ich ohne weiteres den ausgiebigsten Gebrauch. Ich glaube auch, dafs dem wirklich kein ernstes Bedenken entgegensteht. Ich lasse nun die beiden Punkte einander näher rücken etc., d. h. ich nehme alle möglichen Veränderungen in der Lage vor. Dabei wird man den einen Punkt wohl fest in seiner Lage lassen, weil sich dann die Betrachtungen vereinfachen. Gerade in dieser von Anfang an durchgeführten Beweglichkeit der Raumelemente resp. Raumgebilde — wie diese Beweglichkeit aufzufassen sei ihrem Wesen nach, das habe ich schon im ersten Bande, Seite 308, auseinandergesetzt, ein näheres Eingehen findet sich im vierten Kapitel dieses Bandes — sehe ich ein vorzügliches Hülfsmittel

der geometrischen Betrachtungen; nur wenn wir alles Angeschaute in immer anderer Lage betrachten, so in unserem Beispiele einmal die Punkte horizontal neben einander, dann vertikal über einander, dann den festen Punkt rechts oben, den andern links unten u. s. f. zeichnen, wird man die Schüler von jedem schablonenhaften Erfassen der Lagenbeziehungen frei machen können. Fast durchweg ist zu beachten, dafs die Schüler die vom Lehrer an die Tafel gezeichnete Figur in derselben Lage in ihr Heft zeichnen, man mufs deshalb von Anfang an darauf achten, dafs der Gedanke nicht in dem Schüler aufkommt, die Figur müsse gerade so gezeichnet sein, wie sie zuerst gezeichnet worden ist. Hat man einen Lehrsatz an der Tafel der Klasse vorgeführt und ruft dann einen Schüler auf, so kann man sicher sein, dafs er die Figur gerade wieder so zeichnen wird, wie sie vom Lehrer gezeichnet war — dafs die ursprüngliche Figur an der Tafel stehen bleibt und etwa alle, die aufgerufen werden, an derselben Figur ihr Kunststück machen, halte ich für einen aufserordentlich schweren methodischen Fehler, der hoffentlich nur noch ganz vereinzelt vorkommt. Gegen derartiges Auffassen der Figur mufs man also von vornherein energisch ankämpfen und beständig dafür sorgen, dafs durch eine immer andere Darstellung des Raumbildes die Phantasie zu lebhafter Thätigkeit angespornt wird, dafs — ich wiederhole es — von vornherein jede Art von Schablone gänzlich ausgeschlossen wird.[1]) Auf diese Weise wird man es auch erreichen, dafs man die zuerst gleich in ziemlicher Zahl dem jugendlichen Geiste sich neu darbietenden Begriffe gehörig verarbeitet, dem Verstande und Gedächtnis einprägt, ohne in den schwersten Fehler des Unterrichts zu fallen, nämlich langweilig zu werden.

Da nun die Strecke das Bild des Abstandes oder das Mafs des Abstandes ist, so kommen wir, indem wir die beiden Punkte in allen möglichen Lagen betrachten, sowohl der

[1]) Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. Vorrede:
„Der Schüler soll soviel Phantasie haben, dafs er eine Figur nach dem Texte entwerfen kann. Die Figur abzeichnen übt die Anschauung zehnmal so viel, als sie ansehen; dieselbe aber zeichnen, zehnmal so viel, als sie abzeichnen."

Richtung als dem Abstande nach, sofort nach den ersten Betrachtungen ungezwungen auf die Vergleichung von Strecken.

Auch hier wieder überlegen wir uns, wie viel Fälle sind möglich. Es ergeben sich deren drei. Die beiden Strecken seien a und b.[1]) Die drei Fälle sind dann

1. $a > b$.
2. $a = b$.
3. $a < b$.

In dieser oder der umgekehrten Reihenfolge müssen die Betrachtungen angestellt werden. Vielleicht liefse sich aber auch rechtfertigen

1. $a \neq b$ (a verschieden von b).
2. $a = b$.

Keinesfalls aber darf der letzte Fall als der Spezialfall vor dem andern behandelt werden, wenn er auch als der wichtigere viel gröfsere Bedeutung hat.[2]) Mir scheint die Dreiteilung deshalb vorzuziehen, weil wir dann wiederum die Veränderlichkeit berücksichtigen können. Es werden zuerst die beiden Strecken verglichen unter der Voraussetzung

$$a > b.$$

Wir nehmen an, dafs wir a bewegen können, ohne dafs es dabei seine Gestalt oder Gröfse ändert. Wir legen sie dann mit dem einen Endpunkte auf einen von b: wir **schieben** a, bis es mit dem einen Endpunkt auf einen von b fällt; dann

---

[1]) Eine genau geregelte Bezeichnung mufs im ganzen planimetrischen Unterrichte mit aller Strenge durchgeführt werden. Alle Punkte lasse ich mit grofsen lateinischen Buchstaben bezeichnen, Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben, Linien mit grofsen deutschen Buchstaben, Winkel mit grofsen lateinischen Buchstaben, über die ein Dächelchen gemacht wird, z. B. $\hat{A}$ — da die Verwendung der früher gebrauchten kleinen griechischen Buchstaben im Anfange des Unterrichts ja nicht mehr möglich ist. Auch müssen im Sprechen die verschiedenen Gebilde Strecke, Strahl, Gerade immer genau auseinandergehalten werden.

[2]) R. **Sturm**, Die neuere Geometrie auf der Schule. H. Z. I p. 482: „Wie sich die Schüler eben bewufst geworden sind, dafs die Gleichheit zweier Längen viel unwahrscheinlicher ist als die Ungleichheit, und also, wenn sie unter gewissen Umständen eintritt, eines Beweises bedarf, so . . .“

drehen wir, bis die beiden Strecken in dieselbe Richtung fallen, also neben dem einen Endpunkte die Richtung gemeinsam haben, dann fällt der zweite Endpunkt von *a* über den zweiten Endpunkt von *b* hinaus und zwar in die Verlängerung der Strecke *b* — was unter Verlängerung zu verstehen sei, ist schon vorher bei der Entstehung der Geraden aus der Strecke erörtert worden. —

Dann lassen wir die Strecke *a* kleiner werden, so wird der Fall eintreten, dafs $a = b$. Wir stellen nun wieder dieselben Betrachtungen wie im ersten Falle an. Jetzt ergiebt sich die völlige Deckung der beiden Strecken.[1])

Wird nun *a* noch kleiner, so haben wir den dritten Fall $a < b$. Jetzt fällt der Endpunkt *a* in die Strecke *b* selbst, zwischen deren Endpunkte.

Hieran schliefsen sich dann sofort Übungen, um in erster Linie auch die Umkehrungen der angestellten Betrachtungen in den Kreis der Überlegung hineinzuziehen. Dafs diese Streckenvergleichungen gleich hier, im Anschlufs an die Betrachtung zweier Punkte, behandelt werden, ist nicht nur natürlich und ungezwungen zu gestalten, wir werden sehen, dafs wir auch sofort weitgehende Anwendungen dieser Betrachtungen in den folgenden Fällen machen können und müssen.

Ebenso gehört auch hierher das Addieren und Subtrahieren von Strecken, das wegen der bald folgenden Anwendungen richtig geübt werden mufs.

Gleich diese erste Gelegenheit benutze ich übrigens, um den Schüler auf das Unzureichende der sinnlichen Anschauung aufmerksam zu machen. Natürlich werden die beiden betrachteten Strecken wieder in allen möglichen Lagen gezeich-

---

[1]) Ich lasse diesen Fall in Form eines Satzes aussprechen: „Legt man zwei gleiche Strecken mit den Anfangspunkten und der Richtung aufeinander, so fallen auch die Endpunkte zusammen.“ Er dient dann später als Hülfssatz bei den Beweisen der Kongruenzsätze. Zugleich ist es von Wert, schon hier darauf hizuweisen, dafs Gleichheit von Strecken dazu benutzt werden kann, das Zusammenfallen von Punkten zu beweisen oder besser umgekehrt, dafs das Zusammenfallen von Punkten auf Gleichheit von Strecken zurückgeführt wird.

net, es bietet sich also Gelegenheit, z. B. die Sinnestäuschung, dafs von zwei gleichen Strecken die vertikale länger erscheint als die horizontale, vorzuführen. Von ganz besonderem Werte aber scheint es mir, Übungen im Taxieren anzustellen, um die Anschauung auszubilden. Ähnlich liegende Strecken zu vergleichen, wird auch dem Ungeübtesten ziemlich leicht fallen, aber bei verschiedener Lage zeigt sich schon, dafs wir uns auf unser Auge nicht verlassen können und dafs selbst reiche Übung darin nichts wesentlich bessert. Das giebt mir denn Veranlassung, von dem Unterschiede der praktischen Vergleichung von Strecken — etwa im täglichen Leben — und von der mathematischen Vergleichung zu sprechen. Besonders wertvoll ist es dabei, gleiche Strecken zu zeichnen oder Modelle aus starkem Draht herstellen zu lassen — wie sich denn überhaupt empfiehlt gerade bei diesen Untersuchungen Stäbe anzuwenden, von denen allerdings der eine veränderlich in seiner Länge sein mufs. Es mufs dann hervorgehoben werden, dafs mathematisch die Voraussetzung das Gültige aussagt, ohne Rücksicht auf die sinnliche Darstellung. Es kommt nur darauf an, was von den Dingen ausgesagt wird, nicht wie wir sie sehen. Sprechen wir von zwei gleichen Strecken, so handelt es sich um völlige Gleichheit, nicht um annähernde, wie sie bei der Zeichnung mit Kreide ja nur hergestellt werden kann. Besonders bei der Umkehrung ist es von wesentlicher Bedeutung, hierauf zu achten. Wenn wir zwei Stäbe aneinander legen und sie fallen mit Anfangs- und Endpunkten zusammen, so nennen wir sie gleich; aber ob sie mathematisch gleich sind, das ist eine ganz andere Frage; die würden wir nur bejahen können, wenn wir mathematisch gewifs behaupten können, dafs je zwei Endpunkte zusammenfallen. Alle diese Betrachtungen sind von nicht zu unterschätzender Bedeutung; gerade im Anfangsunterricht handelt es sich darum, recht genau zu verfahren, keine Unklarheit zurückzulassen. Es darf schon etwas mehr Zeit kosten, man wird das später reichlich wieder einbringen dadurch, dafs der Schüler mit ganz anderem Verständnis an die Betrachtung der geometrischen Verhältnisse herangeht. Aber man mufs dafür sorgen, dafs dieses genaue Vorgehen den Schülern nicht

langweilig wird — und da ist es vor allen Dingen notwendig, dafs der Schüler sich nicht einfach rezeptiv verhalte. Die angestellten Betrachtungen sind aber auch derartig, dafs eine fortwährende Mitarbeit der Schüler sehr leicht möglich ist, ja ich habe gefunden, dafs die Schüler durchweg mit grofsem Interesse auf diese Lagenbetrachtungen und alles, was sich damit verknüpft, eingehen. Manche gute Frage zeigt den Erfolg des Unterrichts und bald wird man nur noch den allgemeinen Gang leiten, die Einzelheiten werden von den Schülern selbst gefunden.

Als äufserliches Hülfsmittel, das Interesse zu heben, verwende ich übrigens bei allen Zeichnungen bunte Kreide oder bei Darstellung durch Modelle bunte Stäbe.[1])

A) 2. Punkt und Gerade.

Zwei Fälle sind möglich.

1. Die Gerade 𝔊 geht nicht durch den Punkt P.
2. Die Gerade 𝔊 geht durch den Punkt P.

Geht die Gerade nicht durch den Punkt, so sagt man die beiden Gebilde liegen aufsereinander. Auf der Geraden 𝔊 giebt es einen Punkt, der von allen Punkten der Geraden dem Punkte P am nächsten liegt. Wir wollen ihn als „Nachbarpunkt" des Punktes P bezeichnen. Verbinden wir P mit dem Nachbarpunkte A, so giebt die Strecke PA den Abstand von Gerade und Punkt an. Betrachtet man die Punkte auf 𝔊 von A aus nach beiden Seiten hin, so liegen sie immer weiter von P entfernt, je weiter sie von A entfernt sind. Es leuchtet sofort ein, dafs es aufser A auf 𝔊 immer zwei Punkte giebt, die von P ebenso wie von A gleichweit entfernt sind. Hält man P fest und läfst 𝔊 sich bewegen, so sind verschiedene Bewegungen möglich.

Ehe wir hierauf eingehen, wollen wir aber noch

[1]) J. H. T. Müller, Lehrb. der Geometrie. Vorrede: „Auch darf man hierbei nicht übersehen, dafs es so leicht und für den jüngeren Schüler so anziehend ist, sich, was ihm etwa undeutlich bliebe, durch Anwendung ganz einfacher mechanischer Hülfsmittel vollständig anschaulich zu machen . . . gerade dieses sofortige und selbsteigene Hervorbringen eines Gebildes führt ihn so sicher und bleibend zum Verständnis der Sache, dafs ein solches Verfahren nicht dringend genug anempfohlen werden kann."

folgende Betrachtungen anstellen. Verlängert man die Strecke *PA* über *P* sowohl wie über *A* hinaus, so erhält man eine zweite Gerade. Wir bezeichnen jetzt die gegebene Gerade mit $\mathfrak{G}_1$, die neue mit $\mathfrak{G}_2$. Man sagt $\mathfrak{G}_2$ liege senkrecht zu $\mathfrak{G}_1$. Es ist vorläufig nicht nötig, näher hierauf einzugehen, Man kann sich mit der einfachen Angabe dieser Bezeichnung begnügen.

$\mathfrak{G}_1$ kann sich nun so bewegen, dafs *A* der Nachbarpunkt von *P* bleibt, wir können uns zweitens $\mathfrak{G}_1$ in sich verschoben denken, dann erhält man andere Nachbarpunkte, aber diese haben immer gleichen Abstand von *P*, wie vorher *A*. Drittens können wir $\mathfrak{G}_1$ um *A* drehen; dabei bleibt *A* von *P* gleichweit entfernt — während es in den ersten Fällen seinen Abstand von *P* änderte resp. der Abstand *PA* ein anderer wurde und zwar konnte *PA* gröfser und kleiner werden. Während aber *PA* unverändert bleibt, ändern im Falle der Drehung die andern Punkte von $\mathfrak{G}_1$ ihre Lage gegen *P*, die Punkte auf der einen Seite von *A* kommen dem Punkte *P* näher, die auf der andern entfernen sich von *P*. Während der Drehung werden immer neue Punkte Nachbarpunkte von *P*, bis schliefslich der zweite Hauptfall eintritt und $\mathfrak{G}_1$ durch *P* hindurchgeht, *P* mit seinem Nachbarpunkte zusammenfällt.

Bei den zuerst geschilderten Bewegungen von $\mathfrak{G}_1$ bleibt die senkrechte Lage der beiden Geraden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ bestehen, dreht man aber $\mathfrak{G}_1$ um *A*, so sind die beiden Geraden nicht mehr senkrecht zu einander. Nur bei der Verschiebung der Geraden in sich selbst bleibt der Abstand von Punkt und Gerade derselbe — obwohl *A* nicht Nachbarpunkt bleibt. Bewegen wir $\mathfrak{G}_1$ so, dafs *A* Nachbarpunkt bleibt, so ändert sich trotzdem der Abstand; bei der Drehung schliefslich bleibt *A* nicht Nachbarpunkt und zugleich ändert sich der Abstand von Punkt und Gerade. In diesem Falle wird der Abstand auf jeden Fall kleiner, denn während *PA* sich gleich bleibt, d. h. *A* von *P* gleichweit entfernt bleibt, kommen andere Punkte von $\mathfrak{G}_1$ dem Punkte *P* näher, bis schliefslich der Abstand verschwindet, wenn $\mathfrak{G}_1$ durch *P* geht.

Bei diesen Betrachtungen ergiebt sich schon eine mannigfache Anwendung der Streckenvergleichung.

A) 3. Punkt und Kreis.

Drei Fälle sind möglich.

1. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht nicht durch den Punkt P, sodafs $\mathfrak{K}$ aufserhalb liegt.

2. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht durch P.

3. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht nicht durch den Punkt P; $\mathfrak{K}$ liegt so, dafs es den Punkt P einschliefst.

Hier gilt es wieder einen neuen Begriff einzuführen, den des Zentralabstandes. Aufserdem haben wir, ebenso wie bei der Betrachtung von Punkt und Gerade, auch hier einen Punkt des Kreises, welcher P am nächsten liegt und den wir als Nachbarpunkt bezeichnen wollen. Im ersten Falle ist der Zentralabstand, den wir ein für allemal mit z bezeichnen wollen, während Z der Mittelpunkt ist, gröfser als der Radius. z besteht nämlich aus zwei Stücken, aus PA (A ist der Nachbarpunkt) und $AZ = r$. z also $> r$. Verbindet man irgend einen andern Punkt B des Kreises mit P und Z, so ist nach unserer Definition des Abstandes $PZ < PB + BZ$. Da nun $BZ = AZ = r$ ist, so folgt, dafs $PB > PA$. B war nun ganz beliebig gewählt; es geht also mit unwiderleglicher Klarheit hervor, dafs PZ wirklich durch den Nachbarpunkt geht, dafs A der Nachbarpunkt von P ist. Ganz ähnlich läfst sich nun weiter zeigen, dafs es auf $\mathfrak{K}$ einen Punkt giebt, der von P am weitesten entfernt ist und dafs dieser Punkt der Gegenpunkt von A ist.

Auch diese Gelegenheit ist vorzüglich geeignet, den Unterschied zwischen mathematischer oder reiner Anschauung und dem blofsen rein sinnlichen Betrachten klar zu machen, indem man B einmal ganz nahe bei A wählt.

Wie in A) 2 die Gerade, so lassen wir nun den Kreis sich bewegen. Die sich darbietenden Betrachtungen sind denen in A) 2 völlig analog. Im Unterrichte ist es natürlich angebracht, sie in ganzer Ausführlichkeit durchzunehmen, hier wird es genügen, darauf hinzuweisen und als besonders wichtig den Fall herauszugreifen, dafs $\mathfrak{K}$ sich so bewegt, dafs A Nachbarpunkt bleibt. Das ist hier auf zwei Arten möglich, einmal indem Z in immer gleichem Abstande von P bleibt, sich auf einem Kreise um P bewegt (zu beachten, dafs der Kreis $\mathfrak{K}$

dabei zwei Bewegungen ausführt[1]), dann indem Z sich auf der durch PZ bestimmten Geraden bewegt. Bewegt sich dabei Z auf P zu, so wird z immer kleiner; da r sich gleich bleibt, so mufs also PA sich ändern, kleiner werden; schliefslich wird $PA = 0$, d. h. der Punkt P fällt mit seinem Nachbarpunkte A zusammen, der Kreis $\mathfrak{K}$ geht durch P. z wird in diesem Falle $= r$. Setzt man die Bewegung im selben Sinne fort, so wird nun $z < r$, während A Nachbarpunkt von P bleibt, bis Z mit P zusammenfällt. Bewegt man auch jetzt noch $\mathfrak{K}$ im selben Sinne weiter, so wird A plötzlich der von P am weitesten entfernte Punkt und sein Gegenpunkt wird Nachbarpunkt von P. Wir haben einen Grenzfall gehabt, nämlich den speziellen Fall, dafs sämtliche Punkte des Kreises P gleichen Abstand hatten. P ist dabei — bei dem Passieren des Kreises — aus einem äufseren ein innerer Punkt geworden und bleibt es, so lange $z < r$ ist."[2])

Man sieht, es ergiebt sich bei diesen einfachen Betrachtungen eine Fülle von Beziehungen und Untersuchungen, die auf die vielfältigste Weise in immer neuen Lagen vor Augen geführt dem Schüler ein weites Gebiet neuer Anschauungen eröffnen, ein Gebiet aber, das seinem Können keine unübersteiglichen Hindernisse in den Weg legt und ihn deshalb auch nicht zurückstöfst, im Gegenteil sein Interesse erweckt und dauernd fesselt und — was als das wertvollste erscheint — ihn in fortwährender Mitarbeit die geometrischen Wahrheiten selbst finden läfst.

B) 1. Gerade und Punkt.

Es dürfte vielleicht schon beim systematischen Aufbau die Meinung aufgetaucht sein, dafs dieser Fall mit A) 2 völlig identisch sei. Das ist nicht an dem, wie sich gleich ergeben wird. Denn, während wir dort den Punkt festhielten und die Gerade sich bewegen liefsen, lassen wir jetzt die Gerade in

---

[1]) Verschiebung und Drehung: Verschiebung des Zentrums längs $\mathfrak{K}$ und Drehung von $\mathfrak{K}$ um Z. — Die Bewegungen jede für sich sind ebenfalls zu erörtern.

[2]) Die Betrachtungen lassen sich ferner noch vervielfältigen, wenn man den Kreis selbst als veränderlich annimmt, d. h. bei festliegendem Z den Radius wachsen und kleiner werden läfst; doch fügen sich diese Untersuchungen nicht völlig organisch in den Gang des Ganzen ein.

fester Lage und den Punkt sich bewegen. Dafs dabei natürlich im wesentlichen Ähnliches wie bei A) 2 resultiert, liegt in der Identität der verwendeten Elemente. Es dient aber diese Behandlung — von einem etwas anderen Gesichtspunkte, wie bei A) 2 — dazu die Betrachtungen zu vertiefen und zu befestigen.

B) 2. Gerade und Gerade.

Hier sind drei Fälle möglich.

1. Die beiden Geraden haben keinen Punkt gemeinsam.[1]
2. Die beiden Geraden haben einen Punkt gemeinsam.
3. Die beiden Geraden haben zwei Punkte gemeinsam.

1. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben keinen Punkt gemeinsam. Man nennt dann die beiden Geraden parallel. Nimmt man auf einer der Geraden einen Punkt an und verbindet ihn mit seinem Nachbarpunkte auf der andern Geraden, so heifst die Strecke der Abstand der beiden Parallelen, denn es leuchtet ein, dafs diese Strecke immer gleich bleibt, wie wir auch P auf $\mathfrak{G}_1$ wählen. Denn würde dieser Abstand sich verändern, so müfsten die Geraden sich einander nähern oder sich von ein-

---

[1]) Ich stehe durchaus auf dem Standpunkte, dafs man auf der Schule diesen Fall in diesem Sinne auffafst resp. darstellt. Sturm verlangt in seinem Aufsatze, Die neuere Geometrie auf der Schule (H. Z. I p. 474—490), dafs der Schüler schon mit den unendlich entfernten Gebilden bekannt gemacht werde. Dem widersprechen sowohl die Redaktion, wie verschiedene Schulmänner (z. B. Kober, Über die Definition des Parallelismus. H. Z. I p. 491—493; Ciala, H. Z. II p. 42—44; Reidt, H. Z. II p. 209—211), sodafs Sturm noch einmal in H. Z. II p. 391—409 das Wort zu dieser Frage ergreift. Konsequenterweise müfste man dann den Schüler auch mit den imaginären Kreispunkten bekannt machen; zu einem solchen Vorschlage ist man aber von keiner Seite her gekommen. Man vergleiche hierzu auch den Aufsatz, Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde von F. Carl Fresenius in H. Z. II p. 494—504, der den richtigen Standpunkt in trefflicher Weise verteidigt. Es gehören ferner hierher:

Hoppe, Der exakte und einfache Begriff des Unendlichen, nebst seiner Anwendung in der höheren und niederen Mathematik. H. Z. III p. 11—18.

Kober, Über das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. III p. 249—264.

Ferner H. Z. III p. 155—162; 463, 265—267.

Ein genaueres Eingehen behalte ich mir für das zweite Kapitel vor.

ander entfernen. Das würde aber zur Erkenntnis bringen, dafs die beiden Geraden entweder von einem gemeinsamen Punkte herkämen oder einem solchen sich näherten.

Vorläufig scheint mir eine derartige, wie ich zugebe, ziemlich äufserliche Behandlung dieses Falles völlig ausreichend. Diese Darstellung ist für den Schüler nicht nur ganz verständlich, sondern sie ist auch von irgend welchen Schwierigkeiten deshalb ganz frei, weil hier der Parallelismus nur als Name für eine besondere Lage zweier Geraden gegeben wird: für die Lage, dafs die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben, woraus sich ergiebt, dafs sie überall gleichen Abstand haben. Wenn man will, kann man ja gleich hier Erörterungen über die Richtung daran knüpfen, doch schiebe ich diese gern weiter hinaus und operiere vorläufig nur mit dem Begriffe des Abstandes.

2. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben einen Punkt gemeinsam. In diesem Falle sagt man, die beiden Geraden schneiden einander. Der gemeinsame Punkt heifst der Schnittpunkt der beiden Geraden.

3. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben zwei Punkte gemeinsam. Dann haben die beiden Geraden alle Punkte gemeinsam, fallen völlig zusammen.

Nachdem so die drei Hauptfälle deutlich unterschieden und ausführlich betrachtet worden sind, mufs man nun eine gemeinsame Betrachtung daran knüpfen, indem man wiederum die Bewegung zu Hülfe nimmt. Jetzt wird sich nun Nr. 1 in neuem Lichte mit Nr. 2 vereint darstellen. Die Bewegung, die hier in erster Linie in Frage kommt, ist die Drehung. Geht man von Nr. 1 aus und läfst etwa $\mathfrak{G}_2$ sich um einen Punkt drehen, so kommt sofort zur Erkenntnis, dafs bei der geringsten Drehung Nr. 1 in Nr. 2 übergeht, dafs nämlich die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Es ist darauf zu achten, dafs die Drehung nach beiden Seiten möglich ist und dafs der Schnittpunkt auf der Seite liegt, nach welcher hin wir gedreht haben. Je kleiner die Drehung, um so weiter liegt der Schnittpunkt entfernt; bei der weiteren Drehung nähert sich der Schnittpunkt immer mehr dem Nachbarpunkte des Punktes, um den die Drehung stattfindet, bis er schliefslich mit ihm zusammenfällt. Wir haben dann

die senkrechte Lage der beiden Geraden. Der ganze Vorgang der Drehung von der ursprünglichen Lage bis wieder zu ihr, sowohl nach der einen, wie nach der andern Seite ist mit grofser Ausführlichkeit und mit besonderer Benutzung der Anschaulichkeit darzustellen.[1]) Hierbei ist besonders darauf hinzuweisen, wie der Schnittpunkt immer weiter nach der einen Seite hinausrückt, wie dann der Fall eintritt, dafs kein gemeinsamer Punkt vorhanden ist, und dann der Schnittpunkt auf der anderen Seite in unmefsbarer Ferne liegt. Bei allen diesen Betrachtungen ist es erlaubt und völlig naturgemäfs, auf die einfache Anschauung zu rekurrieren.

Einen weiteren Gegenstand der Betrachtung bildet dann Nr. 2; jetzt lassen wir die eine Gerade sich um den Schnittpunkt drehen, neue Beziehungen tauchen auf, die Gelegenheit geben, den Begriff Richtung von neuer Seite kennen zu lernen. Es ist dabei übrigens immer zu beachten, dafs die Untersuchungen sich völlig konsequent an die schon dagewesenen anschliefsen; so werden bei den zuletzt geschilderten Betrachtungen diejenigen von A) 2 den Stütz- und Ausgangspunkt bilden müssen.[2])

Neben der drehenden Bewegung sind nun auch noch die anderen möglichen Bewegungen in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, analog wiederum den Untersuchungen in A) 2, das ist einerseits die Verschiebung in sich selbst, dann die — wie wir jetzt sagen können — Parallelverschiebung.

Noch eine Überlegung kann angestellt werden, die allerdings besser ihre Stelle nach der gründlichen Erörterung des Parallelismus findet, nachdem der Ausdruck festgelegt ist, den man in Bezug auf die Richtung zweier Parallelen gebrauchen will. Da ich diese Betrachtungen erst im nächsten Kapitel einer näheren Erörterung unterziehen will, so will ich hier nur andeuten, dafs die Lage zweier Geraden auch unter dem

---

[1]) Es wird sich empfehlen, auch den umgekehrten Weg bei wiederholter Besprechung einzuschlagen.

[2]) Den Begriff des Winkels lasse ich vorläufig ganz aus dem Spiele. Natürlich würde es nichts verschlagen, etwa folgende Erklärung zu geben: Haben die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam, so sagt man, sie schneiden sich oder sie bilden einen Winkel; ganz analog dem ersten Fall, wo man sagt, sie heifsen parallel.

Gesichtspunkte betrachtet werden kann, dafs entweder die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben oder gemeinsame Richtung. Tritt beides gleichzeitig ein, so fallen die beiden Geraden zusammen.

B) 3. Gerade und Kreis.

Der hier zu behandelnde Abschnitt wird die Vorzüge der im Vorstehenden dargestellten Behandlungsweise des planimetrischen Stoffes in besonders hevorragender Weise zur Geltung bringen. Es wird sich zeigen, dafs bei der Darbietung der Lagenverhältnisse, wie sie sich vom Einfachsten aus aufbaut, eine ganze Reihe Beweise und Ausführungen, die an das Verständnis des Schülers grofse, oft nicht erfüllte Anforderungen stellen, entbehrlich macht und so dazu dienen wird, einen Teil des mathematischen Unterrichts in einer den Schüler interessierenden und ihn sympathisch berührenden Weise zur Klarheit zu bringen, der in der veralteten Form geeignet war, eher abschreckend als anregend zu wirken.[1] Es gilt vor allem wieder die Möglichkeit der verschiedenen Fälle festzustellen. Es sind deren drei:

1. Gerade und Kreis haben keinen Punkt gemeinsam.
2. Gerade und Kreis haben einen Punkt gemeinsam.
3. Gerade und Kreis haben zwei Punkte gemeinsam.

1. Gerade und Kreis haben keinen Punkt gemeinsam, der Kreis liegt aufserhalb der Geraden.

Zunächst suchen wir den Nachbarpunkt des Zentrums auf, er werde mit P bezeichnet. P ist also derjenige Punkt der Geraden, der Z am nächsten liegt oder wir suchen den Punkt des Kreises auf, der der Geraden am nächsten liegt, die Nachbarpunkte des Kreises und der Geraden. Nach den Ausführungen in A) 3 ist sofort ersichtlich, dafs die beiden Nachbarpunkte von Gerade und Kreis sich ergeben, wenn wir Z mit P verbinden. Diese Strecke wird den Kreis im Punkte

[1]) Zugleich wird durch diese Darstellungsweise eine natürliche Anordnung erreicht, die verhindert, dafs Zusammengehöriges auseinandergerissen, Unverträgliches zusammengepackt wird. Alles, was man als ersten Teil der Kreislehre bezeichnen kann, wird hier und in C) 1, 2, 3 auf einfachste und natürlichste Weise behandelt und dient wiederum dazu, anderes in neuem, klarerem Lichte darstellen zu können.

A schneiden, der der Nachbarpunkt von P auf $\mathfrak{K}$ ist. Das geht unmittelbar aus den Betrachtungen in A) 3 hervor. Da $\mathfrak{G}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam hat, so ist selbstverständlich, dafs auch der Punkt von $\mathfrak{G}$, der Z am nächsten liegt, weiter von Z entfernt sein mufs, als ein Punkt von $\mathfrak{K}$. Es ergiebt sich also zunächst, dafs der Zentralabstand — die Strecke $\overline{ZP}$ — gröfser ist als der Radius. Ganz wie in A) 3 wird auch erkannt, dafs $\overline{ZP}$ notwendig durch den Punkt von $\mathfrak{K}$ geht, der der Nachbarpunkt von P ist, und dafs die Verlängerung über Z hinaus den Punkt von $\mathfrak{K}$ trifft, der von P am weitesten entfernt ist. Hier gereichen uns schon die Streckenvergleichungen, die wir in A) 1 anstellten, sowie die Untersuchungen von A) 3 zu grofsem Nutzen: es bietet sich Gelegenheit zu reichhaltiger Anwendung. Gelegentlich möchte ich übrigens hier bemerken, dafs sich im Laufe der Untersuchungen schon eine grofse Reihe von Grundsätzen gezeigt haben, für deren genaue Formulierung und besondere Klarheit im Bewufstsein natürlich gesorgt werden mufs.

2. Gerade und Kreis haben einen Punkt gemeinsam. Dies können selbstverständlich nur die Nachbarpunkte sein, die hier zusammenfallen. Die Gerade hat in diesem Falle den Namen Tangente. Aus den früheren Betrachtungen im Vergleich mit der jetzigen geht unmittelbar hervor, dafs der Zentralabstand, der gleich dem Radius ist, auf der Tangente senkrecht steht und umgekehrt. Aus den natürlichen Anschauungen ergeben sich so in klarster Weise alle Sätze über Tangente und Kreis, die sonst in den Lehrbüchern weitläufige, oft recht unklare Beweise erfordern, so z. B. dafs jeder andere Punkt der Geraden einen gröfseren Zentralabstand hat als P.

3. Gerade und Kreis haben zwei Punkte gemeinsam. Die Gerade heifst Sekante, die Strecke derselben zwischen den beiden Schnittpunkten Sehne. Der Nachbarpunkt liegt jetzt innerhalb des Kreises, der Zentralabstand ist kleiner als der Radius.

Alle drei Fälle müssen natürlich auch umgekehrt betrachtet werden, indem man von dem Zentralabstand ausgeht.

Besondere Fruchtbarkeit gewinnen nun die Betrachtungen erst, wenn man mit Zuhülfenahme der Bewegung alle drei

Fälle zu einem organischen Ganzen verbindet. Doch halte ich es für methodisch richtig, erst die drei Fälle gesondert ohne innere Verknüpfung zu diskutieren.

Ganz analog den früheren Betrachtungen spielt auch hier die Drehungsbewegung die Hauptrolle, kann aber natürlich erst zur Geltung kommen, wenn wir C) 2 behandeln, nämlich den Fall, dafs der Kreis als fest angenommen wird, die Gerade als beweglich. An dieser Stelle des Unterrichts sind die Bewegungen des Kreises, so, dafs Z auf der Geraden, die durch die Punkte Z und P bestimmt ist, sich bewegt, die wichtigeren. Es geht aus diesen letzteren Bemerkungen hervor, dafs die Betrachtungen doch nicht ganz so einfach sind, als sie vielleicht auf den ersten Blick erscheinen, und dafs die Gewinnung der nötigen geometrischen Einsicht einer sicher leitenden Hand bedarf. Ist diese aber vorhanden, so werden die Schüler aus eigener Thätigkeit die richtige Anschauung gewinnen — übrigens auch durch die schon reichlich vorhandenen Vorübungen sich leicht und sicher in das Neue, das eigentlich nichts Neues mehr für sie ist, finden.

C) 1. Kreis und Punkt.

Nachdem aus meinen bisherigen Ausführungen deutlich hervorgegangen ist, wie ich diese gesamte Behandlung der Lagenverhältnisse verstanden und durchgeführt wissen will, würde ich fürchten, den Leser zu ermüden, wenn ich hier noch ausführlicher mich aussprechen würde.

C) 2. Kreis und Gerade.

Die drei möglichen Fälle sind natürlich dieselben, wie bei B) 3. Aber es ist doch notwendig, auf die Untersuchung hier näher einzugehen, da wir hier, wie ich oben schon angedeutet habe, die höchst fruchtbare Betrachtung anstellen können, dafs der Kreis fest liegt, während die Gerade die drei möglichen Bewegungen ausführt: Verschiebung in sich, Parallelverschiebung und endlich die wichtigste, die Drehung um einen festen Punkt.

Hier ist jetzt der Ort, die Lagen von Gerade und Kreis in voller organischer Verknüpfung aufzufassen und das innere Wesen aller hierher gehörigen Betrachtungen in voller Klarheit zu erfassen.

Ganz besonders wichtig ist hierbei die Auffassung der Verhältnisse, die sich ergeben, wenn wir die Gerade, nachdem sie einen Punkt mit dem Kreise gemeinsam gehabt hat, weiter drehen. Nicht nur ergeben sich die Sätze über den Zusammenhang von Zentralabstand und Sehne auf das Allernatürlichste — der sonst weitläufig bewiesene Satz, daſs die kleinere Sehne den gröſseren Abstand habe etc. —, es geht auch mit voller Klarheit ohne weiteren Beweis aus der Anschauung — und zwar der von sinnlichen Mängeln und Inkorrektheiten vollständig freien, d. h. der reinen Anschauung — hervor, daſs der Mittelpunkt der Sehne mit dem Nachbarpunkte von Z identisch ist.

Ich hoffe nicht, daſs ich hier Einwendungen begegnen werde, daſs die Strenge der Mathematik bei einer solchen Behandlungsweise leide; im Gegenteil, ich gebe mich der zuversichtlichen Hoffnung hin, daſs die Ansicht vorherrscht, die mein Rezensent Lindenthal[1]) ausgesprochen hat: „Den aus reiner Anschauung sich ergebenden Beweis nennt der Verf. mit Recht den strengsten.“[2])

Selbstverständlich ist, daſs überall den besonderen Fällen auch eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden muſs, so hier den beiden Lagen, wo die Sehne ihren kleinsten und ihren gröſsten Wert hat, während gleichzeitig der Zentralabstand den gröſsten resp. kleinsten Wert annimmt.

Überhaupt wird der einsichtsvolle Leser alle hier gegebenen Ausführungen nicht unter dem Gesichtspunkte auffassen dürfen, als wenn hier strenge Vorschriften bis ins Einzelnste hinein gegeben werden sollen; der Verfasser hat nur

---

[1]) Zeitschrift für das Realschulwesen. 16. Jahrg. 11. Heft.

[2]) J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Vorwort: „Giebt es in der That Sätze, welche mit vollkommener Sicherheit aus bloſser Anschauung erkannt werden können, so ist nicht einzusehen, mit welchem Rechte „die Wissenschaft“ die Zahl dieser Sätze „zu vermindern“ sucht. Ist doch keine Einsicht überzeugender, als die aus unmittelbarer Anschauung gewonnene, und erhält doch alle durch Schlüsse gewonnene Erkenntnis ihre überzeugende Kraft erst auf Grund der anschaulichen Erkenntnis, von der sie ausgegangen! Man sollte darum meinen, es sei wissenschaftlich, so viel wie möglich auf die unmittelbare Anschauung zurückzuführen und erst, wo diese uns im Stiche läſst, zur Deduktion seine Zuflucht zu nehmen.“

den Gang dargestellt, wie er im Anfangsunterrichte verfährt, den er allerdings auf Grund seiner Erfahrungen nicht nur empfehlen kann, den er von seinem subjektiven Standpunkte aus als den allein richtigen ansieht.

Es folgt nun die letzte hierher gehörige Untersuchung

C) 3. Kreis und Kreis.

Fünf wesentlich verschiedene Lagen sind möglich.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; sie liegen aufsereinander. $z > r_1 + r_2$.

2. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam; sie berühren einander von aufsen. $z = r_1 + r_2$.

3. Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; sie schneiden sich. $z \begin{smallmatrix} < r_1 + r_2 \\ > r_1 - r_2 \end{smallmatrix}$.

4. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam; sie berühren einander von innen. $z = r_1 - r_2$.

5. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; der eine Kreis liegt in dem andern. $z < r_1 - r_2$.

Diese Anordnung empfiehlt sich deshalb, weil man durch Bewegung von Fall zu Fall kommt und klar erkennt, wie allmählich der Übergang von dem einen zum nächsten erfolgt. Doch liefse sich selbstverständlich auch folgende Gruppierung vornehmen.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam;
   a) sie liegen aufsereinander; b) der eine im andern.
2. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam;
   a) sie berühren einander von aufsen; b) von innen.
3. Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; sie schneiden sich.

Wir wollen bei der Besprechung die erste Einteilung zu Grunde legen.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; sie liegen auseinander.

Wir verbinden die beiden Mittelpunkte mit einander Z_1 und Z_2. Die Strecke Z_1Z_2 heifst der Zentralabstand der beiden Kreise; die Gerade, die aus ihrer Verlängerung entsteht, heifst die Zentrale.

Auf der Zentralen haben wir sechs bemerkenswerte Punkte:

die beiden Zentren und zweimal zwei Schnittpunkte mit den Kreisen. Die des einen $\mathfrak{K}_1$ mögen A_1 und B_1, die des Kreises $\mathfrak{K}_2$: A_2 und B_2 heifsen, wo A_1 und A_2 als innere, B_1 und B_2 als äufsere Schnittpunkte anzusehen sind. Betrachten wir zunächst den Zentralabstand, so sehen wir, dafs er aus drei Strecken besteht: den beiden Radien Z_1A_1, Z_2A_2 und dem Stück A_1A_2. Der Zentralabstand ist gröfser als die beiden Radien zusammengenommen und zwar um A_1A_2. Es ergiebt sich sofort vermittels einer einfachen Betrachtung — man wird sich dabei auf die vorausgegangenen Untersuchungen stützen —, dafs A_1 und A_2 Nachbarpunkte sind. Denn zieht man zwei beliebige Radien und verbindet ihre Endpunkte, so ist dieser Weg von Z_1 nach Z_2 gröfser, als der Abstand Z_1Z_2. Da nun der Weg wiederum aus den beiden Radien und einer dritten Strecke besteht, so mufs, da die Radien dieselben sind, diese Strecke gröfser sein, als A_1A_2. A_1 und A_2 sind also Nachbarpunkte. B_1 und B_2 sind die resp. Gegenpunkte von A_1 und A_2; die Zentrale geht also aufser durch die Mittelpunkte der beiden Kreise durch diejenigen Punkte der Kreise, welche einander am nächsten liegen, sowie durch die, die am weitesten von einander entfernt sind. Man läfst nun den einen Kreis sich bewegen (dafs die angegebenen Betrachtungen bei allen möglichen Lagen der beiden Kreise durchgenommen werden, halte ich nach dem früher Dargelegten für selbstverständlich); unter diesen Bewegungen ist von besonderer Wichtigkeit die, bei der sich das Zentrum des bewegten Kreises auf der Zentralen bewegt, sodafs also diese Zentrale bleibt und ebenso A_1, A_2, B_1 und B_2 die Schnittpunkte der Zentralen und der beiden Kreise.

Läfst man nun Z_2 sich auf der Zentralen nach Z_1 hin bewegen, so wird, während r_1 und r_2 sich gleich bleiben, A_1A_2 immer kleiner werden, bis schliefslich A_2 mit A_1 zusammenfällt. Wir haben den zweiten Fall, die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam, sie berühren einander von aufsen. Der Zentralabstand ist gleich der Summe der beiden Radien. Ganz natürlich ist zugleich aus der Betrachtung ersichtlich, dafs die Zentrale durch den Berührungspunkt geht.

Bewegt man $\mathfrak{K}_2$ im selben Sinne weiter, so wird $z < r_1 + r_2$.

Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam, sie schneiden sich. Man kann nun die beiden Schnittpunkte verbinden und so auf die gemeinsame Sehne zu sprechen kommen, auf die Lage der Schnittpunkte gegen die Zentrale und die daraus resultierende Lage der Sehne gegen die Zentrale.[1]) Bewegt man $\mathfrak{K}_2$ noch weiter, so wird als nächste bemerkenswerte Lage wieder der Fall eintreten, dafs die beiden Kreise nur noch einen Punkt gemeinsam haben, sich von innen berühren. Es wird der Zentralabstand gleich der Differenz der Radien sein.[2]) Er mufs also vorher gröfser als die Differenz gewesen sein; es kommt also zu der früheren Bedingung für den Fall des Schneidens zweier Kreise $s < r_1 + r_2$ als weitere einschränkende Bedingung hinzu: zugleich aber mufs $s > r_1 - r_2$ sein. Bei fortgesetzter Bewegung erhalten wir endlich den Fall, dafs der eine Kreis ganz im andern liegt, dafs sie keinen Punkt gemeinsam haben. Der Zentralabstand ist kleiner als die Differenz der Radien.

Ich habe im Vorstehenden vorzugsweise oder fast ausschliefslich auf den Zentralabstand geachtet; selbstverständlich ist, dafs auch alle andern angeregten Betrachtungen in jedem einzelnen Falle angestellt werden müssen. So wird die Erörterung der Nachbarpunkte bei dem Durchgange von Z_2 durch $\mathfrak{K}_1$ interessante Beziehungen ergeben und uns zeigen, dafs wir es hier mit einem Grenzfall zu thun haben, da der frühere Nachbarpunkt plötzlich in seinem Gegenpunkte liegt. Auch die Diskussion der zwei Nachbarpunktpaare im dritten Fall wird Interesse erwecken. Besonders wertvoll aber wird es sein, die bei den Kreisen auftretenden Beziehungen in Verbindung zu setzen mit denen bei zwei Geraden.

Hiermit würde die allgemeine Lagenerörterung zu Ende geführt sein. Bei ausführlicher Behandlung und in Voraussetzung gründlicher Übungen und stets wechselnder Zeichnungen wird dieser Abschnitt natürlich einen grofsen Zeit-

---

[1]) An dieser Stelle würde vielleicht mit Vorteil die erste Anwendung der Symmetrielehre gemacht werden.

[2]) Gerade bei den Kreisbetrachtungen kommen uns die Übungen, die wir im Vergleichen, Addieren und Subtrahieren von Strecken angestellt haben, sehr zu statten.

raum in Anspruch nehmen. Das ist aber gewifs kein Schaden, denn der Gewinn für das Anschauungsvermögen, sowie für das mathematische Denken ist andererseits ein sehr grofser. Auch die Aufstellung der verschiedenen möglichen Fälle, die naturgemäfse Anordnung, die Kombination verschiedener Bedingungen, sowie der Umkehrungen ist von entscheidendem Werte. Besonders die Behandlung der Umkehrungen mufs eine sehr sorgfältige sein, da man auf diese Weise einen tiefen Einblick in die Verhältnisse gewinnt, der, weil der Gesichtspunkt, von dem man ausgeht, ein anderer ist, vollständige Klarheit schafft.

An die Lagenbetrachtungen würde sich nun die besondere Erörterung der Parallelen und der Winkel anzuschliefsen haben, die wir aber hier jetzt nur erwähnen wollen, weil wir diesen beiden eigene Kapitel widmen werden.

Von hierher gehörigen Arbeiten sind es zwei, die zuerst erwähnt zu werden verdienen, die schon oben in einer Fufsnote erwähnte von Gille und eine von Dieckmann.

Im 32. Hefte der Lehrproben und Lehrgänge findet sich p. 94 ein Aufsatz von Dr. A. Gille (Cottbus): Didaktisches aus dem planimetrischen Unterricht.

Nr. 3 dieses Aufsatzes ist überschrieben: Aufbau des Lehrstoffes im Ganzen und im Einzelnen.

Nachdem der Verfasser auf die Vorwürfe, die sich gegen Euklid richten, eingegangen und besonders den Schlömilchschen Versuch in seiner Geometrie des Mafses eine organische Gliederung zu geben besprochen hat, giebt er selbst einen andern organischen Aufbau, den er mit folgenden Worten einleitet: „Nachdem der Schüler aus der Aufgabe der Planimetrie ersehen hat, dafs sie nur mit den Elementen Punkt und Linie und zwar zunächst nur mit der geraden Linie sich beschäftigt, ergiebt sich doch wohl als natürlichster Gang der Untersuchung, der dem Schüler von vornherein zur Klarheit zu bringen ist:

A) Der Punkt.
B) Die Gerade.
C) Punkt und Gerade.
D) Gerade und Gerade. a) Zwei Gerade. b) Drei Gerade.

Bei der Untersuchung des vorletzten Teiles [D) a] ergiebt sich sofort aus der Zeichnung der möglichen Lagen der Geraden zu einander eine Gliederung nach 1. zwei sich schneidenden Geraden und 2. zwei parallelen Geraden."

Der Verfasser kommt dann in D) b auf diejenigen Untersuchungen, die wir in dem Kapitel über die Anwendungen der Winkel- und Parallelenlehre bringen werden. Es heifst dann weiter:

„Beispielsweise gestaltet sich auch der Aufbau der Kreisuntersuchung ganz natürlich nach folgendem Gange:

A) Kreis und Punkt.
B) Kreis und Gerade.
  I. Kreis und eine Gerade.
  II. Kreis und zwei Gerade.
  III. Kreis und Dreieck.
  IV. Kreis und Viereck.
  V. Kreis und Vieleck.
C) Kreis und Kreis.

Auf diese Weise baut sich der ganze Unterrichtsstoff in einer Reihe organisch sich aneinander anschliefsender Einheiten auf."

Der Verfasser greift dann den Fall heraus, zwei Parallele und eine Schneidende, um daran seine Methode zu zeigen. Er sagt: „Das erste ist, dafs die neuen Begriffe, welche hier eintreten, ins rechte Licht gestellt und benannt werden." . . . „Der erste Schritt ist also wesentlich Definition. Nun erst kann man zum Untersuchen der neuen Begriffe, d. h. zum Aufsuchen von Beziehungen der Gröfse oder der Lage weiterschreiten."

Sehr richtig bemerkt der Verfasser sodann, dafs die Schüler durch Anschauung das Richtige vermuten werden, dafs es aber notwendig sei, auch das mathematische Mufs darzuthun. Dann nennt er als zweites die Behandlung der besonderen Fälle und sagt: „Endlich gilt es noch, die gewonnene Erkenntnis zu verwerten und einzuprägen in mannigfachen Übungen, welche auszuführen der Schüler aus eigener Kraft imstande sein mufs."

„Die Behandlung der didaktischen Einheit schreitet also

in folgendem Gange fort: 1. Erklärung der neuen Begriffe. 2. Untersuchung derselben: Ergebnis, Lehrsatz. 3. Vertiefung der gefundenen Ergebnisse: Umkehrungen und Folgerungen. 4. Übungen."

Als ausführliches Beispiel giebt der Verfasser sodann die systematische Behandlung der Kreislehre und behandelt dann in Nr. 4, Zur Entwicklung der Selbstthätigkeit im planimetrischen Unterrichte, die Wirkungen eines im obigen Sinne geleiteten Unterrichts.

Es zeigt sich also, dafs der Verfasser im wesentlichen auf unserem Standpunkte steht: doch glaube ich, dafs, wenn man das betonte Prinzip einführen und mit Erfolg anwenden will, es in der ausführlichen Weise geschehen mufs, die wir oben geschildert haben. Gerade das Fehlen des ersten Falles, Punkt und Punkt, scheint uns ein wesentlicher Mangel in den Ausführungen des Verfassers. Dafs wir aber im übrigen seine didaktischen Ansichten teilen, geht zur Genüge aus unserer Behandlung der Lagenuntersuchungen hervor.

Der Aufsatz von Dieckmann findet sich in Hoffmanns Zeitschrift, 24. Jahrgang, Heft 2, p. 84. „Bewegung und Umformung. Eine methodische Skizze. Von Prof. Dr. Josef Dieckmann in Viersen."

Auch dieser Aufsatz widmet den Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts die Einleitung. (Unsere Studie über diese Reformbestrebungen im ersten Bande dieses Werkes scheint dem Verfasser nicht bekannt zu sein.) Besonders ein Ausspruch Cauers wird zitiert, in welchem Cauer fordert, dafs der mathematische Unterricht lebensvoller und anschaulicher gestaltet werden müsse.

Im weiteren tritt der Verfasser für die ausgiebige Benutzung der Bewegung ein, zum Teil in anderer Weise wie wir. So läfst er z. B. bei den Kreisbetrachtungen den Kreis sich konzentrisch erweitern. Man sieht, dafs sich diese Untersuchungen leicht mit den unsrigen kombinieren lassen. Sie würden da einzuschalten sein, wo wir den Kreis so verschieben, dafs der Mittelpunkt auf der Zentralen sich bewegt. Auf die Bemerkungen des Verfassers über Bewegung selbst werden wir in dem Kapitel, Geometrische Begriffe, zu sprechen

kommen. Im übrigen zeigt der Verfasser dann an mehreren Aufgaben, wie er die Bewegung verwertet wissen will.

Von sonstigen Aufsätzen in der Hoffmannschen Zeitschrift seien noch folgende erwähnt.

Bd. 1 H. Kiessling, Das geometrische Zeichnen als Grundlage für den mathematischen Unterricht. p. 47—59. Wir glauben, daſs die dort vorgebrachten Ideen sich recht gut mit dem von uns vertretenen Standpunkte vereinigen lassen würden.

R. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule. p. 474 bis 490.

Sturm betont die Wichtigkeit des geometrischen Unterrichts vor dem arithmetischen, „denn ihr (der Geometrie) wohnt eine viel gröſsere Bildungskraft inne", tritt für die synthetische Geometrie ein, weil „das Formelwesen der analytischen Geometrie die Anschauung meistens unterdrückt" und empfiehlt das Buch von Geiser. In der weiteren Ausführung finden sich folgende bemerkenswerten Sätze:

„Die alte Euklidische Geometrie ist vorzugsweise eine Geometrie des Maſses und diesen Charakter hat unsere Schulgeometrie auch mit angenommen: diese muſs von der neueren Geometrie, die ja oft geradezu Geometrie der Lage heiſst, mehr und mehr eine gröſsere Berücksichtigung der Lage lernen."

„Den Vergleich der verschiedenen Lagen z. B. eines Kreises und einer Geraden zu einander muſs der Schüler wiederholt durchmachen, sodaſs er als feste Erkenntnis davonträgt, daſs die eine — die Tangentiale — unwahrscheinlich ist im Vergleich zu den beiden andern, zwischen denen sie eben nur die — momentane — Übergangslage ist, und also im allgemeinen nicht anzunehmen ist, und wenn sie stattfindet, notwendig begründet werden muſs."

„Auch des Unterschiedes muſs schon der Schüler sich bewuſst werden, ob durch gewisse Bedingungen ein Gebilde so bestimmt ist, daſs noch unendlich viele Lösungen möglich sind oder nur eine endliche Zahl oder gar keine..."

„Lassen wir so die geometrischen Gebilde aus ihrer Starrheit hervortreten und sich bewegen, verändern und vermehren,

so wird dies gewifs wesentlich zur Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens beitragen und das Lebendigwerden des Materials, mit dem der Schüler zu thun hat, wird sicher sein Interesse auch mehr fesseln.“

Der Verfasser schliefst seinen Artikel mit einer Anpreisung des Gesetzes der Reziprozität (Dualität, Polarität), dessen Anwendung resp. Anwendbarkeit im planimetrischen Unterrichte er an verschiedenen Beispielen zeigt.

In Grunerts Archiv Bd. 8, p. 365 findet sich ein Aufsatz: Über geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie von Dr. W. Matzka. Dem Verfasser scheint ebenfalls der Anfangsunterricht in der üblichen Form nicht zugesagt zu haben, doch setzt er unseres Erachtens nicht an der richtigen Stelle mit seinen Änderungsvorschlägen ein. Er sagt: „Untersucht man jedoch die möglichen noch einfacheren Raumgebilde (als das Dreieck), so findet man deren zwei, die bisher der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen zu sein scheinen, und die dennoch zu einer natürlichen Grundlage der Geometrie geeigneter sein dürften, als das Dreieck, nämlich:

1. Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte aufser ihr,

2. Das System zweier parallelen ganzen Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.“

Der Verfasser sucht dann nachzuweisen, dafs hier thatsächlich die einfachsten Raumgestalten vorliegen und dafs sie sich zur Aufstellung einer Fundamentallehre der Geometrie besonders eignen; in einem zweiten Abschnitte giebt er dann Proben, wie er das Parallelenpaar verwertet wissen will.

In der folgenden Zusammenstellung werde ich nun die hervorragendsten Proben geben von den Versuchen, den Anfangsunterricht in der Planimetrie anders zu gestalten. Ich hoffe, dafs mir nichts Wesentliches entgangen ist. Über die Art, wie ich hier zitieren sollte, war ich im Zweifel: es lag die Gefahr nahe, allzu umfangreiche Zitate geben zu müssen. Ich habe mich daher im wesentlichen darauf beschränkt, den Aufbau anzudeuten, die Einzelheiten der Ausführung aber

wegzulassen. Wessen Interesse durch das Gebotene geweckt wird, kann ja dann leicht das betreffende Werk selbst zum Gegenstand seines Studiums machen. Verschiedene Lehrbücher hätten vielleicht noch Erwähnung verdient; da aber in ihnen nur Ansätze zu einer Änderung sich fanden, oft auch die Konsequenzen nicht gezogen wurden, so habe ich von ihnen abgesehen. Gleich hier will ich bemerken, dafs die beiden Fragen Parallelismus und Winkel in besondern Kapiteln bearbeitet werden und dafs ich auch da auf dem Standpunkte stehen werde nur zwei Elemente zu verwenden, einmal zwei Gerade, dann zwei Strahlen. Das an die beiden Kapitel sich anschliefsende Kapitel wird dann zuerst mit drei Elementen sich beschäftigen, wobei ich unter dem Titel Anwendungen der Parallelen- und Winkellehre alles das zur Sprache bringen werde, was sich gewöhnlich direkt an die Behandlung von Parallelen und an die Definition vom Winkel anschliefst.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

In diesem Lehrbuche findet sich folgende Einteilung des ersten Abschnittes.

„§ 1. Gröfse und Lage oder Richtung einer Geraden.
§ 2. Vergleichung der Gröfsen zweier Geraden.
§ 3. Gegenseitige Lage zweier Geraden.
§ 4. Von der geneigten Lage. (Winkellehre.)
§ 5. Von der parallelen Lage."

Hieran schliefsen sich direkt trigonometrische Untersuchungen und daran Koordinatengeometrie.

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie. — Halle 1844 giebt eine äufserst ausführliche Darstellung der Lagenverhältnisse, indem er von der Frage ausgeht „Welche Zusammenstellungen erhält man, wenn von Punkten, Geraden und Ebenen, die hier immer als unbegrenzt anzunehmen sind, je zwei genommen werden?"

Die ganze Winkellehre wird dabei auch abgehandelt. Unter andern findet sich ein Abschnitt: „Von der Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Geraden aus den Lagen, welche

diese gegen eine dritte haben, wenn diese Linien nicht in einerlei Ebene liegen.“

Die Betrachtungen werden in einem Anhange noch vertieft. In diesem findet sich z. B. ein Abschnitt: „Bestimmung der möglichen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu je dreien genommen.“

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie.[1]) — Jena 1851.

I. Buch. Der Punkt.

1. Abhängigkeit der Elemente; 2. Gröfse; 3. Form; 4. Lage. Hier heifst es: „Liegen mehrere Punkte aufser einander, so kann blofs von der Ordnung, in welcher sie aufgefafst werden sollen oder können, die Rede sein. Die ganze Frage wird durch die Kombinationsoperationen und Kombinationszahlen beherrscht. Die ersteren sind logisch, die letzteren arithmetisch.“

Im Übungsstoff finden sich Aufgaben, wie die folgende:

Verbinde fünf Punkte auf alle möglichen Weisen zu einem Fünfeck.

II. Buch. Die gerade Linie.

1. Abhängigkeit der Elemente; 2. Gröfse; 3. Form; 4. Lage. A) Zwei Gerade (besser müfste es heifsen: zwei Strecken). Es werden drei Hauptlagen unterschieden, deren erste 8 besondere Fälle aufweist. Bei der eingehenden Erörterung ergiebt sich der Winkel, der ausführlich betrachtet wird. Daran knüpfen sich wieder Lagenuntersuchungen zweier Winkel. Dann kommt die Lehre von den Parallelen, dann B) drei Gerade;[2]) C) vier Gerade; D) beliebig viele Gerade.

III. Buch. Figur.

---

[1]) Vorrede: „Dafs nach der Anlage des Ganzen der Unterschied von analytischer und synthetischer Geometrie, von der Geometrie des Mafses und der Lage aufgehoben ist, leuchtet wohl von selbst ein.“

„Ich habe mich bemüht, rein aus dem Wesen der Sache zu entwickeln, weil diese Art mir vom wissenschaftlichen sowohl als pädagogischen Standpunkte die einzig rechte erscheint.“

[2]) Ich halte es demgegenüber für wesentlich, gleich den Kreis mit in die ersten Untersuchungen über die Lage zweier Gebilde hineinzuziehen.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.
Der dritte Abschnitt „Von Punkten, Linien und Winkeln" bietet eine Reihe von sogenannten Lehrsätzen über die Lage von Punkten gegen einen Kreis mit Scheinbeweisen; daran schliefsen sich Sätze über Winkel. Der folgende Abschnitt handelt von der Kongruenz.

Gernerth, Grundlehren der eb. Geometrie. — Wien 1857. bespricht an verschiedenen Stellen die Lagenbeziehungen von Raumgebilden, so § 6, 7, 16, 17 und besonders § 34: Vergleichung von Kreisen bezüglich ihrer Gröfse und ihrer Lage. Hier heifst es: „Sind zwei Kreise exzentrisch, so sind drei verschiedene Fälle möglich; die Peripherieen derselben haben entweder 1. keinen Punkt, oder 2. einen Punkt, oder 3. zwei Punkte mit einander gemeinschaftlich." Die möglichen Lagen werden dann erörtert und auch auf die Abstandsbeziehungen Rücksicht genommen.

Hubert Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

I. Der Punkt, die Gerade und der Kreis.
  Lagen von Punkten und Geraden.
 (Winkel und Strecken. Messen der Strecken.)
  Der Kreis.
II. Von den Parallelen.

Hubert Müller, Leitfaden. — Leipzig 1889.

I. Die Grundgebilde.
  Lagen von Punkten und Geraden.
 (Winkel und Strecken.)
  Symmetrie in Bezug auf eine Axe.
  Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.
 (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Sätze über symmetrische Figuren, Winkelbezeichnungen.)
  Zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten[1]) werden.

---

[1]) Hubert Müller hat in der dritten Auflage die Betrachtungen über den Kreis ausgeschieden; dafür hat die Symmetrielehre eingehende Berücksichtigung gefunden.

Gilles, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Heidelberg 1877.

Im § 8 werden „die Beziehungen zweier geraden Linien gegen einander" besprochen.

„Da die gerade Linie durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und eine Richtung bestimmt ist, so sind zwei Betrachtungen möglich:

Erstens: Die beiden Geraden haben a) keinen, b) einen, c) zwei oder mehr Punkte gemeinschaftlich.

. . . .

Die zweite, die fruchtbarere Betrachtungsweise ist folgende: Die Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und eine Richtung, in welchen Angaben das ganze Wesen der Geraden enthalten ist. — Es sind folgende Fälle möglich:

1. Der Ausgangspunkt ist gemeinschaftlich.
2. Der Ausgangspunkt ist verschieden.

In jedem dieser beiden Fälle ist entweder die Richtung dieselbe oder verschieden."

Hieraus ergeben sich also vier mögliche Fälle.

E. E. Müller, Versuch einer organischen Entwicklung der Geometrie vermittelst elementarer Vereinigung der Geometrie des Maſses mit der Geometrie der Lage.[1]) — 1877. Progr. Nr. 538.

p. 4: System der Geometrie des Maſses und der Lage.

Erste Abteilung.

Konstruierende Geometrie.

Erster Abschnitt.

Konstruierende Planimetrie

oder

Die durch die Elemente von drei in einer Ebene liegenden ebenen Strahlenbüscheln bestimmten Gebilde.

(Lehre vom Dreipunkt.)

---

[1]) Man vergleiche auch desselben Verfassers:

1. Elemente der Planimetrie, streng systematisch. — Braunschweig 1869.
2. Disposition und Fragmente einer streng wissenschaftlichen Raumlehre. Im fünften Bande des „Pädagogischen Archivs" 1863. p. 641.

Einleitung. Logische Grundlagen des Systems.

a) Definitionen (Erklärungen).
b) Postulate (Forderungen).
c) Axiome (Grundsätze).

Erstes Buch. Die durch die Strahlen dreier ebener Strahlenbüschel bestimmten kongruenten oder inkongruenten Gebilde.

Erstes Kapitel. Die eine der durch drei Punkte gegebenen Zentralstrecken

a) für sich;
die gegenseitige Bestimmung zweier Punkte einer Geraden mittelst ihres Abstandes;
b) nebst dem Kreise um den einen der Grenzpunkte;
Vergleichung der Abstände und der Lage zweier Punkte einer Ebene von und zu einem dritten;
c) nebst den Kreisen um beide Grenzpunkte;
Addition, Subtraktion und geometrisches Verhältnis zweier Strecken überhaupt.

Zweites Kapitel. Zwei der durch drei Punkte gegebenen Zentralstrahlen in ihrer Beziehung zu den andern Strahlen des sie enthaltenden ebenen Strahlenbüschels.

Die gegenseitige Bestimmung der Strahlen und Winkel eines ebenen Strahlenbüschels.

Drittes Kapitel. Zwei der gegebenen Zentralstrahlen und der sie enthaltende ebene Strahlenbüschel in Beziehung auf den dritten Zentralstrahl als Transversale des Büschels, projektivische Beziehung der Büschelstrahlen und der Transversalpunkte.

Die gegenseitige Bestimmung der von den Strahlen und der Transversale des Büschels gebildeten Strecken und Winkel und Elemente überhaupt nach Gröſse und Lage; Kongruenz und Inkongruenz der Dreiecke, resp. $n$ecke; die gegenseitige Beziehung des Neben- und Gegensystems zu einander und zum Hauptsysteme nach Gröſse und Lage, die Symmetrie; Fundamentalaufgaben; die parallelen, die nichtparallelen wie antiparallelen Geraden und die von ihnen mit einer Transversalen gebildeten Winkel.

Schlegel, Lehrb. d. element. Mathematik. II. — Wolfenbüttel 1879.

In diesem Lehrbuche werden nach der Einleitung folgende Betrachtungen angestellt.

„I. Geometrie der bewegten Gebilde.

I. Geometrie der Geraden.

Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden.

Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden.

II. Geometrie der Ebene.

a) Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene.
   1. Lagenänderung der Geraden.
   2. Richtungsänderung der Geraden. Der Winkel.

b) Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene.
   1. Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm.
   2. Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche.“

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

Die Einleitung behandelt nach der Erörterung der Grundbegriffe „§ 13. Zwei Punkte; § 14. *n* Punkte; § 15. Die Parallelen; § 16. Der Kreis; § 17. Der Winkel; § 18. *n* verschieden gerichtete Gerade; § 19. Die Gleichheit der Linien.“

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. — Liegnitz 1889 giebt als Einführung in die Geometrie: A) Allgemeines über geometrische Gebilde. B) Die einfachen Lagenbeziehungen der Grundgebilde.

1. Punkt und Gerade; 2. Punkt und Ebene; 3. Zwei Gerade; 4. Gerade und Ebene; 5. Zwei Ebenen.

p. 10 beginnt die Planimetrie.

I. Die Lage zweier Geraden.
   A) Von den Winkeln.
   B) Von den Parallelen.

II. Die ebenen Figuren.

Auch hier finden sich Abschnitte über die Lagen von Gebilden. § 26. Der Kreis und der Punkt; § 27. Der Kreis und die Gerade. Die drei möglichen Lagen werden in diesem Paragraph erörtert. Doch geht der Verfasser vom Abstand

aus, nimmt ihn zur Voraussetzung, während wir den entgegengesetzten Weg einschlugen. — Die Lage zweier Kreise findet sich im § 43 behandelt. Man sieht, die Lagenbetrachtungen sind sehr auseinander gerissen.

II. Kapitel.

Der Winkel.

Die Erörterung des vorliegenden Begriffes ist von mir schon vor einer Reihe von Jahren in der Hoffmannschen Zeitschrift (Bd. XX, p. 481—501) versucht worden. Da der Artikel eine Reihe weiterer Arbeiten veranlaſst hat, die sich mit demselben Gegenstande beschäftigen, so darf ich wohl diesen Artikel zum Ausgangspunkte der jetzigen Betrachtungen machen; zum Theil werde ich die dortigen Ausführungen wörtlich reproduzieren können, im übrigen muſs ich auf den Artikel selbst verweisen, da eine Anzahl der dort berührten Fragen teils in der Einleitung zum ersten Bande des vorliegenden Werkes ihre Erledigung gefunden haben, teils durch die Untersuchungen des ersten Kapitels dieses zweiten Bandes abgeschlossen sind.

Den Anlaſs zu dem Artikel gab Herr Dr. Wimmenauer in Hoffmanns Zeitschrift Bd. XIX, p. 261, indem er dort darauf aufmerksam machte, daſs bezüglich der Definition des Winkels eine bedeutende Verschiedenheit bestehe, und eine Einigung anregte. Am selben Orte p. 262 finden sich einige Bemerkungen von Hertter zu einem Aufsatze Hoffmanns in Bd. XVI, p. 340. Hoffmann führt l. c. aus, daſs die Definition des Winkels als eines Ebenenstückes nicht richtig sei.

„Winkel ist nicht ein Stück (Ausschnitt) der Ebene, also Ebene selbst, sondern nur das dem Ebenenstück Form gebende, durch Drehung erzeugte Liniengebilde; er ist die primitivste (noch offene) Figur. Form (Figura) erhält die Ebene (oder überhaupt eine Fläche) erst durch Umgrenzung. Durch die Gerade erhält die Ebene noch nicht Form; es muſs erst die Richtungsänderung (der Geraden) hinzutreten und das e[illegible]

fachste geradlinige Gebilde mit Richtungsänderung ist eben der Winkel. Winkel ist also nicht der von den Schenkeln abgegrenzte nach einer Seite noch offene (unbegrenzte) Flächen- (resp. Ebenen-)Raum, sondern nur das diesem Flächenstücke Form (Gestalt) gebende, durch Drehung erzeugte und daher der Vergröfserung und Verkleinerung fähige Liniengebilde."

Hoffmann kommt damit auf den Kernpunkt der Frage, nach dessen Beantwortung sich die Definition des Winkels erledigen mufs. Es ist nämlich zu beachten, dafs wir Winkel rein äufserlich auffassen können als Figur, als das, was sich der Anschauung darbietet;[1]) in diesem Falle würde die Definition lauten müssen: Winkel ist ein von zwei Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkte gebildete Figur, oder: Winkel ist ein Zweistrahlengebilde.[2])

Es ist einleuchtend, dafs uns durch diese Definition über das eigentliche Wesen des Winkels gar nichts gesagt ist, ja dafs eine grofse Unsicherheit dabei zurückbleibt, weil wir über die Beziehungen der beiden Strahlen zu einander gar nichts erfahren und doch erst die besondere Art, wie wir die beiden Strahlen in ihrem Zusammenhange aufzufassen haben, uns das liefert, was den Winkel definiert.

Es ist hier auch der Ort, auf eine Abhandlung Bürklens einzugehen, die er im Korrespondenzblatt f. d. Gel.- und Realsch. 1891 veröffentlicht hat. Es heifst dort, p. 4:

„Von was hat nun die erste Erklärung des Winkels beim Unterricht auszugehen? Jedenfalls von der Anschauung, vom

---

[1]) Becker, Von den Inkorrektheiten in der Sprache der Mathematik; H. Z. II, p. 96: „Die Definition des Wortes Winkel hat den Mathematikern von jeher viele Schwierigkeiten gemacht; aber nur deshalb, weil sie sich meist der anschaulichen Erkenntnis verschliefsen. Der einzige Schweins scheint mir den Nagel auf den Kopf getroffen zu haben, als er den Winkel einfach als das durch zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien erzeugte offene Gebilde definierte, wozu allerdings das zwischenliegende Stück der Ebene gehört."

[2]) Vergl. Becker, Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, p. 16: „Ursprünglich ist wohl unter einem Winkel, wie schon daraus hervorgeht, dafs man von seinem Scheitel und seinen Schenkeln spricht, nichts anderes verstanden worden, als eine Figur, welche er darstellt."

Seienden; es ist also zunächst, ähnlich wie bei der ersten Auffassung der Strecken, von der Bewegung abzusehen. Und wenn ferner in der Definition nicht alles zu sagen möglich und nötig ist, was in den Begriff hineingetragen werden kann, was für Forderungen hat dann jeweils die Definition zu erfüllen? W. Wundt[1]) sagt: „Als systematische Form sucht sie — die Definition — einen gegebenen Begriff auf das schärfste von den verwandten Begriffen zu trennen; als nächstes Ergebnis einer Untersuchung, welcher die Begrenzung der Begriffe erst zu einem tieferen Eindringen in den Gegenstand verhelfen soll, kann sie nicht das Wesen der letzteren erschöpfend bestimmen wollen, sondern muss sich unter Hervorhebung derjenigen Elemente begnügen, welche zur sichern Unterscheidung zureichend sind.“ H. Hankel[2]) sagt: „Mathematische Definitionen haben, soweit sie nicht Fixierung des Sprachgebrauchs betreffen, nur diejenigen wesentlichen Eigenschaften des zu Erklärenden anzugeben, welche zur weiteren Entwicklung und zur Verknüpfung eines Begriffs mit anderen notwendig erscheinen“. Ich möchte daher vorschlagen, einfach zu sagen: „Das durch 2 von einem Punkte ausgehende Strahlen erzeugte Gebilde heifst Winkel“. Ähnliches ist zwar schon öfter geschehen, aber fast niemals, ohne dafs nicht in Zusätzen noch der Richtungsunterschied oder dergl. angehängt worden wäre.“

Bürklen fährt dann fort:

„Mit der vorgeschlagenen Definition ist nun allerdings nicht viel über den Winkel gesagt,[3]) aber er ist dadurch von jedem andern geometrischen Gebilde, vom Strahlenbüschel, vom Dreieck, Dreikant etc. völlig scharf und eindeutig unterschieden.“

Aber hierauf allein kommt es nicht an; Wundt betont zwar ausschliefslich die Abgrenzung des Begriffs gegen verwandte, der Mathematiker Hankel aber verlangt in der Definition „die wesentlichen Eigenschaften, welche zur wei-

---

[1]) Logik II, S. 34.

[2]) Theorie der komplexen Zahlen, S. 48.

[3]) Völlig unsere Ansicht — nicht nur „nicht viel“, sondern wesentlich nichts.

tern Entwicklung und zur Verknüpfung mit andern notwendig erscheinen.“ Vor allen Dingen fehlt, wie ich schon oben bemerkte, in dieser Definition jeder Hinweis auf den Zusammenhang, in welchem die Elemente des definierten Begriffs aufzufassen sind. Dafs dies Bürklen selbst nicht entgangen, zeigen die Worte p. 5:

„In welcher Beziehung das so bestimmte Gebilde zur Ebene steht, ob es eine Gröfse hat — was grofs an ihm sei — und ob diese mefsbar, das alles hat erst die folgende Untersuchung zu entscheiden.“

Damit steht denn aber die Definition doch sehr arm an wissenschaftlicher Bedeutung da, zumal gilt „Die Gröfse ist freilich diejenige Seite am Winkel, auf die man am meisten zu sehen hat“, wenn auch „so wenig die Gröfsenmessung die alleinige Aufgabe der Geometrie bedeutet, so wenig das Wesen eines Gebildes ausschliefslich an seine Gröfse gebunden ist“.

Der weitere Inhalt der Abhandlung wird uns noch weiter unten beschäftigen.

Kehren wir zur Definition selbst zurück, so ist ferner als ganz wesentlich zu beachten, dafs diese Definition deshalb als ganz unzureichend zu bezeichnen ist, weil der Winkel unverändert bleibt, wenn man die Figur verändert;[1]) damit tritt denn diese Definition in Gegensatz zu jeder anderen Figurenerklärung. Ich werde hierauf noch zurückzukommen haben. Hier handelt es sich jetzt noch um den Hoffmannschen Artikel. Es heifst dort weiter: „Die zweite Definition (Gröfse der Drehung) aber, welche nur das Merkmal der Drehung berücksichtigt, ist u. E. zu eng, denn sie ignoriert das Merkmal der Formgebung oder Gestaltung, was gerade das Wesen des Winkelgebildes ausmacht.“

---

[1]) Becker, Geometrie auf neuer Grundlage: „Später sah man sich jedoch veranlafst, bei der Vergleichung der Winkel ... von der Länge der ihn bildenden Schenkel zu abstrahieren und einen Winkel als unverändert anzusehen, wenn seine Schenkel beliebig verlängert oder verkürzt werden. Da aber durch diese Veränderung der Schenkel die Figur eine andere wird, bleibt als Inhalt des Begriffes Winkel nur noch eine von der Länge der Schenkel unabhängige Eigenschaft der Figur übrig.“

Auch in einem Artikel des XX. Bandes kommt Hoffmann wieder auf diese Erklärung zurück, die er übrigens auch schon in einem Aufsatze „Studien über geometrische Grundbegriffe" im III. Bande seiner Zeitschrift verfochten hat. Dort heifst es (p. 532): „. . ., so grenzen die Richtungsstrahlen ein Ebenenstück ab, welches nach einer Seite hin noch offen, eine beliebige (gerad- oder krummlinige) Schliefsung oder Begrenzung zuläfst. Dieses offene Linien- oder besser Strahlengebilde, welches aus der allgemeinen Ebene ein Stück, einen Sektor, abgrenzt, aber nicht ein- oder umschliefst, heifst bekanntlich Winkel. Der Winkel giebt den Unterschied zweier Richtungen von demselben Punkte aus an. Er giebt aber auch zugleich dem Flächenstück (Sektor) die Form, er gestaltet es. Mit dem Winkel oder mit dem Wechsel der Richtung beginnt die Form, er ist das Urelement der Form."[1])

Im XX. Bande führt Hoffmann aus, entgegen der gewöhnlichen Ansicht, dafs zur Figur das Geschlossensein nicht als notwendiges Merkmal gehöre. Figur sei Form. p. 410: „Wo beginnt aber die Form? Strecke hat m. E. noch keine Form, sie ist formlos. Die Form hat ihre Wurzel (ihren Ursprung) in der Richtungsänderung, und diese beginnt mit dem Winkel... Der Winkel ist ein einem Ebenenstück die Form gebendes Liniengebilde. Er ist... der Embryo der Form."

Hoffmann schlägt für die Winkelgebilde den Namen „Eck" oder „Eineck" vor. „Mit der Gröfse und Form des Winkels wird sich natürlich auch das Eineck in seiner Gröfse und Form ändern."

---

[1]) Hierzu bemerkt Hoffmann in einer Fufsnote: „Will man den Winkel im Raume als formendes Element, abgesondert von der Fläche, anschaulich darstellen, so geschieht dies am besten durch einen Winkel von Draht oder gespannten Fäden." Vergl. die Zeitschrift Heft II, S. 123 u. 128, Anm.: „Im Wechsel der Richtung liegt der Keim zur Form." Eine Gerade ist auch formlos. Es könnte zwar das Aussehen des gestreckten Winkels diese Behauptung zu widerlegen scheinen. Doch ist bekanntlich ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Geraden und dem gestreckten Winkel in der psychischen Verfolgung ihrer Erzeugung."

„Durch diese Auffassung des Winkels als **Figur** gewinnt die Definition des Winkels mehr Licht und Halt."

Hoffmann fafst also den Winkel, wie er übrigens ausdrücklich selbst hervorhebt, nur als **Figur** und hebt als besonderen Vorzug dieser Definition hervor, dafs dadurch der Winkel unabhängig sei gegen den Begriff der Drehung und die damit zusammenhängenden Begriffe.[1]) Unsere Bedenken gegen diese Definition sind schon oben kurz, aber im wesentlichen angegeben. Hoffmann selbst hätten doch Bedenken aufstofsen müssen, da es sich erst als notwendig erwies, Figur anders zu definieren. Ferner ist der Zusammenhang zwischen Eineck und Winkel nicht klar, die Definition erhält dadurch aber etwas so Schwankendes, dafs das, was der Verfasser vermeiden wollte, erst recht in die Erscheinung tritt.

Sehen wir von der Hoffmannschen Erklärung ab, so können wir die von den verschiedensten Autoren aufgestellten Winkeldefinitionen in drei Gruppen teilen:

1. Der Winkel ist Richtungsunterschied.[2])
2. Der Winkel ist ein Ebenenstück.
3. Der Winkel ist die Gröfse der Drehung.

Doch ist hierbei zu bemerken, dass **fast alle** Lehrbücher, die eine andere Erklärung als die dritte geben, einen Zusatz haben, in dem auf den Zusammenhang von Winkel und Drehung hingewiesen wird. Diese wichtige Thatsache kann schon an und für sich lehren, dafs das eigentliche Wesen des Winkels mit der Drehung eng zusammenhängt und dafs eine Definition, die auf eine wirkliche Erklärung des Winkels

---

[1]) Man mufs allerdings zugeben, dafs bei dieser Definition der Winkelbegriff zurückgeführt ist auf die einfachen Elemente Punkt und Strahl, ohne dafs irgend etwas anderes sich einmischt. Ob aber damit etwas gewonnen ist, scheint in diesem Falle sehr zweifelhaft: um in das Wesen des betrachteten Gebildes einzudringen, gewissermafsen die tote Figur zu beleben, gehört doch, dafs der Zusammenhang aufgedeckt wird, in dem die Elemente unter einander stehen. Auch ist der Einwurf nicht ungerechtfertigt, dafs bei dieser äufserlichen Definition derselbe Fehler vorliegt, den **Hoffmann** der **Euklidischen** Definition macht, nämlich Starrheit.

[2]) Hierzu rechne ich auch die Euklidische Definition, die den Winkel als Neigung bezeichnet.

ausgeht, das Verhältnis von Winkel und Drehung in Berücksichtigung ziehen muss.

Eine ziemlich verbreitete Art, den Winkel zu definieren oder vielmehr die Definition des Winkels zu umgehen ist die, zu sagen: „Ein Winkel entsteht, wenn ....“. Dafs dies keine Definition des Winkelbegriffs ist, leuchtet ein, weshalb ich sie auch aus der ferneren Betrachtung ausschliesse.[1])

Während die Zitate am Schlusse des Kapitels folgen, muss ich doch an dieser Stelle, ehe ich an die kritische Besprechung der üblichen Definitionen herangehe, noch auf E. Müllers Definition eingehen, die er in seinen Elementen dargelegt hat.[2]) Zur Vervollständigung sollen noch aus der Vorrede eine Reihe von Definitionen des Winkels mit den kritischen Bemerkungen Müllers[3]) angeführt werden, wozu ich meinerseits bemerke, dass ich nicht überall mit Müller übereinstimme.

„Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen, ohne in einer geraden Linie zu liegen.“

Was ist aber die Neigung zweier (gerader?) Linien? Wie kann eine Neigung Summe oder Differenz von andern sein? Zu welcher Art von Gröfsen gehört alsdann der Winkel, zu den Zahlen oder Raumgröfsen, zu den Linien, Flächen oder Räumen? Wo bleiben die gestreckten Winkel, die Null und die Vollwinkel?

„Winkel ist der Unterschied der Richtungen zweier Geraden, oder die Richtungsabweichung zweier sich schneidender Geraden.“

Was ist der Unterschied der Richtung? Wo ist die

---

[1]) Vergl. Hoffmann, Zu den geometrischen Grundbegriffen in H. Z. Bd. XVI, p. 342: „. . ., dafs viele Autoren und Lehrer die Definition umgehen, indem sie sagen, Ein Winkel entsteht, wenn . . ., damit ist aber nicht gesagt, was der Winkel ist.“

[2]) E. Müller, Elemente der Geometrie, streng systematisch. — Braunschweig 1869.

[3]) Müller bemerkt dazu: „Um niemand persönlich zu verletzen, werde ich die Verfasser der Lehrbücher, aus denen die angeführten Stellen entnommen sind, nicht weiter nennen.“

Richtung definiert? Und zu welcher Art von Gröfsen gehört denn der Winkel?

„Wenn sich zwei gerade Linien begegnen, so heifst die geringere oder bedeutendere Gröfse, um welche sie ihrer Lage nach von einander entfernt sind, Winkel.“

Wo ist Lage definiert? Wäre es, so würde nicht von Entfernung der Lage geredet sein.

„Winkel zweier an einem Punkte (dem Scheitelpunkte) zusammengestellten und einerseits von diesem Punkte begrenzten Linien (Winkelschenkel) ist die Gröfse derjenigen Drehung (Schwenkung), durch welche eine vom Scheitelpunkte begrenzte, andererseits aber unbegrenzte, gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Winkelschenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann.“

Welch ungeheuerliche Definition! Eine Gerade einerseits durch einen Punkt begrenzt, andrerseits unbegrenzt! Was sind hier die Seiten einer Geraden? Der Winkel ist die Gröfse der Drehung, durch welche eine Gerade von der Lage des einen Schenkels zur Lage des andern vorschreitend gelangen kann?! Schon wieder Lage und zur Abwechslung einmal die Seite, doch Beides undefiniert.

„Als Gröfse der Drehung, durch welche eine Gerade aus einer anfänglichen Richtung in eine andre stetig übergeht, entsteht hierbei der Winkel.“

Als Gröfse der Drehung entsteht hierbei der Winkel!

„Die Lage zweier geraden, sich schneidenden Linien ist der Winkel derselben.“

Die Lage der Linien ist der Winkel!

„Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, heifsen, wenn blofs die Lage der Linien zu einander betrachtet wird, ein Winkel.“

Also kurz, zwei Geraden, welche sich schneiden, heifsen ein Winkel!

„Zwei gerade Linien, welche sich begegnen (schneiden), bilden eine (?) gröfsere oder kleinere Öffnung, welche Winkel heifst.“

Der Winkel ist also eine Öffnung!

„Wo sich zwei gerade Linien schneiden, entsteht ein (?) Winkel."

„On nomme angle, et quelquefois angle plan, chaque portion indéfinie de plan comprise entre deux droites, qui se coupent."

„Portion indéfinie" und doch eine bestimmbare, meſsbare endliche Gröſse!

„L'angle c'est l'écartement, plus ou moins considérable de deux droites, qui se coupent."

Auch „La figure formée par deux droites, qui se coupent."

Der Winkel eine Figur?

„On nomme angle la différence de deux directions."

Das Beste liefert die Akademie in ihrem Dictionnaire; sie sagt:

L'angle, c'est l'ouverture de deux lignes, qui se rencontrent en un point, l'inclinaison, qu'elles ont l'une sur l'autre."

„L'inclinaison,[1]) c'est l'obliquité d'une ligne ou d'une surface sur une autre."

„L'obliquité, c'est l'inclinaison d'une ligne ou d'une surface sur une autre."

„L'ouverture, c'est l'écartement; l'écartement c'est l'éloignement; l'éloignement c'est la distance."

Soweit E. Müller. Und nun soll E. Müllers eigne Definition einer genaueren Betrachtung unterzogen werden. Müller sagt in seiner Vorrede nach den oben zitierten Beispielen: „Diese Beispiele werden genügen als Belege, daſs viele Mathematiker wenigstens über die Grundvorstellungen weder unter sich einig, noch selbst mit sich so recht im Klaren sind, wie auch zugleich, daſs von vielen wirklich Mathematik ohne genauere Erklärung der Begriffe getrieben wird... Begründet in den menschlichen Anschauungen sind diese Bestimmungen

---

[1]) Rougé et de Comberousse, Traité de Géométrie. „La consideration de deux droites AB et AC qui se rencontrent conduit à une idée nouvelle, qui est celle d'inclinaison mutuelle ou d'angle, et qui — comme l'idée de longueur — ne saurait être définie, c'est à dire remenée à une idée plus simple; ce qu'on définit, c'est l'égalité et l'addition des angles."

des Raumes alle, doch zum klaren Bewufstsein müssen sie einem jeden erst gebracht werden."[1])

„Und dies ist die erste Aufgabe ..., die Grundvorstellungen der Geometrie aus der reinen Anschauung zum klaren Bewufstsein genetisch zu entwickeln."

Ehe Müller an die Beantwortung unsrer Frage selbst herangeht, benutzt er die Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dafs Winkel schlechtweg schon eine Nachlässigkeit des sprachlichen Ausdrucks sei, und dafs alle Definitionen nur sich beschäftigen mit dem Linienwinkel, wie er ihn nennt, dem Geradenwinkel in der Ebene, wie er genau genommen genannt werden müfste: dem planimetrischen Winkel, wie ich ihn lieber nennen möchte. Müller fügt dann hinzu: „Die Definition des Winkels überhaupt, von welchem der Linienwinkel, Flächenwinkel, Körperwinkel, sphärische Winkel nur besondere Arten sind, hat kein Mathematiker bis jetzt zu geben auch nur versucht."

Dieser Ansicht Müllers, dafs der planimetrische Winkel nur eine Art des allgemeinen Begriffs Winkel sei, kann ich nicht beipflichten, im Gegenteil, ich behaupte, dafs der planimetrische Winkel der allgemeine sei, von dem alle andern von ihm aufgeführten nur Abarten sind. Ich verweise in Bezug auf diese Frage auf meine weiter unten folgenden Erörterungen. Hier nur soviel. Mathematisch existiert nur der planimetrische Winkel, alle andern werden auf diesen zurückgeführt, mit seiner Hülfe angeschaut und zum Bewufstsein gebracht, ja ein Messen von Winkeln resp. die Feststellung der Gröfse irgend einer Art von Winkeln ist nur durch ihn möglich.

Zur Bestätigung des Gesagten brauche ich wohl nur daran zu erinnern, was man z. B. unter dem Winkel versteht, unter dem sich zwei Kurven schneiden, unter dem Winkel zweier Ebenen oder Flächen etc. Überall handelt es sich doch in diesen Fällen um den Winkel zweier Hülfsgeraden, darauf wird überall die Betrachtung zurückgeführt.

In der That, in der Mathematik giebt es keinen Winkel überhaupt, sondern wesentlich nur den planimetrischen.

---

[1]) Man vergleiche die Studie im ersten Bande.

Also würde bei einer philosophischen Betrachtung des Allgemeinbegriffs Winkel, die man ja als möglich hinstellen könnte, der Inhalt fehlen und also auch nach dieser Seite hin „der Winkel überhaupt" sich jeder Untersuchung, mithin auch einer Definition entziehen.

Ich möchte gleich diese Gelegenheit benutzen, um eine andre hierhergehörende Frage, deren Beantwortung mit der hier behandelten in engem Zusammenhange steht, in Betracht zu ziehen. Man hat nämlich die Frage aufgeworfen, ob die Tangente mit der Kurve, an die sie gezogen ist, einen Winkel bildet. Diese Frage ist entschieden zu verneinen, denn unter Winkel würde ja der Winkel zwischen der Tangente und der in dem betreffenden Kurvenpunkt gezognen Tangente d. h. mit sich selbst zu verstehen sein; man sieht also, dafs diese Frage nur ein negatives Resultat ergeben kann. Anders freilich würde sich das Problem gestalten, wenn gefragt würde: bildet die Tangente mit irgend einem Teil der Kurve, der nicht mit dem Berührungspunkt identisch ist, einen Winkel. Beantworten läfst sich diese Frage selbstverständlich nur, wenn man ein Kurvenelement dabei in Betracht zieht.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu der Definition E. Müllers von dem planimetrischen Winkel zurück. Es heifst bei ihm:[1]) „Der Exponent des geometrischen Verhältnisses, in welchem ein durch Drehung, sei es durch die einfache Drehung eines Elementes eines ebenen Linienbüschels oder eines Flächenbüschels oder eines flachen Linienbüschels, sei es durch die zusammengesetzte Drehung der beiden Elemente eines Büschelraumes entstandenes Raumgebilde zu dem durch die totale Drehung derselben Elemente entstandnen steht, heifst Winkel, und zwar resp.

1. ein ebener Linienwinkel oder
2. ein Flächenwinkel oder
3. ein flacher Linienwinkel oder
4. ein Körperwinkel.

Der dem ebenen Linienwinkel ... entsprechende Teil der Ebene ... heifst Winkelebene ..."

---

[1]) Elemente, S. 26.

Diese Definition findet in einer Anmerkung,[1]) in der die oben erwähnten Betrachtungen der Vorrede noch erweitert werden, folgenden Zusatz:

„Als Exponent eines geometrischen Verhältnisses ist aber der Winkel eine Zahl, wie es der Sinus, Kosinus und die andern Winkelfunktionen ebenfalls sind ... Wie bei den Winkelfunktionen Zahl und Linie oftmals vertauscht und verwechselt werden, so noch öfter oder vielmehr stets wird der Winkel mit der Winkelebene verwechselt, oder vielmehr sagt man der gröfseren Kürze halber überall, wo kein Mifsverständnis entstehen kann, für Winkelebene blofs Winkel. Und wie die Gröfse der Winkelfunktionen, so ist auch die Gröfse der Winkel selbst unsrer Definition zufolge von der Länge der Schenkel unabhängig, weil die gröfsere oder kleinere Drehung von der Länge der Schenkel ganz unabhängig."

Man wird der Definition E. Müllers nachrühmen müssen, dafs sie durchaus wissenschaftlich, zugleich völlig erschöpfend und vollkommen einwandfrei ist, aber nicht wird man ihr nachrühmen können, dafs sie kurz und bündig sei oder — wenn wir ihre Verwendbarkeit im Unterricht in Erwägung ziehen — dafs sie sich sonderlich für den Unterricht eigne. Aus dem letzteren Grunde, besonders wegen des für Viele unverständlichen Ausdrucks „Exponent des Verhältnisses" kann ich auch diese Definition des Winkels nicht für angemessen erklären, wohlgemerkt aber nicht wegen des Inhaltes der Definition, sondern wegen ihrer Form.

Was nun die drei verbreitetsten Definitionen des Begriffes Winkel betrifft, so habe ich dazu Folgendes zu bemerken.

1. Der Winkel als Richtungsunterschied.

Bei der Besprechung dieser Definition können wir uns auf unsre Ausführungen im ersten Kapitel (§ 1) zurückbeziehen, ja wir werden hier zu einer wesentlichen Ergänzung und Erweiterung der dort angestellten Untersuchungen gelangen. Dort wurde nur der reine Begriff Richtung an und für sich zum Gegenstande der Untersuchung gemacht, hier werden wir

---

[1]) Elemente, S. 28.

durch seine Verwendung, durch die Vergleichung verschiedener Richtungen — sit venia verbo — zu neuen Gesichtspunkten gelangen, unter denen auch der reine Begriff selbst noch an Klarheit gewinnen wird. Wenn wir das dort Gesagte noch einmal kurz im wesentlichen zusammenfassen, so waren wir zu folgendem Resultate gekommen: Richtung ist die unmittelbare Relation zweier Punkte, die im Strahle zur Anschauung kommt.[1])

Wesentlich Neues tritt hinzu, wenn wir nun bestimmte Richtung, die in einem bestimmten Strahle zur Anschauung kommt, in Betracht ziehen. Fassen wir einen bestimmten Strahl als Träger einer bestimmten Richtung auf, so können wir jetzt, indem wir verschiedene Strahlen betrachten, indirekt auch von den verschiedenen Richtungen sprechen. So ist der Ausdruck zu erklären, dafs sich ein Punkt nach allen Richtungen bewegen könne. Bedenklich in hohem Mafse erscheint mir aber immer wieder bei fortgesetztem Nachdenken über diesen Gegenstand der Ausdruck, dafs Richtung veränderlich sei, dafs man Richtungen verändern könne, und ich glaube daher auch, dafs es gut sein wird, derartige Ausdrücke zu vermeiden. Von verschiedenen (bestimmten) Richtungen läfst sich wohl sprechen, man kann seine Richtung ändern, die Richtung wechseln, aber Richtung selbst — als Qualität, Modalität oder Relation — bleibt etwas Unveränderliches. Nur insofern, als bestimmte Richtung im bestimmten Strahle zur anschaulichen Vorstellung wird, kann man verschiedene Richtungen mit einander in Vergleichung bringen. Vielleicht liefse sich das Verhältnis so ausdrücken, dafs man sagte, Strahlen resp. Gerade sind verschieden in Bezug auf Richtung. Das würde jedenfalls genauer sein, als von verschiedenen Richtungen zu sprechen. Dennoch ist der allgemeine Sprachgebrauch gerade hier sehr dehnbar, selbst das verpönte Wort Richtungsunterschied hat gar mannigfaltige Analogieen im gewöhnlichen Leben, in denen ebenfalls von einer Quantität gar keine Rede ist, wenn wir z. B. vom Farbenunterschiede

[1]) So wie der Abstand die unmittelbare Relation zweier Punkte ist, die in der Strecke zur Anschauung kommt.

zweier Gegenstände sprechen. Selbstverständlich wird es Niemandem einfallen, hierbei an einen Quantitätsunterschied zu denken. Besser würde man ja, anstatt Unterschied, den Ausdruck Verschiedenheit wählen, aber streng genommen dürfte dadurch wenig gewonnen sein. Trotzdem in dem gewählten Beispiele von Quantität keine Rede ist, so spricht man aber doch von der Gröfse des Farbenunterschiedes, sagt, der Farbenunterschied ist hier gröfser als dort, mischt also eine quantitative Betrachtung in reine Qualitätsverhältnisse. Ja es ist nicht zu leugnen, dafs Qualitätsverschiedenheiten resp. Unterschiede mit einander verglichen werden können, dafs wir es also mit einer Art von Gröfsen zu thun haben. Es fragt sich nun, liegt hier dasselbe Verhältnis vor? Es würde zu einem grofsen Irrtum führen, wollte man die vorliegende Frage mit ihren Analogieen in andern Gebieten identifizieren. Wir müssen, um die wahre Erkenntnis zu erlangen, hier auf den Grund gehen, der hier teils in den reinen Begriffen selbst liegt, teils in dem Verhältnis der Einzelbeziehungen. Bleiben wir bei dem einmal gewählten Beispiele stehen. Auf den ersten Blick könnte es uns zu falscher Schlufsfolgerung verleiten, zu der Annahme, dafs Richtungsunterschied ein logisch richtiger Begriff und der möglichen Vergleichung halber ein Quantitätsbegriff besonderer Art sei — insofern nämlich, als überhaupt Vergleichung möglich.

Der wesentliche Unterschied, auf den es hier ankommt, ist der, dafs der Begriff der Richtung ein singulärer ist, der der Farbe nicht; es giebt verschiedene Arten von Farben, aber keine verschiedenen Arten von Richtungen. Es handelt sich also um eine ganz andere Sorte von Unterschied. Es liegt die Versuchung nahe, den Begriff der Lage in diese Betrachtungen hineinzuziehen, dadurch würde aber nichts gewonnen sein, im Gegenteil, dieser neue Begriff würde nur stören. Die Lösung des Problems liegt darin, dafs Qualitätsunterschiede quantitativ verglichen werden können, sobald es verschiedene Arten einer Qualität giebt, dafs dies aber nicht möglich ist, sobald die Qualität singulär ist.

Es ist also einleuchtend, dafs die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes hinfällig ist, ebenso wie alle mit

dieser verwandten, weil bei der bestehenden Singularität des Richtungsbegriffes der Winkel eine Gröfse ist, also nicht der Unterschied zweier Nichtgröfsen sein kann, die von einerlei Art sind. Hierin liegt ein logischer Widerspruch, der diese Definition, die auf den ersten Blick viel für sich zu haben scheint, unmöglich macht. Der Winkel ist eine Quantität, nach dieser Definition aber würden wir es mit einem qualitativen Unterschiede in der eben geschilderten eingeschränkten Beziehung zu thun haben, worin eine logische Unmöglichkeit liegt.

Es herrscht übrigens gerade hier eine seltene Einmütigkeit in der Auffassung resp. Abwehr der vorliegenden Definition.[1])

Im wesentlichen identisch mit der besprochenen Definition ist die Euklidische und die damit verwandten. Hoffmann äufsert sich zu ihr in seinem Aufsatze, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen, in H. Z. III, p. 121 wie folgt:

„Euklid erklärt den Winkel als Neigung zweier Linien zu einander und scheint sonach die Richtung der Schenkel nicht vom Treffpunkt (Scheitel, gemeins. Drehpunkt) aus, sondern nach dem Treffpunkte hin zu rechnen, indem er vorher die Geraden als parallel annimmt und jede sich um einen ihrer Punkte drehen läfst. Das Zusammentreffen ist dann Resultat (Folge) der Neigung, wobei das zu einander auf eine wenn auch nicht notwendig gleichzeitige Neigungsbewegung deutet. Es versteht sich von selbst, dafs dann auf der entgegengesetzten Seite ein Voneinanderweichen stattfindet.

Diese Definition leidet an der bekannten Euklidischen Starrheit. Sie erfafst das Winkelgebilde in einem bestimmten Momente der Erzeugung gewissermafsen als erstarrt, nicht im Flusse der Bewegung ... Genetisch ist dies Verfahren nicht. Denn das Kennzeichen der genetischen Methode ist, dafs sie die räumlichen Gebilde nicht wie ein

[1]) Auch Bürklen sagt l. c. p. 1: „Gegen die erste Definition (als Richtungsunterschied) wendet er mit Recht ein, dafs eine Richtung keine extensive Gröfse ist, und dafs zwei Richtungen daher keinen quantitativen Unterschied haben können."

Gemälde in einem Momente des Gewordenseins, sondern im Flusse der Bewegung betrachtet und sehr richtig sagt B. Becker (Über die Methode des geometr. Unterrichts. Frankfurt a/M. 1845), dafs die Definition einer Raumgröfse „durch Angabe der eigentümlichen Erzeugungsweise das Wesen der Gröfse enthüllen mufs“.“

Man sollte nach diesen Worten glauben, dafs Hoffmann keine andere Erklärung des Begriffes Winkel zulasse, als eine, die sich auf den Begriff der Drehung stützt. Und doch rühmt er an seiner Definition, dafs sie von der Drehung völlig unabhängig sei, und wählt eine Erklärung, die — wie ich schon weiter oben bemerkte — erst recht an dem Fehler Euklidischer Starrheit leidet. Gerade seine ganz äufserliche Definition des Winkels als einer Figur geht doch von dem festen, starren Gebilde zweier Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkte aus, ohne im geringsten von einer Beweglichkeit etwas anzudeuten.

Treffende Bemerkungen knüpft er an seine oben zitierten Ausführungen über Neigung und Abweichung, die in dem Begriffe Richtungsunterschied „verschmelzen“. Aber dafs auch in dem letzteren Ausdrucke nicht das geringste Moment liegt, das auf Bewegung deutet, übersieht er.[1]) Was speziell noch das Wort „Neigung“ betrifft, so möchte ich dagegen noch das bemerken, dafs es insofern ungünstig gewählt ist, als sein Wesen demjenigen des Winkels umgekehrt proportional ist: je geringer die Neigung, desto gröfser der Winkel; je gröfser die Neigung, desto kleiner der Winkel: derartige reciproke Verhältnisse aufzufassen, sollte man denen, die man zuerst mit dem Begriffe Winkel vertraut machen will, nicht zumuten.

Wenn ich soeben sagte, dafs Hoffmann übersähe, dafs in dem Begriffe Richtungsunterschied keine Bewegung liege,

[1]) Dafs Richtung kein Gröfsenbegriff, Richtungsunterschied daher ein qualitativer Unterschied sei, wird noch besonders bemerkt.

Man vergleiche auch Becker in H. Z. II, p. 97: „Als Richtungsunterschied darf er, auch davon abgesehen, dafs gerade Linien gar keine Richtung haben, schon deshalb nicht aufgefafst werden, weil die Richtung und also auch der Richtungsunterschied gar keine Gröfse ist.“

Ferner: Hoffmann, Studien über geometrische Grundbegriffe in H. Z. IV, p. 103.

so ist das nicht ganz genau. Er meint vielmehr, daſs dieser Begriff eine Bewegung involviere und stützt sich dabei auf folgende Äuſserungen (Fresenius, Grundlagen etc. S. 34—35): „Desto einfacher ist die Definitionsweise: Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Linien oder, was auf dasselbe hinauslaufend nur deutlicher die Bewegung involviert, zurückgelegter Drehungsweg etc." und (B. Becker: Über die Methode des geometrischen Unterrichts. Frankfurt a/M. 1845. S. 18): „Wenn man durch drehende Bewegung die Richtung einer Linie ändert, so nennt man die Gröſse dieser Änderung, den Richtungsunterschied, einen Winkel. Nur durch die drehende Bewegung, die erforderlich ist, um einen Schenkel in die Richtung des andern zu bringen, läſst sich der Winkel begreifen. An dieser Entstehung des Winkels muſs man festhalten, darauf alle Sätze über Winkel zurückführen; und wo man einen Winkel findet, muſs die Phantasie zu dem starrgewordnen Resultat die erzeugende Drehung hinzudenken."

Mir will es scheinen, als wenn diese Zitate gerade gegen Hoffmanns Ansicht sprächen.

In einem gewissen Gegensatz zu seinen bisher besprochenen Ausführungen scheinen mir übrigens auch die Untersuchungen zu stehen, die er im IV. Bande der H. Z. p. 103 f. mitteilt. Dort wendet er der Drehung besondere Aufmerksamkeit zu, durch die der qualitative oder besser modale Richtungsunterschied in einen quantitativen oder Gröſsenunterschied umgewandelt werde.

„Durch diesen Prozeſs der Drehung gelangt man also aus dem rein qualitativen Gebiet der Richtung in das quantitative. Denn die Richtungsänderung (Richtungsabweichung) wird nun zur Gröſse und läſst sich messen durch die Kreis- oder Drehungsbögen des betrachteten Punktes."

Die weiteren Ausführungen, die sich hieran anschlieſsen, sind zu ausführlich, um hier zitiert zu werden, ich muſs mit Nachdruck auf den betreffenden Artikel selbst verweisen.

Hiermit will ich die Besprechung dieser ersten Definitionsweise abschlieſsen; ich werde weiter unten bei der Darlegung meiner eignen Ansichten und bei dem Versuche eine wissen-

schaftlich korrekte und im Schulunterrichte wohl verwendbare Erklärung des Winkelbegriffs zu geben, noch Gelegenheit finden, auf einige wichtige Punkte der Erörterung zurückzukommen. Auch die Zitate werden Veranlassung bieten, hierhergehörige Bemerkungen anzubringen.

2. Der Winkel als Ebenenstück.

Diese von Bertrand[1]) aufgestellte, von Baltzer in seinen Elementen acceptierte Definition hat ebenfalls zahlreiche Anhänger gefunden.

Ich bemerkte dazu in meinem erwähnten Artikel: „Nach dieser Definition würden alle Winkel unendlich grofs, also untereinander gleich sein.“

Diese Äufserung ist vielfach mifsverstanden worden,[2]) ja sie hat mir einige gerade nicht schmeichelhafte Beurteilungen zugezogen. So bemerkt Moroff in seinem Programm, das Winkelfeld, Hof 1890, p. 5: „Ferner, welche unglaubliche Behauptung läfst der Herr Herausgeber, welcher sonst mit Einwürfen sofort, ja schon im Voraus bei der Hand ist, unbeanstandet! Indem nämlich der Herr Verfasser im Verlauf seines Aufsatzes so eine Art ganz neue Erklärung für den Winkel giebt und selbstredend die sonstigen Auffassungen verwirft, kehrt er sich auch gegen die namentlich von Baltzer vertretene Richtung, wonach der Winkel ein ebenes Feld darstellt; man höre: „Es müfsten da alle Winkel als unendlich grofse einander gleich sein! Sehr merkwürdig; dem Herrn Verfasser müssen ja alle stetigen Ausdehnungen als gleich grofs gelten! Und hat er denn als Knabe niemals nach dem gröfseren Kuchenausschnitt gegriffen? Und hätte er es nicht, selbst wenn der Kuchenrand verdeckt d. h. die Begrenzung ungewifs gewesen wäre?“

Hierzu habe ich Folgendes zu bemerken. Warum ich nach dieser Äufserung alle stetigen Ausdehnungen als gleich

[1]) Bertrand, développement nouveau de la partie élémentaire des math. — Genève 1778.

[2]) Auch Herr Direktor Thaer äufserte brieflich seine Bedenken gegen diese Stelle, gab aber nach meinen Erläuterungen zu, dafs das Verhältnis $\infty : \infty$ über den Horizont der Schüler hinausgeht.

grofs ansehen mufs, ist mir nicht klar. Ich sehe hier keinen Zusammenhang. Was das geschmackvolle Beispiel vom Kuchen betrifft, so ist zu bemerken, dafs, wenn die Begrenzung verdeckt wäre, über die Gröfse der Stücke kein Urteil abgegeben werden könnte. Der Winkel ist ja aber ausdrücklich offen, nicht begrenzt. Beim Kuchen handelt es sich um Sektoren! Würde aber dem Kinde gesagt: beide Stücke sind unendlich grofs, oder in seiner Sprache, welches Stück Du auch nimmst, Du wirst es nie aufessen können, so würde es ihm natürlich einerlei sein, welches Stück es nimmt. Was hier in Betracht kommt, ist nicht die unendliche Gröfse an sich, sondern es handelt sich um $\infty : \infty$, um das Verhältnis des unendlich grofsen Ebenenausschnittes zu der unendlich grofsen Ebene selbst und darum, dafs dieses Verhältnis einen endlichen Wert hat. Derartige Betrachtungen dürften aber gewifs am Anfang des geometrischen Unterrichts nicht am Platze sein. Was mich diese Definition also verwerfen läfst, ist nicht die Furcht vor dem Unendlichen, obgleich es wohl methodisch richtig sein dürfte, möglichst selten mit diesem Begriffe im Anfangsunterrichte zu operieren,[1]) sondern die feste Überzeugung, dafs der Umstand, dafs das Verhältnis zwischen zwei unendlich grofsen Gröfsen einen endlichen, bestimmten Wert haben kann, kein geeignetes Problem für Quartaner ist.

Es kommt ferner hinzu, dafs das Operieren mit den unendlich grofsen Winkelfeldern zu neuen Schwierigkeiten führt. Was soll denn ein eben in die Geometrie eintretender Verstand mit dem Satze anfangen, dafs die Winkelsumme im

---

[1]) Im Gymnasium, IX. Jahrgang, Heft Nr. 8, findet sich folgende Besprechung der Moroffschen Abhandlung: „Behandelt die Lehre von den Winkeln unter Zugrundelegung der Definition, dafs dieselbe ein Feld von unendlicher Ausdehnung, aber durch Messung mit der Ebene vergleichbar sei. Ohne daraus Konsequenzen für das XI. Axiom zu ziehen, bringt die Abhandlung eine überraschend einfache Ableitung für die Winkelsumme des Dreiecks, die allerdings auf dem bedenklichen Prinzip beruht $\infty + a = \infty$. Wegen der durch die Definition des Winkels als unendlich grofses Feld benötigten Einführung des Unendlichen in die Elemente möchten wir nach wie vor der Auffassung des Winkels als Mafs für die Gröfse der Drehung, welche nötig ist, um aus einer Richtung in eine zweite zu kommen, den Vorzug geben."

Dreieck einen Flachwinkel beträgt, wenn er diesen Flachwinkel mit der Halbebene zu identifizieren genötigt ist.

Dafs es sich hier um das Verhältnis von $\infty : \infty$ handelt, bemerkt auch Bürklen.[1]) Er sagt: „Dies (nämlich mein oben zitierter Satz) ist eine falsche Ansicht, denn $\infty : \infty$ ist bekanntlich nicht einfach gleich 1 und die Auffassung des Winkels als Ebenenstück führt aus diesem Grunde zu nichts Widersinnigem."

Ich glaube jetzt Klarheit geschaffen zu haben, was ich an der Definition auszusetzen habe und warum ich ihr entgegentrete.

Bürklen sagt übrigens l. c. p. 9: „Es dürfte mit dem Bisherigen[2]) nachgewiesen sein, dafs der Winkel weder an sich, noch hinsichtlich seiner Gröfse ohne weiteres auch nicht definiert werden darf als „das durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen abgegrenzte Ebenenstück".

Was ferner noch gegen die hier behandelte Definition einzuwenden ist, umfafst die folgenden beiden Punkte. Es wird dem Schüler nur schwer, vielfach gar nicht das Verständnis beizubringen sein für den Zusammenhang des unendlich grofsen Flächenstückes mit der anschaulichen endlichen Gröfse resp. seine Erkenntnis wird verwirrt, wenn er verschieden grofse Winkel ansieht und hört, dafs beide unendlich grofse Stücke der unendlich grofsen Ebene seien und insofern sich doch seiner Gröfsenvergleichung entziehen. Die anschauliche Darstellung der Veränderlichkeit eines Winkelgebildes dürfte am besten dazu geeignet sein, uns vor der Verwendung der hier besprochenen Definition im Schulunterricht zu bewahren.

Zweitens liegt bei der bisher üblichen Auffassung des Winkels — besonders, da meistens gar nicht besonders betont wird, ob wir es mit einem Raumgebilde oder Flächengebilde, speziell einem Ebenengebilde zu thun haben — nichts vor, das a priori für das letztere spräche.

---

[1]) Zur Lehre vom Winkel im Korrespondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen 1891. — Tübingen, Fues.

[2]) Es handelt sich dabei um die Bestimmung, was grofs am Winkel sei. Bürklen will Quantum und Quantität scharf geschieden haben.

Hoffmann[1]) äußert sich zu dieser Definition folgendermaßen: „Diejenigen, welche Winkel als Ebenenausschnitt definieren, behaupten, der Winkel sei ein Teil der Ebene. Dazu ist zu entgegnen: Insofern Winkel (ähnlich wie Dreieck) Form an einem Ebenenteil (dem Geformten) ist und insofern jeder Raumteil, also auch ein Flächenraum geformt ist, die Form überhaupt nur an einem Raumgebilde zur Erscheinung kommen kann, insofern kann beim Winkel auch nicht ganz von der Ebene abstrahiert werden. Doch tritt diese Ebene (das Geformte) vor der Begrenzungsform in den Hintergrund (vergl. Holz- und Drahtdreieck). Nur die Gröfse des begrenzten Ebenenstückes oder der Flächeninhalt ist dabei gleichgültig. Winkel und Dreieck sind sonach nicht Flächen, sondern nur die einem Flächenstück die Form gebenden (dasselbe gestaltenden) Liniengebilde, der Winkel ein offenes, das Dreieck ein geschlossenes."

3. Der Winkel als Drehungsgröfse.

Bei dieser Definition hatte ich mich in meinem mehrfach erwähnten Artikel gegen den Ausdruck „der Winkel ist die Gröfse der Drehung" gewendet, indem ich anerkannte, dafs das Wesentliche für den Begriff Winkel, das Moment der Drehung, hier zur notwendigen Geltung gelange. Ich schlug dann folgende Definition für den Winkel vor:

„Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so ist der durch die beiden Strahlen gebildete Winkel das Mafs der stetigen Drehung, durch die der eine Strahl in die Lage des andern gebracht wird, ohne aus der durch die Strahlen bestimmten Ebene herauszugehen,[2]) oder kurz:

Der Winkel ist das Mafs der Drehung."

---

[1]) H. Z. III, p. 123. — (Man vergl. auch H. Z. XVI, p. 340.)

[2]) M. Simon bemerkt hierzu in einem an mich gerichteten Briefe: „Ihr gesperrt gedruckter Satz ist unanfechtbar, leider ist er keine Definition des Winkels. Der Satz lehrt nur Drehungen mittelst der Winkel vergleichen und setzt somit den Winkel schon als bekannt voraus, gerade so, wie wenn Sie sagen, diese Strecke hat die Länge 3 m, Sie voraussetzen das Meter wäre bekannt. M. E. giebt es für den Winkel

Diese Definition ist von verschiedenen Seiten angenommen und findet sich in einigen neueren Lehrbüchern (vergl. oben die Fufsnote zu Moroffs Abhandlung); ich kann ferner bestätigen, dafs man im Unterrichte gut damit auskommt.

Selbstverständlich sind aber auch mehr oder weniger entschiedene Gegner dagegen aufgetreten. So finden sich in Hoffmanns Zeitschrift selbst wieder einige Artikel, auf die ich hier noch eingehen mufs.

Hoffmann selbst widmet meiner Abhandlung eine Besprechung im XX. Bande von H. Z. p. 581—83. Er sagt dort: „Wir glauben, dafs diese Definition schon deshalb nicht zu halten ist, sondern fallen mufs, weil sie einen Begriff der Mechanik (Drehung) hereinzieht und demgemäfs ihr Inhalt wesentlich mechanischer Natur ist. Denn Drehung ist eine Art von Bewegung. Zwar ist ja die Bewegung ein Element, das besonders in der neueren Geometrie eine Rolle spielt, aber doch nur als Unterstützung zu dem Zwecke herbeigezogen wird, um ... der Anschauung zu Hülfe zu kommen; aber dieses Hülfselement (Bewegung) ist nicht wesentlich für die Begriffsbestimmungen der Liniengebilde. Einen Winkel kann man auch begreifen, wenn man von der Bewegung (seiner Schenkel) absieht und ihn als fest geworden (erstarrt) betrachtet."

Dem gegenüber zitiere ich folgende Worte von Hoffmann selbst in H. Z. III, p. 121:

---

keine andere Definition als diese: Der Winkel ist die Grenze (der Grenzabschlufs) des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius, wobei per hypoth. angenommen wird, dafs der Winkel sich zur Ebene verhalte, wie sein Sektor zum Kreis. Da nach dem allgemeinen Prinzip gleiche Ursachen gleiche Wirkungen haben, zu gleichen Sektoren gleiche Winkel gehören und zu ungleichen Sektoren in derselben Weise ungleiche Winkel, so ist Ihre Definition als Satz bewiesen."

Von anderer geschätzter Seite werde ich darauf aufmerksam gemacht, dafs es sich empfehlen dürfte, die Definition so zu fassen:

„Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so wird das Mafs der stetigen Drehung, durch die der eine Strahl in die Lage des andern gebracht wird, ohne aus der durch die Strahlen bestimmten Ebene herauszugehen, als der durch die beiden Strahlen gebildete Winkel bezeichnet."

„Diese Definition (die Euklidische) leidet an der bekannten Euklidischen Starrheit. Sie erfafst das Winkelgebilde in einem bestimmten Momente der Erzeugung gewissermafsen als erstarrt, nicht im Flusse der Bewegung. Daher bleibt nun auch der Umfang des Begriffes unvollständig, denn ... Genetisch ist dies Verfahren nicht. Denn das Kennzeichen der genetischen Methode ist, dafs sie die räumlichen Gebilde nicht wie ein Gemälde in einem Momente des Gewordenseins, sondern im Flusse der Bewegung betrachtet und sehr richtig sagt B. Becker, dafs die Definition einer Raumgröfse „durch Angabe der eigentümlichen Erzeugungsweise das Wesen der Gröfse enthüllen mufs“.“

Man vergleiche übrigens auch meine Ausführungen zu Hoffmanns Arbeiten am Anfang dieses Kapitels.

Hoffmann fährt dann fort, p. 582:

„Wollte man aber auch die Drehung als das Wesentliche für den Winkelbegriff gelten lassen, so wäre doch nicht einzusehen, wie dadurch, dafs man Mafs der Drehung statt Gröfse der Drehung setzt, etwas gewonnen oder gebessert wäre.

Was ist denn ein Mafs? Eine bestimmte Gröfse, mit der man eine andere gleichartige mifst oder messen kann. Als Mafs kann aber jede Gröfse angenommen werden . . . Dann aber ist Mafs nichts weiter als Gröfse. Mafs und Gröfse sind identisch, und ob man sagt Mafs der Drehung oder Gröfse der Drehung ist gleichgültig.“

Diese Ausführungen mufs ich entschieden bestreiten. Mafs und Gröfse sind durchaus nicht identisch. Nur das ist richtig, dafs das Mafs mit dem, was es mifst, gleichartig ist; darin sehe ich aber gerade den Vorzug meiner Definition; sie deckt das wahre Wesen des Winkelbegriffs auf; indem sie Winkel mit Drehung als gleichartig nachweist und auf den engen Zusammenhang zwischen Winkel und Drehung hinweist. Hoffmann hält an seiner Erklärung des Winkels als eines offenen, formgebenden Liniengebildes fest.

Auch im Bd. XXI der H. Z. kommt der Herausgeber noch einmal auf unser Thema zurück in einem Artikel „Neues zur Lehre vom Winkel“ p. 249—260, in dem er zuerst die Frage

erörtert, „welche Merkmale sind für die Bestimmung des Begriffs Winkel wesentlich und also notwendig und welche sind nebensächlich?" Er geht auch hier von der figürlichen Erklärung aus und führt die Untersuchung zurück auf die wesentlichen Eigenschaften der Geraden: Lage (Stellung), Richtung, Gröfse. Von diesen sei für den Winkelbegriff wesentlich, also notwendig vor allem die Lage. Daraus folge, dafs — weil Parallele keinen Winkel bilden können — das Wesen, die Wurzel des Winkelgebildes in der Neigung der beiden Geraden liege. Neigung und Lage seien beide veränderlich. „Dagegen kann die Neigung einer Geraden (gegen eine andere) nur durch den Bewegungsprozefs der Drehung sich ändern."

„In dieser Möglichkeit der Neigungsänderung liegt aber die Quelle oder Wurzel der Gröfsenänderung des Winkelgebildes d. i. sein Wachsen und Abnehmen. Somit ist auch für diese Gröfsenänderung die Neigung das Wesentliche."[1])

Ich meine, hier hätte man nach dem Vorhergehenden zu der Schlufsfolgerung gelangen müssen, dafs das Wesentliche des Winkels und seiner Änderung in der Drehung liege, da auf sie ja wieder nach den eben zitierten Worten die Neigung zurückgeht. Hätte Hoffmann diese sich mit unbezwinglicher Gewalt aufdrängende Konsequenz gezogen, so wäre er genau zu demselben Resultat gekommen, wie ich bei meinen Untersuchungen; aber er hat sich mit sehenden Augen von dieser Konsequenz weggewendet. Er schliefst diese Betrachtungen mit den Worten:

„Wir haben jetzt alles, was am Winkelgebilde wesentlich ist, nämlich zwei Gerade und die Eigenschaft des Geneigtseins derselben, die aus ihrer Lage entspringt."

Dafs hierbei der Begriff der Ebene vorausgesetzt wird, darauf möchte ich hier nur beiläufig hinweisen.

Der weitere Teil dieses Artikels rekapituliert des Ver-

---

[1]) Weiter unten p. 254 heifst es: „Die Gröfsenänderung d. i. das Wachsen und Abnehmen des Winkels gehört aber ebenso wenig zum Wesen des Winkels, als . . ."

Mir scheint, als wenn diese beiden Äufserungen sich diametral gegenüberständen.

fassers Ansichten über die Richtung. (Man vergleiche Kapitel I dieses Bandes.) Das Resultat ist, dafs die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes verworfen wird; aber auch meine Definition wird verworfen, da sie die Ursache (Drehung) statt der Wirkung oder des Resultates (Winkelgebilde) nehme. Wo bleibt aber dann der „Flufs der Bewegung"?

Da auch die dritte Eigenschaft der Geraden, die Länge, aufser Betracht bleibt, so sei also für das Wesen des Winkelgebildes einzig und allein die Neigung wesentlich. Es wird aber nachträglich zugegeben, dafs die hierauf gegründete Definition: „Der Winkel ist ein Liniengebilde, bestehend aus zwei zu einander geneigten Geraden, die bis zum Treffpunkt verlängert, also von diesem einseitig begrenzt sind," „in einem Punkte eine gewisse Leere zurücklasse."

Wäre das möglich, wenn die Definition wirklich alles Wesentliche enthielte?

Der zweite Teil des Artikels ist betitelt: „Zur Entstehung des Winkels aus der parallelen Lage zweier Geraden. Die Begriffe „Neigung" und „Abweichung" als Wechselbegriffe."

Hier finden sich recht wohl brauchbare Untersuchungen zur Verdeutlichung der früher angestellten Betrachtungen, für die eigentliche Definition des Winkels sind sie dagegen ohne Bedeutung.

Schliefslich bringt Bd. XXII der H. Z. noch zwei hierhergehörige Abhandlungen.

Die „Zur Definition des Winkels" betitelte von Gerlach, p. 1—9, geht davon aus, dafs „man sich etwas vorstellen und auch etwas denken könne."

Im ersteren Falle geht man von der reinen Figur einer gebrochenen Linie aus, die die Vorstellungen von einem sich öffnenden Gebilde, von einem Ebenenausschnitt oder Sektor, vom Richtungsunterschiede zweier Strahlen, von einer möglichen Drehung hervorruft. „Der Träger dieses Komplexes von Vorstellungen heifst Winkel."

Hierbei sei aber noch Wesentliches mit Unwesentlichem vermengt. Diesem „ursprünglichen" Winkel wird der „mathe-

matische“ gegenübergestellt, mit dem die Raumlehre operiert, „der also notwendig eine Gröſse oder Zahl ist.“

Die Untersuchung nimmt folgenden Gang.

„I. Der mathematische Winkel als unbenannte Zahl.“

Hier handelt es sich nur um Gröſsenvergleichung, um Relationen. Der ursprüngliche Winkel gilt als gegebne Vorstellung. Es ergiebt sich die Definition:

„Unter dem Winkel, den eine gebrochne Linie darstellt, versteht man die relative Gröſse des zugehörigen Sektors.“

„II. Der mathematische Winkel als Gröſse.“

Hier lautet die Definition:

„Die gebrochne Linie im Sinne eines Trägers, als eine dem Sektor proportionale Gröſse gedacht, heiſst ein mathematischer Winkel.“

Auch hier gilt der ursprüngliche Winkel als gegebene Vorstellung.

Die beiden Definitionen werden als wesentlich identische bezeichnet, jedoch der zweiten Fassung der Vorzug gegeben, weil für den Schüler diese Vorstellung leichter sei. Der Winkel, so definiert, stelle sich dann als eine bloſse Verhältniszahl dar; der ursprüngliche Winkel bleibe dabei ganz aus dem Spiele und eine Einigung in der Winkeldefinition sei damit erreicht.

„III. Der ursprüngliche Winkel.“

Während die wissenschaftliche Raumlehre den ursprünglichen Winkel als gegebene Vorstellung ruhig hinnimmt, aus dem Bereich ihrer Untersuchungen ausschlieſst, darf die Schule ihn nicht als gegebne Vorstellung voraussetzen.

In ihm vereinigt sich, wie schon oben dargelegt, ein Komplex von Vorstellungen.

Aus diesem Komplex werden als unwesentlich vor allem ausgeschieden die Drehung, dann der Richtungsunterschied, dann der Begriff des Sektors, so daſs „schlieſslich die ursprüngliche Erklärung des Winkels als eines sich öffnenden Gebildes die zutreffendste bleibt.“

Daſs wir mit dem Verfasser nicht übereinstimmen in dem Endresultat, braucht nicht besonders erwähnt zu werden: auch wird es überflüssig sein nochmals unsere Gründe gegen das

gewonnene Resultat vorzuführen. Jedoch schien uns die Abhandlung wichtig genug, um in ihren wesentlichen Grundzügen mitgeteilt zu werden, obwohl wir auf dem entgegengesetzten Standpunkte stehen und vor allem eine das Wesen des Winkels (und zwar des von Gerlach „als ursprünglicher Winkel“ bezeichneten Winkels) treffende Erklärung herbeizuführen für nötig halten.

Der andere erwähnte Artikel findet sich unter derselben Überschrift p. 13. Der Verfasser Schmitz spricht sich entschieden gegen die Definition des Winkels als Ebenenausschnittes aus, hält für Anfänger Richtungsunterschied am geeignetsten und will dies später dahin erweitern, dafs er sagt: „Das Mafs für den Richtungsunterschied heifst Winkel.“

Es erübrigt nun noch, nochmals auf meine früher aufgestellte Definition zurückzukommen und zu versuchen, sie durch einige weitere Betrachtungen sicherzustellen.

Der Haupteinwurf, der dagegen erhoben worden ist, ist der, dafs in die reine Geometrie ein fremdes Element, etwas Mechanisches, eingemengt werde, das geeignet sei, die Auffassung zu trüben. Dem gegenüber mufs ich vor allem bemerken, dafs ich mir eine fruchtbare Behandlungsweise, ja eine lebendige Anschauung geometrischer Gebilde ohne Bewegung überhaupt nicht vorstellen kann. Es kommt aber ferner in Betracht, dafs die psychische Verarbeitung oder Erarbeitung der geometrischen Grundbegriffe — abgesehen von den ersten Elementen, gewissermafsen dem Urstoff — ohne Bewegung nicht denkbar ist. Jede psychische Erfassung zweier von einander getrennten Gebilde resp. des Zusammenhangs zweier verschiednen Gebilde erfordert Bewegung: nicht mechanische der Gebilde, sondern psychische des betrachtenden Subjekts, die wir allerdings in die Gegenstände selbst verlegt uns denken können.

So resultierte aus der unmittelbaren Auffassung zweier Punkte in ihrer gegenseitigen Relation der Begriff der Strecke und des Strahles, indem das betrachtende Subjekt seine Aufmerksamkeit von dem einen auf das andere Element — hier die beiden Punkte — hinlenkt d. h. eine Bewegung, allerdings rein geistig vollzieht.

Mir will es nun scheinen, als wenn wir am tiefsten in das Wesen des Winkelbegriffs eindrängen, wenn wir hier ganz analog verfahren, wie bei der Betrachtung zweier diskreten Punkte.

Indem wir die beiden von einem Punkte ausgehenden Strahlen betrachten, bieten sich uns ebenso wie bei der Betrachtung der beiden Punkte zwei unmittelbare Relationen: Abstand und Richtung. Nur handelt es sich hier um wesentlich andre Prädikate wie dort. Dort Richtung von einem Punkte nach dem andern, die im Strahle zur Anschauung kommt, dem Bilde der geradlinigen Bewegung, hier Drehungsrichtung von dem einen Strahle nach dem andern, die in der Ebene zur Anschauung kommt: dort Abstand zweier Punkte, der durch die Strecke zur Anschauung kommt — die Strecke das Maſs für den Abstand oder für die geradlinige Bewegung —, hier der Drehungsabstand zweier Strahlen, der im Winkel zur Anschauung kommt — der Winkel das Maſs für den Drehungsabstand oder für die drehende Bewegung. Wie also die Strecke als das Bild des Abstandes, die anschauliche Darstellung oder Vorstellung des Abstandes bezeichnet werden kann, so ist der Winkel das Bild des Drehungsabstandes, die anschauliche Vorstellung desselben. Insofern gehört zum Winkel die von dem einen Strahl bei seiner kürzesten Bewegung nach dem andern erzeugte Fläche.

Dringen wir in die Betrachtung völlig ein, so handelt es sich in Wirklichkeit nicht um eine Bewegung der Strahlen, sondern um die psychische Bewegung beim Übergang von dem einen Strahl zum andern, bei der Erfassung der beiden der Betrachtung sich darbietenden Elemente, wie ich schon weiter oben bemerkte. Es ist aber zulässig und ändert an dem Wesen der Untersuchung nichts, wenn wir die im betrachtenden Subjekte vorgehende rein psychische Bewegung auf die Gegenstände selbst übertragen, sie so in eine mechanische verwandeln.

Damit ist die unbedingte Zusammengehörigkeit von Winkel und Drehungsabstand, zugleich aber auch die Ebenheit des Winkels — wenn ich mich so ausdrücken darf — sicher gestellt.

Denn ebenso wie es von einem Punkte zu einem andern

unendlich viele Wege giebt, unter denen der geradlinige, der in der Strecke zur Anschauung kommt, als der kürzeste den Begriff des Abstandes der beiden Punkte als der unmittelbaren Relation derselben veranschaulicht: so giebt es unendlich viele Wege, wie der eine Strahl in die Lage des andern gebracht werden kann, unter denen der ebenflächige, der im Winkel zur Anschauung kommt, als der kürzeste den Begriff des Drehungsabstandes der beiden Strahlen als der unmittelbaren Relation derselben veranschaulicht.

Strecke und Winkel sind völlig analoge geometrische Elemente: das eine der Ausdruck der geradlinigen Bewegung, das andere derjenige der drehenden.

Darin liegt das Wesen des Winkels und deshalb ist es psychologisch völlig korrekt ihn als das Mafs der Drehung zu definieren.

Was mir übrigens diese Erklärung noch besonders auszuzeichnen scheint, ist Folgendes. Wenden wir auch hier das Gesetz an, dafs die Erfassung zweier diskreten Gegenstände der Anschauung mit einem Minimum von psychischer Arbeit erledigt wird, so haben wir zunächst hierin wieder auch die Identität von Drehungsrichtung und Drehungsabstand, wie wir früher für Richtung und Abstand dies als den gemeinsamen Quell erkannten, das charakteristische Kennzeichen für ihren engen Zusammenhang. Dann aber ist hiermit sofort festgesetzt, dafs wir unter dem Winkel zweier Strahlen ganz unzweideutig den spitzen Winkel zu verstehen haben[1]) — dafs erst durch besondere Bestimmung eine andere Auffassung freigelassen resp. angeordnet wird.

Die Analogie zwischen Strecke und Winkel läfst sich aber noch weiter verfolgen. Wie dort, so haben wir auch hier beim Winkel zwei Drehungsrichtungen, während der Abstand, wiederum wie dort, nur einer ist. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen Simon's über diesen Punkt (p. 11 seiner Pro-

---

[1]) Hierdurch wird auch das Bedenken gehoben, das Bürklen in seiner mehrerwähnten Abhandlung äufsert: „Wer die Winkelgröfse mit Hülfe der Drehung erklären wollte, der müfste zunächst nach einem Mittel suchen, um die zwei Drehungen, durch die ein Strahl in die Lage des andern gebracht werden kann, auseinander zu halten.“

grammabhandlung),[1]) die sich direkt auf die hier angestellten Betrachtungen übertragen lassen.)

Nirgends stofsen wir bei dieser Vergleichung von Strecke und Winkel auf etwas, das uns die Wahl des Ausgangspunktes oder die Verfolgung des eingeschlagenen Weges als falsch erscheinen liefse, im Gegenteil Schritt für Schritt bestärken uns neue Analogieen in der Überzeugung, dafs wir in den angestellten Untersuchungen das wahre Wesen des Winkelbegriffes erfafst haben.

So könnte man auch noch erwähnen, dafs nach unsern Untersuchungen die Strecke sich zur unendlichen Geraden verhält, wie der Winkel zur unendlichen Ebenenmannigfaltigkeit,[2]) wobei allerdings darauf zu achten ist, dafs diese unendlichen Ebenen sämtlich nur in einer Ebene liegen. Dadurch dafs der Strahl bei der Drehung immer wieder seine Anfangslage passiert, haben wir hier eine natürliche Mafseinheit, die sogenannte volle Umdrehung, während uns diese bei der Strecke fehlt.[3])

Wie für zwei Punkte der Abstand existiert, auch ohne Strecke, durch diese aber in Anschauung tritt, so auch bei den Strahlen der Drehungsabstand, ohne im Winkel veranschaulicht zu werden. Hier zeigt sich nun bei der Behandlung dieser beiden analogen Gebilde eine völlig verschiedene Behandlung. Während wir die Strecken auch dem Auge sichtbar zeichnen, unterbleibt das Zeichnen des Winkels. Wir müfsten entsprechend dem Ziehen einer Strecke mittelst einer abfärbenden Spitze den Winkel darstellen durch Drehen eines abfärbenden Strahles. Was uns veranlafst davon abzusehen, ist wohl einmal der Umstand, dafs wir immer nur einen Teil des

---

[1]) Seite 41 dieses Bandes.

[2]) Nicht etwa Strecke : Gerade = Winkel : Ebene.

[3]) Schotten in H. Z. XX, p. 499: „Legen wir die in einer Ebene stetig verlaufende Drehung — statt dessen würden wir jetzt besser sagen, die eine Ebene konstituierende, erzeugende Drehung —, die ein Strahl um seinen Anfangspunkt als Drehpunkt ausführen mufs, um in seine Anfangslage zu gelangen, als Mafseinheit zu Grunde, so giebt ein gegebener beliebiger Winkel an, wieviel von dieser Drehung im betrachteten Falle ausgeführt werden soll, ist also das Mafs der Drehung."

Winkels so vor Augen führen können, dann aber auch der, dafs die Zeichenfläche einen Ersatz bietet.

Als gutes Veranschaulichungsmittel liefse sich vielleicht ein Fächer benutzen.

Hauff, Lehrbegriff der reinen Mathematik. — Frankfurt a/M. 1803.

p. 81: „Wenn in einer Ebene von einem und demselben Punkte zwei verschiedene Linien ausgehen, so nennt man die Abweichung der Richtungen dieser beiden Linien von einander einen ebenen Winkel.“[1])

„Gleiche Winkel decken einander.“

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 6: „Die Neigung zweier sich durchschneidenden Geraden nennen wir Winkel, denen Gröfse ... von der Neigung selbst abhängt; denn Winkel und Neigung sind eins und dasselbe.“[2])

Bertrand, Élémens de Géométrie. — Paris 1812.

p. 4: „Deux droites AB, CD, qui se coupent sur un plan, en font quatre parts ASD, DSB, BSC, CSA, qui sont des angles: un angle est donc une partie du plan telle, qu'elle a pour limite deux droites qui se recontrent et se terminent à leur point de rencontre ... sa grandeur est la grandeur même de la portion de plan qui est limitée par ses jambes. Mais

---

[1]) Es ist bei dieser Definition hervorzuheben, dafs eine genaue Bezeichnungsweise früher nicht beliebt war. Unter Linien sind hier natürlich Gerade zu verstehen. Der Winkel wird als ein Gebilde der Ebene, nicht als konstituierendes Element der Ebene angesehen. Der Ausdruck „ebener Winkel“ läfst vermuten, dafs der Verfasser noch eine weitere Auffassung des Winkelbegriffs für möglich hält resp. voraussetzt, ohne näher darauf einzugehen.

[2]) Schweins steht also vollständig auf dem Euklidischen Standpunkte bei dieser Erklärung. Wir haben auseinandergesetzt, warum uns gerade der Ausdruck Neigung bedenklich erscheint, abgesehen von den Einwürfen, die im übrigen gegen diese oder eine verwandte Definition sprechen.

comme celles-ci limitent aussi bien la grande que la petite des deux parts qu'elles font du plan, l'on est convenu, pour éviter les méprises, que ce qui se dirait d'un angle, s'entendrait de la plus petite de ces deux parts, à moins que celui qui parle ne le rapportât expressément à la plus grande." [1]).

Bézout, Cours des Mathématiques. — Paris 1812.

p. 6: „Deux lignes AB, AC, qui re rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande.

Cette ouverture BAC est ce qu'on appelle un angle.

Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite AB était d'abord couchée sur AC, et qu'on l'a fait tournu sur le point A (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position AB qu'elle a actuellement. La quantité dont AB a tourné, est précisement ce qu'on appelle un angle." [2])

---

[1]) Hier begegnen wir also zum erstenmal einer Definition, die von der Euklid'schen abweicht. Daſs sie viele Anhänger gefunden, ist schon im Texte erwähnt. Es verdient hier erwähnt zu werden, was Bürklen in seiner Abhandlung über den Winkel sagt: „Ordnet man ferner jene 45 Definitionen Schottens chronologisch, so zeigt sich, daſs die ältesten, wie das im vorigen Jahrhundert und am Anfange des laufenden allgemein bei der Behandlung der Elementargeometrie der Fall war, sich nach Euklid richten. Dann tritt unter dem Einflusse der projektivischen Geometrie und der neueren Mathematik überhaupt, in der Mehrzahl der Fälle zuerst die Richtung, später die Drehung in die Definition ein, indem man zuletzt auch hier das Werdende an die Stelle des Seienden zu setzen bestrebt war."

„Zeigt sich also einerseits, daſs entsprechend der Entwicklung der Wissenschaft stets neue Auffassungen in einen Begriff hineingetragen werden können, so folgt auch, daſs es ein nutzloses Bestreben ist, eine Definition aufstellen zu wollen, die für alle Zeiten das Wesen des Begriffes erschöpft."

Diesem Gedanken kann ich nicht völlig beipflichten, obwohl es nicht zu leugnen ist, daſs er eine groſse Wahrheit enthält, nämlich die, daſs in der Definition der Begriffe ein Fluſs der Bewegung sich bemerkbar macht: dies aber, unserer Ansicht nach, nur so lange, bis es gelungen ist, das wahre Wesen des Begriffes in der Definition darzulegen.

[2]) Hier wird die Öffnung des Liniengebildes mit Winkel bezeichnet, also das, was von andern mit Neigung oder Abweichung

Daran schliefst sich die Betrachtung, dafs die Länge der Schenkel ohne Einflufs auf die Gröfse des Winkels ist und dann spricht der Verfasser direkt über den Zusammenhang zwischen Winkel und Kreis.

Crelle, Über Parallelen-Theorieen. — Berlin 1816.

p. 45: „Der zum Teil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Nichtparallelen, d. h. von einer bis zur andern liegt, heifst Winkel.“[1]).

In der Einleitung findet sich folgende Bemerkung:

p. 14: „Geht man näher in die Sache ein, so findet sich, dafs der Begriff des Winkelraums sogar deutlicher ist als der: der Winkel sei die Neigung zweier Linien gegen einander. Diese Definition beim Euklides schauet, wie mich dünkt, gleichsam rückwärts nach dem unbestimmten Unendlichen. Ich meines Teiles fühle, dafs ich von der Neigung zweier Linien keinen geometrisch klaren, nicht einmal deutlichen Begriff habe, weil ich nicht deutlich sehe, wie eine Neigung sich teilen läfst, also die Charakteristik der Gröfse an ihr nicht klar erkenne, die ihr allein ein Recht auf eine Stelle in der Geometrie giebt.“[2])

---

bezeichnet wird. Die Definition ist eine rein äufserliche, die nur das anschauliche Gebilde auffafst, ohne auf den Zusammenhang seiner Elemente zu achten. Doch finden wir schon hier in den sich anschliefsenden Sätzen die Hinweisung auf das wahre Wesen des Winkels, auf seinen Zusammenhang mit der drehenden Bewegung. Gerade diese zusätzlichen Bemerkungen hätten den Verfasser, wie viele andere, darauf hinlenken müssen, dafs eben der Winkel nicht wesentlich definiert werden kann, wenn man nicht auf seinen Zusammenhang mit der drehenden Bewegung Bezug nimmt.

[1]) Diese Begriffsbestimmung enthält nichts Bestimmtes. Was soll man sich unter dem zwischen zwei sich schneidenden Geraden befindlichen Raume vorstellen? Gemeint ist wohl das Richtige, aber es ist nicht zum präzisen Ausdruck gebracht.

[2]) Diesen Bemerkungen mufs man unbedingt zustimmen. Neigung teilbar, d. h. rein quantitativ, läfst sich nicht vorstellen; die Verknüpfung des Qualitativen (Neigung) mit dem Quantitativen (Gröfse des Winkels) ist auf diese Weise nicht möglich.

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817.

p. 292: „Treffen zwei gerade Linien in einem Punkte zusammen, so entsteht ein ebener Winkel."

„Die Gröfse eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von ihrer Lage gegen einander ab. Je weiter sie von einander zurückgehen, indefs sie in ihrem Scheitelpunkt unverändert zusammenhängen, desto gröfser wird der Winkel; und je mehr sie sich ihrer ganzen Länge nach einander nähern, desto kleiner wird er."[1])

Develey, Anfangsgründe der Geometrie. — Stuttgart 1818.

p. 14: „Wenn zwei gerade Linien AB, AC im Punkte A sich schneiden, so kann man diesen Punkt wie ein Gewinde ansehen, um welches die Linien AB, AC sich drehen können, um sich zu nähern oder sich von einander zu entfernen, ohne aus der Ebene, in welcher sie gezeichnet sind, herauszugehen. Bei dieser Bewegung vermindert sich die Öffnung, welche diese Linien bilden, wenn sie sich nähern, und vergröfsert sich, wenn sie sich von einander entfernen. Diese Öffnung heifst ein Winkel."[2])

„Die Gröfse eines Winkels hängt nicht von der Länge

---

[1]) Die Definition drückt sich um das punctum saliens der Untersuchung herum. Das Hineinziehen des Lagenbegriffes ist nicht geeignet, Klarheit in die Betrachtung zu bringen; doch geht unzweifelhaft hervor, dafs nach des Verfassers Ansicht Winkel und Drehung in engem Zusammenhange stehen, eine Erklärung des Wesens des Winkelbegriffes ohne Berücksichtigung der drehenden Bewegung undenkbar ist.

[2]) Es dürfte wohl kaum einer Entschuldigung bedürfen, dafs diese auf die Öffnung sich stützende Erklärung einer besonderen Erwähnung im Texte nicht gewürdigt ist. Sie ist im wesentlichen identisch mit der Euklidischen resp. der auf den Richtungsunterschied basierenden. Lobend anzuerkennen ist hier übrigens, dafs der Verfasser sich bemüht hat, Leben in die Definition zu bringen: aber doch ist seine Erklärung weit davon entfernt, genetisch zu sein. Befangen in den alten Anschauungen hat er es nicht über sich vermocht, die nötigen Konsequenzen zu ziehen und den Winkel in seiner unmittelbaren Beziehung zur drehenden Bewegung aufzufassen und demgemäfs zu erklären, wenn auch anerkannt werden mufs, dafs seine Betrachtungen die wesentlichen Elemente zu einer richtigen Definition enthalten.

seiner Schenkel ab, sondern nur von der Gröfse der Öffnung, welche die Schenkel bilden."

Blasche, Grundrifs der Elementar-Geometrie. — Reval 1819.

p. 1: „Einen Winkel ABC bilden zwei gerade Linien AB, BC, welche einen Punkt B gemein haben, aber zusammen nicht eine einzige gerade Linie ausmachen."[1])

Brewer, Lehrbuch der Geometrie. — Düsseldorf 1822.

p. 3: „Die Neigung von zwei geraden, sich durchschneidenden Linien, heifst ein Winkel."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

p. 177: „Wenn in einer ebenen Fläche, von demselben Punkte aus, zwei Richtungen genommen sind, so ist es allemal möglich, den Unterschied derselben durch kontinuierlichen Übergang von der ersten zur zweiten in ursprünglicher Anschauung aufzufassen, wozu eine, nicht weiter zurückführbare Raumbeschreibung oder Bewegung, welche die drehende genannt zu werden pflegt, erfordert wird. Ein Winkel besteht in dem durch drehende Bewegung aufgefafsten Unterschiede zweier Richtungen und seine Gröfse hängt von dem geringeren oder gröfseren Fortschreiten der zu seiner Erzeugung erforderlichen drehenden Bewegung ab."[2])

---

[1]) Erstens fafst der Verfasser den Winkel rein äufserlich als Figur auf; dann aber läfst er sich durch Euklids Definition verleiten, eine Ausnahme zu konstituieren, die in die Erklärung eine bedenkliche Lücke reifst, und so in die Untersuchung des Winkelbegriffes ein Moment einzuführen, das eine einheitliche Definition zur Unmöglichkeit macht.

[2]) Thibauts Grundrifs, dessen Bedeutung von einem so hervorragenden mathematischen Pädagogen, wie Siegmund Günther, rückhaltlos anerkannt wird, enthält, wie man sieht, in seiner Winkeldefinition schon alle wesentlichen Merkmale. Thibaut also ist wohl das Verdienst, das wahre Wesen des Winkels aufgedeckt zu haben, zuzuschreiben, das von den Späteren vorwiegend v. Münchow zuerkannt wird, dessen „Grundlehren der Trigonometrie" aber erst vier Jahre später erschienen, als Thibauts Grundrifs.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 12: „Zwei gerade Linien werden entweder ... oder gehörig verlängert, nur in Einem Punkte zusammentreffen, in welchem sie einander durchschneiden:[1]) alsdann sagt man von ihnen, dafs sie gegen einander geneigt sind oder einen Winkel bilden."

„Durch zwei einander schneidende gerade Linien kann man sich immer eine Ebene gelegt denken; oder jeder von zwei geraden Linien gebildete Winkel liegt in einer Ebene."

Köberlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Sulzbach 1824.

p. 7: „Wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammenstofsen, so heifst ihre Neigung gegeneinander ein ebener oder geradliniger Winkel."

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

p. 10: „Die gegenseitige Neigung zweier Linien, die sich schneiden, heifst Winkel; der zum Teil begrenzte Raum der Ebene Winkelraum, sodafs zu gleichen Winkeln gleiche Winkelräume gehören und umgekehrt."[2])

---

v. Forstner, Grundriss d. Elem. d. r. Math. — Berlin 1826.

p. 398: „Die Neigung zweier geraden Linien in einer Ebene gegen einander, bis sie in einem Punkte sich schneiden, heifst ein ebener geradliniger Flächenwinkel oder blofs Winkel; ... die unbegrenzte Fläche, welche sich zwischen beiden Schenkeln befindet, heifst der Winkelraum."[3])

---

[1]) Nach Hoffmann ist das Zusammentreffen von dem sich Durchschneiden wohl zu unterscheiden. Bei dem Winkel handelt es sich in der That nur um das Erstere.

[2]) Bei Crelle finden wir zum erstenmal die ausdrückliche Unterscheidung zwischen Winkel und Winkelraum. Wie wir dieses Verhältnis auffassen, geht aus unseren Betrachtungen wohl mit genügender Klarheit hervor.

[3]) Vergl. unsere Bemerkung zum vorhergehenden Zitat. v. Forstner hält im zweiten Teile seiner Erklärung nicht für nötig, die Ebenheit

„Die Gröfse eines Winkels hängt allein von der Neigung der Schenkel gegen einander ab und nie von der Länge derselben. Je gröfser die Neigung gegen einander ist, je kleiner ist der Winkel, welcher selbst wächst, wenn die Neigung geringer wird.“[1])

---

v. Münchow, Grundlehren der Trigonometrie. — Bonn 1826.

p. 12: „Um nun ..., wollen wir in Zukunft unter dem Winkel zweier geraden, an einem Punkt (dem Scheitelpunkt) zusammengestellten und einerseits von diesem Punkt begrenzten Linien (Winkelschenkel) die Gröfse derjenigen Drehung verstehen, durch welche eine vom Scheitelpunkt begrenzte, andrerseits aber unbegrenzte gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Winkelschenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann.“

„Ber Begriff dieser Erklärung ist erstens unmittelbar auf die gebräuchliche Art der Addition der Winkel anwendbar, indem die Gröfse der eben bestimmten Drehung zwischen den äufsersten Schenkeln einer Winkelsumme zugleich die Gröfse der besagten Drehungen zwischen den Schenkeln der Summanden enthält; zweitens läfst sich aber nach diesem Begriff von einer jeden Winkelsumme wiederum als von einem Winkel sprechen; und so ist durch die aufgestellte Erklärung (die übrigens, da sie nichts weiter als eine ausführbare Bewegung voraussetzt, über ihre Möglichkeit keine besondere Ausweisung von nöten hat) den Forderungen, um deren Erledigung es hier zunächst zu thun war, Genüge geleistet.“[2])

---

der Fläche besonders zu betonen. — Während aber Crelle schon die Untersuchung des Winkelbegriffes in neue Bahnen lenkte, zeigt Forstners Darlegung noch alle Charakteristika des Euklid'schen starren Standpunktes.

[1]) Gerade dieser Umstand, dieses reciproke Verhältnis ist es, das, wie wir schon im Texte dargelegt haben, uns die vorliegende Definition ganz besonders verwerfen läfst.

[2]) Münchow scheint mit seiner Erklärung mehr Glück gehabt zu haben, wie andere. Er wird vorzugsweise als derjenige bezeichnet, der das Moment der drehenden Bewegung zur Erklärung des Winkelbegriffes

Förstemann, Lehrbuch der Geometrie. — Danzig 1827.

p. 6: „Winkel ein Teil einer unbegrenzten Ebene, der durch zwei halbbegrenzte Gerade, deren Grenzpunkte zusammenfallen, unvollständig begrenzt wird.“

„Entstehung des Winkels durch Drehung einer halbbegrenzten Geraden.“[1]

Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827.

p. 11—13 wird der Winkel behandelt und die Vermutung aufgestellt, daſs die in Euklids Elementen sich findende Erklärung verschlimmbessert worden sei (Viviani, Rob. Simson).[2]

Der Verfasser selbst kommt auf die Drehung zu sprechen:[3] „Mithin hängt die Gröſse eines geradlinigen Winkels von der Gröſse des Auseinanderstehens seiner Schenkel; oder von der Drehung um seine Spitze ab, um welche ein Schenkel des Winkels von dem andern absteht.“

Savilius finde κλίσις (Neigung) nicht angemessen wegen des rechten und stumpfen Winkels.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

p. 5: „Zwei gerade Linien, die von demselben Punkte

herbeigezogen habe; ja bis in die neueste Zeit hinein wird Münchows Winkelerklärung als diejenige angesehen, die der Begriffserklärung neue Bahnen geschaffen hat. Man vergleiche unsere Bemerkung zu Thibauts Zitat und zu dem v. Swindens (p. 128 resp. 132).

[1]) Der Definition des Winkels als unbegrenzten Ebenenstückes schlieſst sich also eine Erklärung an, die auf die drehende Bewegung Bezug nimmt. Wäre es da nicht natürlicher gewesen, beide Gedanken zu vereinigen und den erklärenden Zusatz über die Entstehung des Winkels mit der vorher abgegebenen Aussage zu einer genetischen Definition zu verknüpfen?

[2]) Euklid habe bloſs eine Definition vom geradlinigen ebenen Winkel gegeben, die irgend ein Halbwisser allgemeiner zu fassen und in zwei Teile zu teilen unternommen habe.

[3]) Es ist erst gesagt, der Winkel beziehe sich auf die Lage seiner Schenkel, nicht auf deren Länge: auch nicht auf den zwischen den Schenkeln liegenden ebenen Raum, welcher „unbestimmt und nach Verschiedenheit der Länge der Schenkel verschieden“ sei.

ausgehen, heifsen, wenn blofs die Lage der Linien zu einander beachtet wird, ein Winkel."[1])

E. G. Fischer, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Berlin 1833.

p. 7: „Wenn zwei gerade Linien aus einem Punkte auslaufen, ohne sich zu decken; so haben sie verschiedene Richtungen und der Unterschied ihrer Richtungen heifst ein Winkel. Je stärker nämlich ihre Richtungen von einander abweichen, desto gröfser ist der Winkel, den sie einschliefsen."[2])

Crelle, Zur Theorie der Ebene. — Journal 1834.

p. 32: „Die Neigung zweier geraden Linien im Raume, die sich treffen, ohne in einander zu fallen, heifst am Durchschnittspunkte Winkel."[3])

van Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. Jena 1834.

p. 6: „Die gegenseitige Neigung zweier Linien, die in derselben Ebene liegen und in einem Punkte sich schneiden oder begegnen, wird ebener Winkel genannt."

Der Übersetzer weist in einer Anmerkung auf die treffliche Erklärung v. Münchow's hin (siehe Zitat).[4])

---

[1]) Hier ist die rein anschauliche Erklärung auf die Spitze getrieben: also „die Geraden heifsen ein Winkel". Was soll man zu einer solchen Definition sagen!

[2]) Das erste der Zitate, in dem der verpönte „Richtungsunterschied" vorkommt. Es ist übrigens nicht zu übersehen, dafs der Autor den Nullwinkel ausschliefst — d. h. also den Fall, dafs der „Richtungsunterschied" Null ist — und den Vollwinkel, den Fall, wo — ja wie soll man da sagen: der „Richtungsunterschied" wieder Null ist — man sieht, hierbei kommt man mit dieser Definition völlig in die Brüche.

[3]) Es ist mir nicht recht klar, warum Crelle die Worte hinzufügt „am Durchschnittspunkte"; vielleicht soll es andeuten, dafs die Geraden sich wirklich schneiden müssen d. h. bis zum Durchnittspunkte verlängert werden müssen: aber es heifst doch schon vorher „die sich treffen". Wie gesagt, mir ist dieser Zusatz unverständlich.

[4]) Das v. Münchowsche Buch scheint demnach bekannter gewesen zu sein, als das ältere Thibautsche, sonst wäre diesem wohl das Verdienst zuerkannt worden. Allerdings ist zuzugeben, dafs v. Münchows Ausdrucksweise prägnanter ist und seine Erklärung sprachlich vor derjenigen Thibauts den Vorzug verdient.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 410: „Von einem in der Ebene angenommenen Punkte aus giebt es unendlich viel Richtungen, denn es können von ihm aus unendlich viel gerade Linien in der Ebene gezogen werden. Um aus einer dieser Richtungen in eine andere zu geraten, ist an jenem Punkte eine eigentümliche Bewegung, Drehung, erforderlich. Die Gröſse der Drehung, wodurch der Übergang aus der einen in die andere Richtung, ohne daſs man dabei in andere als in der Ebene befindliche Zwischenrichtungen geraten wäre, geschieht, bestimmt den Winkel, oder die gegenseitige Neigung zweier geraden Linien."[1])

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

Man vergl. die im zweiten Kapitel zitierten beiden ersten Absätze, worauf es heiſst:

„Von der geneigten Lage. Haben AB und CD verschiedene Richtung, so findet ein Unterschied ihrer Richtungen statt, diesen Unterschied nennt man Winkel."

„Man kann die Richtung ED allmählich in die EB übergehen lassen, wo alsdann beide Geraden zusammenfallen. In diesem Falle wird der Unterschied der Richtungen, also der Winkel immer kleiner, und zuletzt verschwindet derselbe."

„Die Gröſse des Winkels ist unabhängig von der Gröſse der Linien, welche ihn bilden, und ändert sich nur mit den Richtungen beider Geraden."

Euklid, Elemente ed. Dippe. — Halle 1840.

p. 1: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegeneinander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen."

---

[1]) Ulrichs Lehrbuch ist durch gute Begriffserklärungen ausgezeichnet, es erinnert in Vielem an Thibauts Grundriſs. Vielleicht ist es nicht unbeeinfluſst von jenem.

Das Charakteristische zur Winkelerklärung ist verwendet, insofern ist gegen die Definition nichts einzuwenden, dagegen hat die Gröſse der Drehung für uns die Bedenken, die wir im Texte entwickelt haben.

Wunder, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Leipzig 1840.

p. 14: „Zwei Strahlen, welche beide von demselben Ausgangspunkte ausgehen, haben entweder einerlei oder verschiedene Richtung; im ersten Falle bilden sie eigentlich beide nur einen Strahl, fallen zusammen und können nur in Gedanken von einander unterschieden werden. Haben aber zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen verschiedene Richtung, so bilden sie einen Winkel; ein Winkel ist der Unterschied der Richtung zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien oder Strahlen.“[1])

„Denkt man zwei Strahlen mit den Anfangspunkten und übrigens ganz aufeinander gelegt, so hat man noch keinen Winkel; läfst man aber nun, während der eine Strahl in seiner Lage bleibt, den andern um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt immer nach derselben Seite hin sich schwenken, also seine Richtung ändern, bis er in eine bestimmte Lage kommt, so ist ein Winkel entstanden.“[2])

Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

p. 4: „Ein Winkel wird gebildet, wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammentreffen, ohne eine einzige gerade Linie zu bilden.“

„Die Gröfse des Winkels hängt nur von der gegenseitigen Neigung der Schenkel, aber nicht von ihrer Länge ab.“

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. Ed. Külp. — Bern 1843.

---

[1]) Die einleitende Betrachtung enthält viel Gutes, besonders hat uns gefallen der Hinweis auf die nur in Gedanken mögliche Unterscheidung der zusammenfallenden Strahlen. Die eigentliche Erklärung leidet an dem Fehler der allzu äufserlichen Auffassung des Gebildes. Wenn es hiefse, der Unterschied der Richtungen komme im Winkel zur Anschauung, so könnte man sich damit vielleicht einverstanden erklären, obwohl wir auch dann keine genetische Definition hätten.

[2]) Dieser Zusatz hätte mit der Erklärung zur genetischen Definition verwoben werden müssen; jedenfalls dient er aber dazu, die vorhergehende Definition zu gröfserer Klarheit zu bringen. Eigentümlich ist der Ausdruck „schwenken“ statt „drehen“. Wenn wir nicht irren, braucht ihn kein anderer Autor.

p. 5: „Zwei gerade Linien CB, CA, welche nur einen einzigen Punkt gemein haben, können keinen Raum abgrenzen. Der unbestimmte zwischen diesen geraden Linien von beliebiger Länge eingeschlossene Raum wird Winkel genannt.“[1])

„Die Erklärung vom Winkel hat wegen der Einfachheit des Begriffs gleichfalls seine grofsen Schwierigkeiten. Wir sagen daher auch hier kurz: der Winkel ist uns durch Anschauung gegeben.“[2])

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

p. 26: „Winkel zweier in einer Ebene von demselben Endpunkte ausgehender halbbegrenzter Geraden ist das Mafs der fortschreitenden Drehung, durch welche sich die eine jener Geraden von der andern entfernt hat.“[3])

---

[1]) Der Verfasser hält einen Hinweis auf die Ebene für unnötig; darin liegt, wie mir scheint, der Gedanke an den kleinsten Raum ausgedrückt, der zwischen den Geraden möglich ist, die unausgesprochene Annahme eines Abstandes besonderer Art.

[2]) Das wäre jedenfalls das Bequemste; aber es scheint uns doch nicht zulässig, die Schwierigkeit auf diese Weise zu umgehen. Der mathematische Winkel ist denn doch etwas anderes als Winkel im gewöhnlichen Leben.

[3]) Die Erklärung ist vollständig die unsere, nur dafs wir an Stelle der fortschreitenden Drehung — ein Ausdruck, der mifsverstanden werden kann — den Ausdruck „stetige Drehung“ gebraucht haben. Bei der Abfassung meines Artikels (in H. Z. XX, p. 481—501) war mir Bretschneiders Lehrgebäude noch nicht bekannt. Merkwürdig bleibt immerhin, dafs eine Reihe vorzüglicher Lehrbücher — wozu auch das hier vorliegende gehört (Thibaut, Ulrich, Kunze) — so vollständig haben verdrängt werden können durch zum Teil recht zweifelhafte Produkte neueren Datums. Aber andererseits ist es auch wieder natürlich, dafs in dem sich überstürzenden Strome von Lehrbüchern die alten losgerissen und weggeschwemmt wurden — gute und schlechte unterschiedslos. Den Haupteinflufs haben natürlich die Veränderungen in den Lehrplänen gehabt: hier ist die Thatsache merkwürdig und auffallend, dafs bei der Erweiterung des mathematischen Unterrichts die Lehrbücher sich verkürzten; doch mag auch der Zeitgeist mitsprechen, der eine behagliche und ach so wohlthuende Vertiefung in den Gegenstand beim Lernenden kaum noch zuläfst. Hastig und nach Art von Kraftfutter wird die Wissenschaft eingeflöfst; ob zum Segen der Schüler?

Gehen von einem Punkte A einer Ebene zwei halbbegrenzte Gerade AB und AC aus, von denen AB als festliegend, AC als um A beweglich gedacht wird, so kann AC durch fortschreitende Drehung in immer andere Lagen gegen AB gebracht werden. Das Maſs der fortschreitenden Drehung nun, welche erforderlich ist, um AC aus derjenigen Lage, in welcher sie die feste Gerade AB deckt, in irgend eine andere bestimmte Lage zu bringen, heiſst der zu dieser Lage der beiden Geraden gehörige Winkel, oder auch schlechthin der Winkel beider Geraden."

„Der zwischen den Schenkeln liegende Teil der unbegrenzten Ebene heiſst das Winkelblatt."

„Da übrigens der ebene Winkel nichts als die Quantität der erfolgten Drehung ist, mithin sich als eine benannte Zahl von einer eigentümlichen Gattung oder Einheit darstellt: so ist klar, daſs gleichvielte Teile oder Gleichvielfache eines und desselben Winkels untereinander stets gleich sein müssen. Es kann daher auch niemals von einer Kongruenz, sondern nur von einer Gleichheit zweier Winkel die Rede sein."[1])

---

[1]) Diese Bemerkungen sind sehr treffend. Ich will übrigens diese Gelegenheit benutzen, um noch einmal auf Bürklens Arbeit zurückzukommen. Er sagt l. c. p. 2: Überhaupt leiden alle von Schotten (H. Z. XX) angeführten Definitionen offenbar an dem Fehler, daſs sie nur die Gröſse und in dieser nur die Quantität, nicht das Quantum des Winkels zu definieren suchen. Die Gröſse ist aber nur eine Seite des Objektes, durchaus nicht die alleinige."

p. 5: „... beim Winkel ist bei gleicher Gröſse keine verschiedene Gestalt möglich und es kann Kongruenz von Ähnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, es ist bei gleicher Gestalt immer auch gleiche Gröſse vorhanden. — Hieraus ist auch ersichtlich, warum bei keinem geometrischen Gebilde auſser beim Winkel die Gröſse als Einteilungsprinzip verwendet wird." (Hierzu ist zu bemerken: Hätten wir bei der Strecke eine natürliche Maſseinheit, wie beim Winkel die einmalige Drehung, so würden wir auch dort dieses Einteilungsprinzip verwenden.)

Wegen der einheitlichen Auffassung und Untersuchung dürfte aber auch der Winkel nicht mit seiner Gröſse identifiziert werden. „Wir haben aber zuerst zu fragen, was ist groſs am Winkel, dann erst wie groſs. Die erste Frage wird gewöhnlich nicht nach Gebühr gewürdigt und doch ist sie die wichtigere."

Legendre, Elemente der Geometrie. Ed. Crelle. — Berlin 1844.

p. 2: „Wenn sich zwei gerade Linien begegnen, so heifst die geringere oder bedeutendere Gröfse, um welche sie ihrer Lage nach voneinander entfernt sind, Winkel.“[1])

„Die Winkel sind, wie alle Gröfsen, der Vermehrung, Verminderung, Vervielfältigung und Teilung fähig.“

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844.

p. 9: „Denkt man sich von irgend einem Punkte aus im Raume zwei Strahlen gezogen und in der dadurch bestimmten Ebene den einen derselben um jenen Punkt immer nach einerlei Richtung so lange gedreht, bis er mit dem andern zusammenfällt: so heifst die Gröfse dieser Drehung der von jenen Strahlen gebildete oder eingeschlossene Winkel.“

Recht, Die Elemente der Geometrie. — München 1844.

p. 15: „Die Neigung zweier sich schneidenden geraden Linien nennt man Winkel.“

„Wenn man eine Gerade in einem Punkte befestigt denkt, so kann man sie, beständig in einer Ebene bleibend, beliebig um einen Punkt drehen. Dasjenige nun, wodurch sich die verschiedenen Stellungen dieser Geraden voneinander unterscheiden, nennt man ihre Neigungen oder ihre Winkel.“[2])

Mahistre, Lehrbuch der vergl. Geometrie. Ed. Lorey. — Weimar 1845.

p. 15: „Ein ebener Winkel oder blofs Winkel, ist die

---

[1]) Eine höchst eigentümliche Erklärung; sollte es vielleicht an der Übersetzung liegen?

[2]) Das Vorurteil gestattet noch nicht, die Euklid'sche Definition beiseite zu lassen; doch drängt die bessere Erkenntnis dazu, im erläuternden Zusatz das wahre Wesen des Winkelbegriffes klar zu legen: aber es gelingt noch nicht völlig. Der letzte Satz bringt noch den Begriff der Stellung in die Erörterung, wodurch sie gerade nicht an Klarheit gewinnt.

gröfsere oder kleinere Öffnung, welche zwischen zwei Geraden enthalten ist, welche in demselben Punkt endigen."[1])

Auch die Drehung wird erwähnt.

Erb, Die Probleme der geraden Linie etc. — Heidelberg 1846.

p. 35: „Winkel ist also eine aus zwei einseits begrenzten geraden Linien in ihren Grenzen derart zusammengesetzte Linie, dafs keine derselben mit der anderen oder ihrer Verlängerung zusammenfällt, beide verlängert aufser dem Vereinigungspunkt keinen anderen Punkt mehr gemeinschaftlich haben."[2])

Salomon, Reine Elementargeometrie. — Wien 1847.

p. 12: „Die Abweichung zweier zusammenstofsenden Linien von dem gemeinschaftlichen Puukte oder die Neigung dieser zwei Linien zu dem gemeinschaftlichen Punkte heifst Winkel; ... Man könnte den Winkel auch als den Unterschied der Richtungen zweier Strahlen betrachten."

Steffenhagen, Kompendium der Planimetrie. — Parchim 1847.

p. 23: „Die Neigung zweier ungleich gerichteten geraden Linien in derselben Ebene heifst Winkel."

„Der Raum zwischen den beiden Schenkeln heifst Schenkelweite."

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

p. 240: „Eine um ihren unbeweglichen Anfangspunkt in

[1]) Diese Erklärung ist sehr unbestimmt; denn die gröfsere oder kleinere Öffnung hängt doch von der Entfernung vom gemeinsamen Punkte ab, wobei die nahezu völlige oder vollständige Gleichheit der Schenkel stillschweigend vorausgesetzt wird. Derselbe Winkel kann uns sehr verschieden offen erscheinen.

[2]) Was soll man zu einer solchen Erklärung eigentlich sagen? Winkel eine aus zwei Linien zusammengesetzte Linie!!

einer Ebene gedrehte Gerade wird während ihrer Umdrehung allmählich sämtliche Richtungen durchlaufen, welche in der Ebene um den Punkt möglich sind. Als Gröfse der Drehung, durch welche sie aus einer anfänglichen Richtung in eine andere stetig übergeht, entsteht hierbei der Winkel."

Knorr, Elemente der Geometrie. — Kiew 1849.

p. 18: „Ein ebener geradliniger Winkel ist ein Teil einer unbegrenzten Ebene, welcher zwischen zwei einseitig unbegrenzten geraden Linien liegt, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben."

„Ebene geradlinige Winkel sind untereinander vollkommen gleichartig."[1])

„Wenn der Winkel Gegenstand geometrischer Betrachtungen sein soll, so mufs er auch als geometrische Gröfse definiert werden; eine geometrische Gröfse ist aber entweder Körper oder Fläche oder Linie; der ebene Winkel ist nun weder Körper noch Linie, also kann er nur zu den Flächen gehören."[2])

Ebensperger, Gemeinfafsliche Geometrie. — Nürnberg 1850.

---

[1]) Ein unverständlicher Zusatz.

[2]) Man vergleiche zu dieser Bemerkung die im Texte im Auszuge wiedergegebene Abhandlung von Gerlach (H. Z. XXII, p. 1—13). Gegen die Voraussetzung, wie Schlufsfolgerung hier läfst sich nichts einwenden. Aber es ist doch zu bedenken, dafs wir in der Geometrie eine ganze Gruppe von Gröfsen haben, die zwar reine Zahlengröfsen sind, aber eine bestimmte geometrische Deutung haben: ich meine die Funktionen des Winkels. Ganz ähnlich nun ist der Winkel eine besondere Art Gröfse, wie schon daraus hervorgeht, dafs er uns geometrisch (durch Anschauung) gegeben sein kann, aber auch durch Zahlen. Wir können mit ihm geometrisch (als Figur) operieren, aber auch rein rechnerisch — z. B. Konstruktion oder Berechnung des Nebenwinkels. Diese besondere Eigentümlichkeit weist ihm eine Stellung an aufserhalb der geometrischen Elemente, wie aufserhalb der Zahlenreihe, und doch mit beiden im engsten Zusammenhange. Diese doppelte Wesenheit wird durch unsere Definition charakterisiert.

Man vergleiche hierzu einen Aufsatz in Grunerts Archiv. Bd. 54, p. 405: Worpitzky, Über die Grundbegriffe der Geometrie.

p. 15: „Wenn zwei gerade Linien in einen Punkt zusammentreffen, so bilden sie einen Winkel. Ein Winkel ist also die Gröfse der Neigung zweier geraden Linien in einen Punkt oder der Unterschied in der Richtung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen."

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Hamburg 1850.

p. 23: „Wenn von einem Punkte zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegeneinander geneigt und bilden einen Winkel miteinander, und man versteht daher unter Winkel immer die Neigung zweier geraden Linien gegeneinander."

„Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Die Schenkel haben anfangs aufeinander gelegen, dreht sich der eine, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer gröfser wird."

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

p. 14 im § 22 wird von sich schneidenden Geraden gesprochen.

§ 23: „Der flüchtigste Blick auf das eben besprochene Gebilde zeigt sogleich, dafs es ein neues ist. Wir nennen es Winkel und definieren demnach: Winkel ist dasjenige Gebilde, welches durch zwei sich schneidende Gerade entsteht."

§ 26: „Wenn sich zwei Gerade AB, CD in einem Punkte O schneiden, so gehen von diesem Punkte O vier Gerade OA, OB, OC, OD aus. Je zwei von ihnen stellen das Gebilde dar, welches wir jetzt bestimmten Winkel nennen wollen. Wir können also die Definition des § 23 bestimmter so fassen: Winkel ist dasjenige Gebilde, welches durch zwei von einem Punkte ausgehende Gerade dargestellt wird."[1])

[1]) Bartholomäi giebt also in diesen beiden Paragraphen die rein äufserliche Erklärung des Winkels als einer Figur, ohne auf den Zusammenhang der konstituierenden Elemente, auf das Wesen des Winkels irgendwie einzugehen.

§ 27: „Wollen wir die Abhängigkeit der Elemente eines Winkels *ABC* kennen lernen, so müssen wir aus der einen Geraden *BC* in die andere *AB* übergehen. Dieser Übergang geschieht zunächst dadurch, dafs sich der eine Schenkel *BC* um den Scheitelpunkt *B* dreht, bis er in die Lage des andern *BA* kommt. Diese Drehung darf nicht willkürlich sein. Deshalb lassen wir den drehenden Schenkel *BC* auf einer Geraden *AC*, welche durch zwei beliebige Punkte *A*, *C* der Schenkel geht, hingleiten. (Entstehung der Ebene.)[1])

§ 32: „1. Die beiden Schenkel des Winkels sind verschiedene Richtungen. Der Unterschied derselben wächst, wenn die Drehung fortgesetzt wird. Sobald wir also blofs auf die Richtung der Schenkel Rücksicht nehmen, kann blofs an einen Unterschied der Richtungen gedacht werden. Der Winkel stellt also diesen dar. Daher können wir die Definition aufstellen: Winkel ist der Unterschied in der Richtung zweier Geraden, die von einem Punkte ausgehen."[2])

2. Der Winkel erscheint als eine Ebene, welche von zwei Geraden, welche vom Scheitelpunkt ausgehen, begrenzt und einerseits unbegrenzt, und mit Geraden, welche vom Scheitelpunkt ausgehen, erfüllt ist. Daher erhalten wir die Definition: ein Winkel ist eine Ebene, welche von zwei Geraden begrenzt wird, welche von einem Punkte ausgehen."

§ 34: „Da der Winkel von doppeltem Standpunkt aus angesehen werden kann, so mufs er auch immer von beiden Standpunkten aus angesehen werden: einmal als Richtungsunterschied, das andere Mal als Ebene."[3])

---

[1]) Hier geht nun der Verfasser auf das Wesen des Winkels ein, indem er davon ausgeht, die Abhängigkeit der Elemente kennen zu lernen — die meiner Ansicht nach schon aus der Definition zu erkennen sein müfste. An die Stelle der kürzesten Drehung setzt er diejenige entlang einer Geraden, was nicht ohne weiteres als identisch anschaulich klar ist. Allerdings stimmt diese Erzeugungsart mit der bekannten der Ebene ja überein.

[2]) Der zuerst gewählte Ausdruck, dafs der Winkel den Unterschied der Richtungen (Strahlen) darstelle, scheint uns treffender.

[3]) Warum wird auf § 27 nicht rekurriert, der von der Abhängigkeit der Elemente des Winkels handelt und damit dasjenige liefert, was

Unter der Überschrift „Gröfse“ wird der Winkel in Verbindung mit dem Kreis gebracht und genaue Untersuchungen angestellt (§ 39—59), unter der Überschrift „Form“ das Resultat gefunden, dafs gleiche Winkel ähnlich sind und umgekehrt. Schliefslich folgen unter „Lage“ die Anwendungen, die durch die Lehre von den Parallelen unterbrochen werden.

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 7: „Der Unterschied in der Richtung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen, heifst ein Linienwinkel oder schlechthin ein Winkel.“

p. 8: „Drehung ist Veränderung der Richtung. Die Gröfse eines Winkels wird also beschrieben durch diejenige Drehung, welche man mit dem einen Schenkel in der Ebene, worin der Winkel liegt, vornehmen mufs, um stetig in die Lage des andern Schenkels überzugehen.“[1])

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851.

p. 18: „Zu Euklids Definition des Winkels bemerkt der Verfasser: „Diese Erklärung scheint insofern nicht genau, inwiefern man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch eine Linie nur dann als geneigt gegen die andere ansieht, wenn sie mit ihr einen spitzen Winkel bildet.“ Euklid hebe aber durch den Zusatz „ohne in gerader Linie zu liegen“ die beschränkte Bedeutung auf.

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852. (Progr.)

p. 8: „So findet man in vielen Kompendien der Geometrie, welche im allgemeinen nichts davon wissen wollen, dafs man um von der Gröfse eines Winkels im allgemeinen eine Vorstellung zu

---

die Wurzel der Definition ist. Die beiden andern sogenannten Definitionen des § 32 sind m. E. nur erläuternde Zusätze, aber von keiner wesentlichen Bedeutung gegenüber den Untersuchungen des § 27.

[1]) Es ist nicht recht verständlich, was es heifsen soll, die Gröfse des Winkels werde durch Drehung beschrieben; es müfste dann doch heifsen gemessen.

gewinnen sich den Winkel überhaupt durch Drehung einer Linie um einen Punkt entstanden denken mufs, und beim Beweise der übrigen Sätze vom Winkel diese Vorstellung vermeiden, den Satz, dafs gestreckte Winkel einander gleich sind, dadurch nachgewiesen, dafs gesagt wird, es sei zur Entstehung des gestreckten Winkels eine ganz bestimmte Drehung erforderlich. Wie anderswo, liegt auch hier in dem, was oft als lästiger Notbehelf angesehen wird, das Wesen der Sache. Denn um von der Gröfse eines Winkels eine klare Vorstellung zu gewinnen, bedarf man notwendig der Vorstellung des Kreises, dessen Entstehung mit der des Winkels gleichzeitig und notwendig erfolgt, wenn man sich letztern durch Drehung eines beweglichen Schenkels um einen seiner Endpunkte entstanden denkt."[1])

„Sieht man sich demnach gezwungen, nicht nur zur bessern, sondern einzig möglichen Einsicht in die Natur des Winkels, dessen Entstehung durch Drehung zu Hülfe zu nehmen, so mufs auch in der ganzen Winkelgröfsenlehre dieses Prinzip durchgeführt werden."

p. 13: „Solche zwei Linien verschiedener Richtung, welche miteinander einen Punkt gemein haben, bilden einen Winkel." Es wird dann noch einmal ausführlich auf die Drehung eingegangen.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

p. 17: „Ein Winkel ist die Richtungsabweichung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen. ... Die un-

---

[1]) Wir können uns hier mit dem Verfasser, dessen sonstige Ausführungen unsern vollen Beifall haben, nicht einverstanden erklären. Nicht der Kreis, sondern Drehung ist das wesentliche Moment zur Definition des Winkels. Es geht das schon daraus hervor, dafs wir zur Erzeugung des Kreises eines begrenzten Schenkels benötigen, während doch der Winkel von der Länge der Schenkel völlig unabhängig ist. Wäre der Kreis — etwa wie die Gerade — ein völlig eindeutiges Gebilde, dann würde des Verfassers Bemerkung zutreffend sein. — Das Vergleichen von Winkeln mittelst entsprechender Bogen darf uns aber nicht verführen, die Vorstellungen von Kreis und Winkel in der vom Verfasser beliebten Weise zu identifizieren.

vollständig begrenzte Ebene zwischen den Schenkeln des Winkels heifst Winkelblatt."

Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. — Frankfurt a/M. 1853.

p. 35: „Das Drehungsstück, welches zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Richtungen zurückzulegen ist, wenn man von einer zur anderen kommen will, heifst Winkel.[1]) Je mehr zwischen zwei Richtungen gedreht werden mufs, desto gröfser ist der Winkel."

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

p. 9: „Es seien OA und OB zwei zusammenfallende gerade Linien, welche denselben Anfangspunkt O haben. Dreht man die eine derselben, etwa OB, in einer und derselben Ebene beliebig, so nimmt sie nach und nach andere Lagen an und fällt zuletzt wieder mit OA zusammen. Man sieht, dafs bei dieser Drehung die Richtung der Linie OB nach und nach immer mehr und mehr von der Richtung der Linie OA abweicht.

Die Abweichung der Richtungen zweier von demselben Punkte O auslaufender gerader Linien OA und OB heifst Winkel."

„Zwei von demselben Punkte ausgehende gerade Linien bilden immer zwei Winkel."

Snell, Lehrbuch der geradlinigen Planimetrie. — Leipzig 1857.

p. 19: „Denkt man sich zwei ungleichlaufende Linien nach der Zuneigungsseite verlängert, so entsteht durch ihr Zusammentreffen ein Raumgebilde,[2]) welches der Winkel heifst. An

---

[1]) Eine gute Erklärung, wenn man sich über den Ausdruck Drehungsstück klar ist; dies dürfte aber nicht allgemein vorausgesetzt werden dürfen.

[2]) Es geht weder aus dieser Erklärung selbst, noch aus den erläuternden Zusätzen, die sich mit den Bestandteilen des Winkels be-

dem Winkel unterscheidet man folgende Bestandteile: . . ., drittens den Unterschied in der Richtung beider Schenkel des Winkels; derselbe heifst die Öffnung des Winkels. Dieser letztere Bestandteil, der Richtungsunterschied beider Schenkel oder die Öffnung, ist der wesentlichste, da von ihm allein die Gröfse des Winkels abhängt. Man wird sich der Gröfse des Richtungsunterschiedes beider Schenkel oder der Gröfse der Öffnung des Winkels bewufst durch eine drehende Bewegung... Die Gröfse dieser drehenden Bewegung allein macht die Gröfse des Winkels aus."

Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1858.

p. 8: „Ebener Winkel heifst die Begrenzung der Ebene nach einem Punkte hin.[1]) Dieser Punkt heifst der Scheitel des Winkels. Die nach dem Punkte hin begrenzte Ebene heifst die Fläche des Winkels.

Da eine Ebene nur durch Linien begrenzt wird, bei einem ebenen Winkel aber der Punkt bezeichnet sein mufs, nach welchem die Ebene begrenzt ist, so gehören zu einem ebenen Winkel zwei sich schneidende Linien."

„Ein Winkel heifst geradlinig, wenn seine Schenkel gerade Linien sind, krummlinig, wenn . . ."

„Die Gröfse des Winkels hängt davon ab, wie viel von der Ebene nach dem Scheitel hin begrenzt sei."[2])

F. W. Becker, Lehrb. d. Elementargeometrie. — Oppenheim a. R. 1859.

p. 4: „Verlängert man zwei konvergierende Linien bis zu ihrem Durchschnitte, so heifst das bestimmte, aber unbegrenzte

---

schäftigen, hervor, ob Snell das Raumgebilde nur als Liniengebilde auffafst oder ob er das Ebenenstück dazu rechnet. Es scheint zuerst, als ob er der ersteren Ansicht zuneige; die Hereinziehung der Drehung aber, die die Ebene erzeugt, deutet doch wohl auf das zweite hin.

[1]) Eine eigenartige Erklärung, aus der ganz gewifs Niemand, der nicht schon eine anschauliche Vorstellung von dem Winkel hat, einen klaren Begriff bekommt.

[2]) Auch dieser Ausdruck entbehrt durchaus der Klarheit.

Stück der ebenen Fläche, welches sie einschliefsen, Winkel. Ein Winkel ist also das bestimmte, aber unbegrenzte Stück einer ebenen Fläche, welches von zwei sich schneidenden geraden Linien eingeschlossen wird."

„Denkt man sich den Schenkel *bc* des Winkels *abc* um den Scheitel *b* aufgehoben, so wird offenbar der Winkel wachsen, keineswegs aber ist dies der Fall, wenn die Schenkel des Winkels beliebig verlängert werden, ohne ihre Lage zu ändern. Es geht daraus hervor, dafs die Gröfse eines Winkels nur von dem Richtungsunterschiede der Schenkel, nicht aber von der Länge derselben abhängt."

Heidenreich, Die Elemente der niederen Geometrie. — Leipzig 1859.

p. 5: „Unter Winkel versteht man den Unterschied in der Richtung zweier Geraden."

„Ein Winkel entsteht, wenn man eine Gerade, um den einen ihrer Endpunkte drehend, in eine andere Richtung übergehen läfst. Die Gröfse des Winkels wird nicht durch die Länge der Schenkel, auch nicht durch den Raum zwischen den beiden Schenkeln bestimmt, sondern durch die Gröfse der Drehung, die nötig ist, um aus der Richtung des einen Schenkels in die des andern Schenkels zu gelangen."

„Will man für die Gröfse dieser Drehung, also für die Gröfse des Winkels, ein bestimmtes Mafs einführen, so bietet sich am einfachsten die ganze Umdrehung dar."

Franke, Die Elemente der ebn. Geometrie. — Hannover 1860.

p. 8: „Eine Gerade von bestimmter[1]) Länge drehe sich um einen ihrer Endpunkte. Jede neue Lage der sich drehenden Geraden wird eine gröfsere oder kleinere Ablenkung gegen die ursprüngliche Lage bezeichnen. Diese Ablenkung nennt man allgemein Winkel."

Der Kreis als Mafs des Winkels. Drehung.

---

[1]) Dies ist doch ganz unwesentlich; deshalb aber sogar zu verwerfen, weil es geeignet ist, eine höchst einschränkende Bestimmung in die Erklärung des Winkelbegriffes hineinzubringen.

Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie. — Sorau 1860 (Progr.).

p. 9: „Dreht man eine gerade Linie um einen in ihr befindlichen als fest angenommenen Punkt, der Einfachheit wegen z. B. einen Strahl um seinen Anfangspunkt stetig nach einer Seite hin bis in eine beliebige andere Richtung, so heifst die Gröfse der Drehung, durch welche der Strahl von seiner ursprünglichen Richtung in die neue gelangte, ein Winkel."

„Denkt man sich die ursprüngliche Richtung des Strahles durch einen zweiten Strahl vertreten, so kann man auch sagen: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehender Strahlen."

Giffhorn, Leitfaden der ebenen Geometrie etc. — Braunschweig 1862.

p. 12: „Dreht eine Linie von unbestimmter Länge sich um ihren festliegenden Anfangspunkt aus ihrer ursprünglichen Lage in irgend eine andere Lage, so nennt man den Richtungsunterschied der Linien Winkel ... Die Gröfse des Winkels hängt demnach nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Gröfse der Drehung ab."

Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863.

p. 13: „Die Abweichung der Richtungen zweier geraden Linien wird ein Winkel genannt."

„Von dem wahren Sinne des Wortes „Abweichung" bekommt man erst dann einen deutlichen Begriff, wenn man sich den Winkel als durch Drehung eines seiner Schenkel, während der andere als festliegend angenommen wird, entstanden denkt."

Dronke, Die Elemente der ebn. Geometrie. — M.-Gladbach 1864.

p. 1: „Ein Winkel ist eine ebene Figur, welche von zwei von einem Punkte ins Unendliche fortlaufenden Geraden begrenzt wird."

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

p. 2: „Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so nennt man die gröfsere oder geringere Abweichung in der Lage derselben von derjenigen Lage, in welcher die eine auf die andere fällt, einen ebenen, geradlinigen Winkel."

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864.

p. 19: „Zwei von demselben Punkte in verschiedener Richtung ausgehende von dem Punkte einseitig begrenzte Gerade bilden einen Winkel."

„Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden."

p. 22: „Man kann sich jeden beliebigen Winkel auch dadurch entstanden denken, als hätten in der einen Geraden anfangs zwei Gerade über einander gelegen, und als sei dann, während die eine unverändert liegen geblieben sei, die andere um den festen Punkt so lange gedreht worden, bis sie in die Lage der andern gekommen sei, nachdem sie alle dazwischen fallenden Lagen während der Drehung eingenommen habe."

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865.

p. 12: „Verlängern wir zwei gerade Linien verschiedener Richtung so lange, bis sie sich schneiden, so entsteht durch ihren Durchschnitt ein neues geometrisches Gebilde, der Winkel. Wir nennen nämlich den von diesen beiden geraden Linien dann begrenzten Teil der Ebene einen Winkel. Nehmen wir jedoch auf die Richtung der beiden Geraden Rücksicht, so ergiebt sich für dieses neue geometrische Gebilde folgende Definition:

Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier gerader Linien."

Es wird dann auch noch auf die „Gröfse der Drehung" eingegangen.

Sonnenburg, Ebene Geometrie. — Bremen 1868.

p. 11: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen."

Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868.

p. 6: „Zwei in einer Ebene befindliche Gerade, die nicht dieselbe Richtung haben, werden notwendig in einem Punkte zusammentreffen. Das Stück der Ebene, welches dann zwischen diesen beiden Geraden liegt, heifst ein Winkel. Aus der Gröfse des Winkels beurteilt man die Abweichung der Richtung der einen Geraden von der Richtung der andern. Der Winkel erscheint sonach als der Unterschied zwischen den Richtungen zweier in einem Punkte zusammenstofsenden oder von ihm auslaufenden geraden Linien."[1])

„Man kann sich die Entstehung des Winkels auch noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, aber das tiefere Eingehen in die Natur des Winkels sehr erleichtert.[2]) Man lasse eine Gerade sich um ihren unbeweglichen Anfangspunkt in einer Ebene drehen, so entsteht ein Winkel und giebt die Gröfse dieser stetigen Drehung an."

Adam, Lehrbuch der eb. u. körpl. Geometrie. — Berlin 1869.

p. 13: „Durch einen Punkt einer Ebene können unzählig viele gerade Linien gezogen werden, welche sämtlich verschiedene Richtung haben.

Der Teil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien liegt, heifst ein (geradliniger) Winkel."

Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869.

p. 13: „Ein Ausschnitt einer Ebene, der von zwei in einem Punkte O sich treffenden Geraden OA, OB gebildet wird, heifst ein ebener Winkel..."

Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869.

p. 3: „Die Linien haben verschiedene Richtung, dann

---

[1]) Nach dem Vorhergehenden ist das nicht richtig. Wenn man nach der Gröfse des Winkels die Abweichung beurteilt, so ist der Winkel das Mafs für den Unterschied, aber nicht der Unterschied selbst.

[2]) Dies Zugeständnis hätte dazu führen sollen, den hier berührten Punkt zum Ausgangspunkte der Erklärung des Winkelbegriffes zu machen.

schneiden sie sich entweder unmittelbar oder nach gehöriger Verlängerung und bilden einen oder mehrere Winkel."

„Der Winkel ist daher der Unterschied der Richtung zweier Linien."

F. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. (Progr.)

p. 9: „Zwei Strahlen, welche von einem Punkte auslaufen, bilden einen Winkel; die Gröfse eines Winkels hängt von dem Mafse der Drehung um den Scheitel ab, durch welche man, in einer und derselben Ebene bleibend und in einerlei Sinne fortschreitend aus der Lage des einen Schenkels in die des andern gelangt."

Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

p. 3: „Der Unterschied der Lage[1]) zweier Strahlen oder Halbstrahlen wird ein Winkel genannt."

„Ein Winkel entsteht, indem man einen Halbstrahl um den Mittelpunkt in einer Ebene dreht. Die Gröfse dieser Drehung wird ebenfalls Winkel genannt."

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — (6. Aufl.) Brandenburg a. d. H. 1870.

p. 17: „Wenn zwei nicht zusammenfallende gerade Linien AB und AC von einem Punkte A ausgehen, so sind sie offenbar rücksichtlich ihrer Lage verschieden und die Gröfse dieser Verschiedenheit der Lage, die Gröfse der Abweichung der beiden Linien von einander, wird durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt. Ein Winkel ist also nichts anderes als die Abweichung zweier von einem Punkte A ausgehender geraden Linien AB, AC von einander in Bezug auf ihre gegenseitige Lage."[2])

[1]) Lage wird nicht erklärt. — Strahl wird identisch mit Gerade gebraucht.

[2]) Wenn durch den Winkel die Verschiedenheit der Lage zweier Geraden bestimmt wird, so ist doch nicht der Winkel die Verschiedenheit. Die logische Konsequenz aus dem ersteren ist, dafs der Winkel

Zur Verdeutlichung wird dann noch auf die Drehung eingegangen.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1870.

p. 5: „Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, haben eine verschiedene Lage. Um die Gröfse dieser Verschiedenheit zu bestimmen, hat man sich vorzustellen, die eine dieser Linien drehe sich um den Punkt, von dem beide auslaufen, in einer und derselben Ebene und nach einerlei Richtung so lange um, bis sie mit der andern zusammenfällt. Die Gröfse der Umdrehung, die hierzu erforderlich ist, wird Winkel genannt. Der Winkel ist also eine Gröfse eigener Art,[1] durch welche die Verschiedenheit der Lage zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien bestimmt wird."

Winkelraum oder Winkelebene.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

p. 22:[2] „Zwei Geraden, welche sich durch Drehung ohne Verschiebung zur Deckung bringen lassen, heifsen geneigt."

„Die von zwei geneigten Geraden gebildete Figur heifst ein Linienkreuz."

„Die Lage zweier geneigten Geraden gegeneinander (die Gestalt eines Linienkreuzes) ist nur von der Grösse der Drehung abhängig, welche erforderlich ist um die beiden Geraden zur Deckung zu bringen."

„Die Veränderung einer Richtung ohne Veränderung des Ortes und ohne Veränderung der Ebene, in welcher die Richtung liegt, nennen wir eine einfache Drehung."[3]

---

das Mafs der Verschiedenheit ist. Wenn die Länge eines Gegenstandes durch einen Stock bestimmt wird, so ist der Stock weder die Länge noch der Gegenstand, sondern das Mafs für die Länge des Gegenstandes.

[1]) Eine Mafsgröfse, wenn ich mich dieses Ausdrucks bedienen darf.

[2]) Man vergleiche das Zitat aus Joh. Müller im zweiten Kapitel.

[3]) Das ist nicht klar ausgedrückt. Man weifs ja, was gemeint ist, aber die Worte „Veränderung der Richtung ohne Veränderung des Ortes" sind wenig glücklich gewählt.

Gröfse desselben hängt nicht von der Länge der beiden geraden Linien, sondern von ihrer gegenseitigen Abweichung (Auseinandersperrung) ab.

Ein geradliniger Winkel ist die Gröfse der Abweichung zweier in einem Punkte zusammentreffenden geraden Linien."

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

p. 35: „Ein von zwei Geraden mit ungleicher Richtung eingeschlossener Teil der Ebene heifst Ebenenwinkel."

„Um die Gröfse der Bewegung der Geraden bestimmen zu können, ist ein neuer Begriff erforderlich, da diese Bewegung nicht mehr eine Schiebung, sondern eine Drehung ist. Wir bezeichnen den Richtungsunterschied der beiden Geraden mit dem Namen „Winkel." — Wie die Lagenunterschiede durch die Strecke, so werden die Richtungsunterschiede durch den Winkel bestimmt. Derselbe hat nur die Eigenschaft der Gröfse."[1])

Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873.

p. 9: „Unter einem Winkel versteht man den Grad[2]) der Drehung einer geraden Linie um einen ihrer festen Punkte.

Da man sich die Drehung weiter oder weniger weit fortgesetzt denken kann, so kann man den Winkel vermehren und vermindern, woraus folgt, dafs der Winkel eine Gröfse ist. Zum Unterschied von den übrigen Gröfsen wird der Winkel eine Drehungsgröfse genannt."

„Die unendliche Fläche zwischen den Schenkeln wird Winkelraum genannt."

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Der Winkel ist die Verschiedenheit der Richtungen zweier geraden Linien, welche in einem Punkte zusammentreffen."

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen auf Seite 122.

[2]) Dieser Ausdruck stimmt dem Wesen nach mit dem von mir gewählten „Mafs der Drehung" völlig überein.

Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873.

p. 6: „Die Gröfse des Richtungsunterschiedes zweier in einer Ebene von einem Punkt ausgehender geraden Linien heifst Winkel; der Teil der Ebene, welcher zwischen diesen beiden bis ins Unendliche ausgedehnten Geraden liegt, Winkelraum, Winkelfläche, oder oft auch Winkel schlechthin."

„Wird eine halb begrenzte gerade Linie in einer Ebene um ihren Endpunkt gedreht, d. h. verändert sie stetig ihre Richtung, während der Endpunkt festliegt, so beschreibt sie einen Winkelraum, und der Winkel, welchen die gedrehte Linie mit ihrer anfänglichen Richtung bildet, ist das Mafs der Drehung."

Baltzer, Die Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874.

p. 5: „Eine Ebene wird von zwei auf ihr sich schneidenden Geraden in vier Felder geteilt, welche Winkel heifsen."

Die Eindeutigkeit der Winkel wird dann unter Zuhülfenahme der Drehung und der Richtung in den Geraden bestimmt.

p. 7: „Aus der Gröfse des von zwei Schenkeln eingeschlossenen Winkels beurteilt man die Abweichung der Richtung des einen Schenkels von der Richtung des anderen, sowie die scheinbare Länge einer in dem Winkel enthaltenen und durch die Schenkel begrenzten Linie, wenn diese vom Scheitel aus betrachtet wird."

In einer Anmerkung wird hinzugefügt: „Die Definitionen ‚Winkel ist die Neigung von zwei Linien gegeneinander" (Eukl. I) oder „der Unterschied ihrer Richtungen" oder „die Gröfse der Drehung, wodurch der eine in die Richtung der andern gebracht wird," machen den Winkel zu einer intensiven Gröfse, und stimmen nicht zu den üblichen Redeweisen[1]) z. B. ein Punkt liegt in oder aufser dem Winkel, eine Gerade

[1]) Dies ist kein Grund gegen eine Definition. Ist die Definition eines Begriffes sonst richtig, so müssen die damit nicht in Übereinstimmung stehenden Redensarten eben geändert werden. So ist z. B. von den hier genannten jedenfalls die zweite völlig zu verwerfen, da das Dreieck vorzugsweise als Figur (Liniengebilde), nicht als Feld zu betrachten ist.

schneidet von dem Winkel ein Dreieck ab, u. dergl. Als Ausschnitt der Ebene ist der Winkel von Bertrand (Développement nouveau de la partie élém. des Math. — Genève 1778 II p. 6) aufgefafst worden."

Helmes, Planiometrie. — Hannover 1874.

p. 14: „Der Unterschied der Richtungen zweier von einem Punkte ausgehender gerader Linien OA, OB, welcher Unterschied gebildet und gemessen wird durch die Gröfse der Drehung, die man in der Ebene der beiden geraden Linien mit der einen um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt beider vornehmen mufs, um sie in die Lage oder Richtung der anderen zu bringen, heifst der von den beiden geraden Linien gebildete Winkel."

„Winkelfläche ist der Teil der Ebene zwischen den Schenkeln."

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

p. 8: „Die Richtung einer Linie läfst sich stetig ändern durch Drehung um einen Punkt in ihr; am anschaulichsten verwendet man hierzu einen Strahl, d. h. eine (durch den Drehungspunkt) einseitig begrenzte Linie. Durch diese Drehung wird die Abweichung der veränderlichen Richtung gegen die ursprüngliche, der Richtungsunterschied, stetig vergröfsert. Dieser Richtungsunterschied, mefsbar gemacht, heifst Winkel."[1])

„Als Mafs des Winkels dient die ganze Drehung."[2])

Hub. Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

p. 2: „Zwei Gerade, welche sich schneiden, teilen die Ebene in vier Felder, welche Winkel genannt werden."

[1]) D. h. mit anderen Worten, der Winkel ist das Mafs des Richtungsunterschiedes.

[2]) Nicht als Mafs, sondern als Mafseinheit. Besser würde man ferner sprechen von einer „vollen Umdrehung". Die ganze Drehung ist unendlich. Vergleiche Seite 123.

„Ein Winkel wird als Maſs für den Richtungsunterschied seiner Schenkel betrachtet oder als Maſs für die Gröſse der Drehung, welche einer seiner Schenkel (Anfangsschenkel) machen muſs, um mit dem andern Schenkel (Endschenkel) zusammenzufallen."

Diesen Sätzen stehen die analogen über die Strecke dual[1]) gegenüber: „Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird."

„Eine Strecke wird als Maſs für den Abstand ihrer Endpunkte betrachtet oder als Maſs für den geradlinigen Weg, welchen der eine Punkt (Anfangspunkt) zurücklegen muſs, um mit dem anderen (Endpunkte im engeren Sinne) zusammenzufallen."

Schlömilch, Geometrie des Maſses. — Leipzig 1874.

p. 11: „Sind zwei Geraden von verschiedener Richtung soweit verlängert, daſs sie in einem Punkte zusammentreffen, so entsteht an diesem Punkte ein neues geometrisches Gebild: der Winkel. Dieser zeigt an, um vieviel die Richtungen der Geraden voneinander abweichen; ein Winkel bestimmt also den Unterschied zwischen den Richtungen zweier Geraden, welche in einem Punkte zusammentreffen oder von letzterem ausgehen."

p. 12: „Man kann sich die Entstehung des Winkels noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, aber die Einsicht in die Natur des Winkels sehr erleichtert.[2]) Lassen wir nämlich eine Gerade sich um ihren Anfangspunkt drehen, bis sie in eine zweite Lage gelangt ist, so entsteht ebenfalls ein Winkel; man kann daher sagen: der Winkel ist bestimmt durch

---

[1]) Daſs das fruchtbare Prinzip des Dualismus schon im Anfangsunterricht mit Erfolg verwertet werden kann, ist auch meine Ansicht. Gerade bei Strecke und Winkel erweist es sich als für die Definition äuſserst vorteilhaft. Man vergleiche meine entsprechenden Ausführungen Seite 121 f.

[2]) Worin überhaupt die Natur des Winkel begründet liegt.

die Gröfse der Drehung,[1]) welche erfordert wird, um die Gerade in die zweite Lage zu bringen."

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

p. 9: „Die Abweichungsgröfse zweier Strahlen heifst ihr Winkel."

Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874.

p. 10: „Jede aus zwei geraden Teilen bestehende Linie heifst ein Winkel."[2])

p. 39: „Jedes durch einen Winkel begrenzte Stück einer übrigens unbegrenzten Ebene heifst ein Winkelfeld oder auch schlechthin ein Winkel."

Hablützel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 8: „Ein Winkel wird beschrieben, wenn ein Abschnitt einer zweiteiligen Geraden in einer Ebene sich um ihren (unveränderlichen) Schnittpunkt so weit stetig dreht, dafs jener dem andern Abschnitte sich mehr oder weniger nähert, ohne mit diesem zu koinzidieren, während jeder andere Punkt der konstruktiven (sich bewegenden) Strecke einen Bogen durchläuft, welcher die Gröfse der Drehung in sich schliefst, — mithin ist die Gröfse eines Winkels durchaus unabhängig von der Länge seiner Radialen, abhängig dagegen von der Richtung, welche dieselben haben."[3])

Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875.

p. 6: „Wenn zwei Gerade in einem Punkte zusammentreffen, so heifst die Gröfse der Drehung der einen Geraden

[1]) Und umgekehrt; d. h. im Winkel wird die Gröfse der Drehung veranschaulicht, er ist das Mafs für die Drehung.

[2]) Man vergleiche: Worpitzky, Über die Grundbegriffe der Geometrie; Grunerts Archiv, Bd. 55, p. 405 f.

[3]) Eine etwas gewundene Erklärung, die aber im wesentlichen das Richtige trifft, da sie den richtigen Ausgangspunkt nimmt.

um den gemeinsamen Endpunkt und in der Ebene beider Geraden, durch welche sie in die Lage der anderen Geraden gelangt, ein Winkel beider Geraden." (Nach v. Münchow.)

Drehungssinn.

Kröger, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1876.

p. 4: „Zwei ungleich laufende Gerade, die von einem Punkte ausgehen, haben verschiedene Richtung. Wenn man die Gröſse dieser Verschiedenheit beurteilen will, so denke man sich, die eine der Geraden drehe sich um den Schnittpunkt so weit, bis sie die andere deckt. Die Gröſse einer solchen Drehung heiſst Winkel."

Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876.

p. 4: „Winkel ist der Teil der unendlichen Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen liegt."

Zmurko-Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876.

p. 19: „Die Gröſse der Abweichung einer Geraden von der Richtung einer anderen Geraden heiſst Winkel."[1])

Es schlieſsen sich Betrachtungen über den Zusammenhang mit der Drehung an.

J. K. Becker, Lehrbuch d. Elem.-Geom. — Berlin 1877.

p. 14: „Das Gebilde aus zwei in einem gemeinschaftlichen Endpunkte O zusammentreffenden Strecken OA, OB heiſst ein Winkel; ... vielmehr betrachtet man den Winkel als unverändert, wenn man die Schenkel beliebig verlängert. Es kann mithin als das zu Vergleichende nur noch der Unterschied in der Stellung der Schenkel, d. h. die Gröſse der Drehung übrig bleiben, durch welche der eine Schenkel in die Lage des andern gebracht werden kann."

---

[1]) Das unbegrenzte Winkelblatt wird hier Sektor genannt und auch wohl Sektor mit Winkel identifiziert. „Der Sektor DAC stellt den von den Geraden AC und AD eingeschlossenen Winkel vor."

Besprechung des doppelten Drehungssinnes.

„Den Teil der Ebene, durch welchen man sich den einen Schenkel bewegt denkt, damit er in die Lage des anderen kommt, bezeichnet man als die Winkelfläche. Die Gröfse der dazu erforderlichen Drehung betrachtet man als die Gröfse des Winkels."

J. K. Becker,[1]) Die Elemente d. Geom. auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

p. 16: „Treffen zwei gerade Strecken oder 2 Halbgerade in einem Punkte zusammen, so sagt man, sie bilden einen Winkel ... Ursprünglich ist wohl unter einem Winkel, wie schon daraus hervorgeht, dafs man von seinem Scheitel und seinen Schenkeln spricht, nichts anderes verstanden worden, als die Figur, welche er darstellt."

Die Veränderung der Länge der Schenkel hat keinen Einflufs auf die Gröfse des Winkels. „Da aber durch diese Veränderung der Schenkel die Figur eine andere wird, bleibt als Inhalt des Begriffes Winkel nur noch eine von der Länge der Schenkel unabhängige Eigenschaft dieser Figur übrig."

p. 34: „Da man bei der Vergleichung der Winkel von der Länge ihrer Schenkel abstrahiert, so bleibt als unterscheidendes Merkmal derselben nur noch die Gröfse der Drehung übrig, die der eine Schenkel in der Ebene um den Scheitel als Mittelpunkt ausführen mufs, um in die Lage des anderen zu gelangen. Denn nur mit der Gröfse dieser Drehung ändert sich die Figur des Winkels, wenn die Länge der Schenkel aufser Betracht bleibt. Denken wir uns einen Winkel dadurch entstanden, dafs wir uns die beiden Schenkel ursprünglich in eine Gerade zusammenfallend vorstellen und dann den einen um den Scheitel so in Drehung versetzt, dafs er immer in derselben Ebene bleibt, so können wir, was wir an dem Winkel noch betrachten, auch als den Drehungsabstand zwischen den beiden Schenkeln bezeichnen, und dies macht auch den ganzen Inhalt dessen aus, was wir unter einem Winkel verstehen, wenn wir ihn als selbständige Figur d. h. unabhängig

---

[1]) Auf dieses Zitat möchte ich ganz besonders aufmerksam machen.

von dem Teil der Ebene, zu dessen Begrenzung er gehört, betrachten."

Es folgen dann noch Betrachtungen über ganze und halbe Umdrehung.

Behl, Die Darstellung der Planimetrie. — Hildesheim 1877.

p. 8: „Wenn von einem Punkte zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen hin ausgehen, oder wenn sich zwei gerade Linien in einem Punkte treffen, so entsteht ein Winkel."

„Der Raum zwischen den Schenkeln heifst der Winkelraum und die Entfernung der beiden Schenkel nennt man die Schenkelweite oder die Neigung der Schenkel. Die Gröfse eines Winkels wird bedingt durch die Neigung der Schenkel zu einander, und zwar ist ein Winkel um so gröfser, je weiter die Schenkel voneinander entfernt[1]) sind und umgekehrt; von der Länge der Schenkel ist die Gröfse des Winkels unabhängig."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik I. Köln u. Neufs 1877.

p. 6: „Haben zwei Gerade einen Punkt gemeinsam, so haben sie verschiedene Richtung; haben beide Geraden verschiedene Richtung, so sind sie ungleich laufend, schneiden sich verlängert in einem Punkte und bilden an dem Durchschnittspunkt durch ihr Zusammentreffen einen Winkel."

p. 11: „Ein Winkel entsteht dadurch, dafs zwei gerade Linien von einem Punkte nach verschiedener Richtung auslaufen. Die Gröfse des Richtungsunterschiedes hierbei ist es, was man Winkel nennt.

Unter Winkel versteht man daher die Gröfse der Drehung, welche die eine von zwei von einem Punkte ausgehenden Geraden um den gemeinsamen Punkt hätte machen müssen, um aus der Lage der anderen in ihre Lage zu gelangen."

Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877.

[1]) Ein höchst unklarer Ausdruck.

p. 10: „Alle möglichen Beziehungen zweier sich schneidenden Geraden zu einander werden erhalten, wenn sich eine Gerade um einen ihrer Punkte dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Bei dieser Drehung verändert sie beständig ihre Richtung, welche Richtungsänderung von der Gröfse der Drehung abhängt."

„Der Richtungsunterschied wird Winkel genannt."

Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

p. 20: Winkel und Richtungsabweichung werden einfach identifiziert; Verfasser braucht immer das zweite Wort.

Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877.

p. 3: „Die Abweichung einer Richtung von einer andern nennt man den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen."

p. 4: „Die Gröfse eines Winkels wird abhängig sein von der Abweichung der beiden Schenkel."

p. 5: „Wir können den Winkel auch noch in anderer Weise erklären: Denken wir eine beliebige Gerade um einen ihrer Endpunkte gedreht, so wird sie nach und nach immer verschiedene Richtungen annehmen, und in jeder neuen Lage wird sie mit ihrer ersten Lage einen bestimmten Winkel bilden, und zwar wird dieser Winkel um so gröfser sein, je weiter die Gerade aus ihrer ursprünglichen Richtung herausgedreht ist. Der Winkel ist also hiernach das Mafs für die Gröfse der Drehung . . ."

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1877/78. (Progr.)

p. 15:[1]) „Jeder von den beiden Ausschnitten, in welche eine Ebene durch zwei von demselben Punkte auslaufende

---

[1]) Im Vorwort sagt der Verfasser: „Da ich Euklids Definition des Winkels für unfruchtbar halte, so habe ich mich der Definition Bertrands angeschlossen, wodurch mit Hülfe der modifizierten Fassung des 9. Axioms das 11. Axiom Euklids (oder ein Aquivalent desselben) als Axiom entbehrlich, als Theorem streng beweisbar wird."

Strahlen geteilt wird, heifst ebener Winkel oder Linien-Winkel."

„Der Winkel ist das Mafs für die Divergenz seiner Schenkel."

Focke und Krafs, Lehrbuch der Geometrie. — Münster 1878.

p. 2: „Schneiden sich zwei gerade Linien in einem Punkte A, so mufs die eine, um in die Lage der anderen zu kommen, eine bestimmte Drehung machen. Die Gröfse dieser Drehung heifst Winkel."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 275: „Was die Richtung anbelangt, so können zwei Richtungen, wie zwei Qualitäten überhaupt, nicht absolut mit einander verglichen werden, sondern nur dadurch, dafs sie auf eine dritte bezogen und das Mafs ihrer Unterschiede von dieser dritten verglichen wird."[1])

„Der einfachste Fall zweier zu vergleichenden Richtungen findet statt, wenn zwei Richtungen denselben Ausgangspunkt haben. In diesem Falle kann man die, einer von diesen Richtungen kontradiktorisch entgegengesetzte, als die dritte feste Richtung annehmen, von welcher aus die Richtungsunterschiede zu messen sind.[2]) Ein Gebilde, dessen Elemente einen gemeinsamen Punkt haben, wobei aber die Ausdehnungen unbestimmt bleiben, gleichgültig für die jeweilige Betrachtung, nennt man Winkel."[3])

Unverzagt,[4]) Der Winkel etc. — Wiesbaden 1878.

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen auf Seite 107.

[2]) Wozu dieser Umweg, der idem per idem zu erklären Veranlassung giebt.

[3]) So sehr ich sonst in vielen Beziehungen mit dem Verfasser übereinstimme, bei dieser Definition scheint er mir in Künstelei verfallen zu sein und darüber das eigentliche Wesen des zu erklärenden Begriffs übersehen zu haben.

[4]) Auf dieses Zitat möchte ich besonders hinweisen.

p. 11: „Die Definition eines Winkels kann verschieden gegeben werden. Es kann dieser zweite Konstruktionsbegriff geometrischer Betrachtung — die Strecke als ersten angenommen — aufgefafst werden als das Lagengebilde zweier Strahlen, die von einem Punkte aus gezogen sind, oder als ein Ausschnitt aus einer Ebene. Wie man aber die Strecke als Stellendifferenz ihrer Endpunkte behandeln darf, so kann man den Winkel als die Richtungsdifferenz seiner Schenkel definieren. Wir werden ihn im folgenden vorwiegend als die Gröfse der Drehung auffassen, die sein einer Schenkel beschreiben mufs, bis er mit dem andern zusammenfällt. Dafs dabei zugleich die kürzeste Drehung gemeint ist, und nicht etwa eine konische, mag noch hinzugesetzt werden."

Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1879.

p. 4: „Ein Winkel entsteht, wenn zwei gerade Linien von demselben Punkte ausgehen."

„Ein Winkel ist der ebene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum zwischen zwei beliebig langen geraden Linien, welche von demselben Punkte ausgehen. Er giebt die Gröfse der Abweichung an, welche zwischen den Richtungen der beiden Geraden stattfindet."

Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879. (Progr. 125.)

p. 12: „Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, welcher von zwei Strahlen begrenzt wird, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben."[1])

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879.

p. 6: „Den Richtungsunterschied zweier Strahlen mit gemeinschaftlichem Strahlenpunkte nennt man einen Winkel."

---

[1]) Einer solchen Definition in einer ausdrücklich als genetisch bezeichneten Planimetrie zu begegnen, ist eigentlich wunderbar.

„Ein Winkel kann dadurch entstanden gedacht werden, dafs ein Strahl um seinen Strahlenpunkt gedreht wird."

„Der leichteren Vorstellung halber erklärt man auch den Winkel als die von den Schenkeln teilweise begrenzte Ebene."

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879.

p. 5: „Ein Winkel ist ein Teil einer unbegrenzten Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehenden Geraden unvollständig begrenzt wird."

„Ein Winkel kann entweder gedacht werden, indem man sich vorstellt, der eine von den beiden Schenkeln sei festliegend und der andere werde von jenem aus durch Drehung um den Scheitelpunkt in seine Lage übergeführt. Je weiter diese Drehung fortgesetzt werden mufs, desto gröfser ist der Winkel. Es hängt daher die Gröfse eines Winkels nicht von der Länge der Schenkel, sondern von dem Mafse der Drehung oder von der Entfernung der beiden Schenkel ab."

Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879.

p. 23: „Wenn ein Punkt auf einer Geraden seine Lage ändert, so wird die Gröfse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen. — Wenn dagegen eine Gerade in einer Ebene sich bewegt, so kann die Gröfse der Bewegung nicht durch die Gröfse des Flächenstückes bestimmt werden, welches von der Geraden beschrieben wird. Denn dieses Flächenstück ist, wie die Gerade selbst, von unbestimmter (unendlicher) Gröfse.[1]) — Während aber die Gröfse der Verschiebung einer Geraden wenigstens durch die von einem ihrer Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht oder gemessen werden kann, findet für die Gröfse der Drehung einer Geraden nichts ähnliches statt. In ihrer

---

[1]) Meines Erachtens macht das für die Vorstellbarkeit nichts aus. Es hätte also wohl gesagt werden können, dafs die Gröfse der Bewegung in dem Flächenstück (besser: Ebenenstück) veranschaulicht wird — allerdings nur insofern als man auf die begrenzenden Schenkel seine Aufmerksamkeit richtet, nicht auf die wirkliche Gröfse des Stückes: vielleicht könnte man von der Breite des Ebenenstückes sprechen.

Beurteilung mufs das Auge sich ebenso üben, wie in derjenigen der Bewegungsgröfse eines Punktes, wenn nur Anfangs- und Endstellung desselben, nicht aber die verbindende Gerade gegeben ist.“[1])

„Die Drehungsgröfse zwischen zwei Geraden heifst ihr Winkel.“[2])

(„Anm. Ein Schenkel des Winkels beschreibt bei einer Drehung einen Teil der Ebene.“)

„Ebenso hat der Winkel (wie die Strecke) eine doppelte Bedeutung. Er ist erstens das Mafs für die Drehung einer Strecke in einer Ebene, zweitens, insofern man darunter das von den Schenkeln eingeschlossene Ebenenstück versteht, ein Teil der Ebene selbst.“[3])

Schweder, Lehrbuch der Planimetrie. — Riga 1879.

p. 5: „Gehen von einem Punkte zwei verschiedene Gerade aus, so haben sie verschiedene Richtung und bilden einen Winkel. Ein Winkel ist die Abweichung der Richtungen zweier Geraden von einander.“

„Die Gröfse des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig, und es kommt dabei nur auf die Verschiedenheit der Richtungen an. Von dieser erhält man am besten eine deutliche Vorstellung, wenn man sich den Winkel durch Drehung entstanden denkt.“

Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 10: „Ein zwischen zwei Halbstrahlen eines Punktes befindlicher (unvollständig begrenzter) Teil der Ebene heifst ein Winkel ... Der Winkel giebt die Neigung oder den Richtungsunterschied der beiden Halbstrahlen an.“

---

[1]) Was doch nicht schwer ist.

[2]) Warum weicht der Verfasser von der dualen Gegenüberstellung mit der Strecke ab? Dann wäre wohl das Resultat gewonnen worden: Die Drehungsgröfse wird gemessen etc. Man beachte die weiteren Auseinandersetzungen.

[3]) Ich glaube jetzt in meinen Ausführungen auf Seite 121 f. das wahre Verhältnis zwischen diesen beiden Bedeutungen klargelegt zu haben, indem ich die Vergleichung mit der Strecke konsequent durchführte.

„Ein Winkel kann aufgefaſst werden als durch Drehung eines Halbstrahles entstanden."

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.

p. 8: „Die unbegrenzte Ebene wird durch eine Gerade in zwei halbbegrenzte Ebenen (Halbebenen) geteilt; zwei parallele Gerade begrenzen einen Streifen (ein Band), zwei sich schneidende Gerade teilen die unbegrenzte Ebene in vier Winkel.

Ein ebener Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei Strahlen begrenzt wird."

„Dreht sich ein Strahl um seinen Anfangspunkt, so beschreibt er einen Winkel; man kann sich jeden Winkel durch Drehung eines Strahles entstanden denken."

„Man betrachtet daher den Winkel als ein Maſs des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen."

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 1: „Das Maſs für den Richtungsunterschied zweier Geraden heiſst Winkel."

„Ein Winkel entsteht auch, wenn eine Gerade sich um einen ihrer Punkte dreht; daher ist der Winkel das Maſs für die Drehung einer Geraden."

Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881.

p. 9: „Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so sagt man, daſs sie eine ganze Umdrehung gemacht hat; dreht sie sich nicht um so viel, so bestimmt man ihre Lage dadurch, daſs man angiebt, einen wie groſsen Teil der ganzen Umdrehung sie zurückgelegt hat. Man sagt, daſs die Linie einen gewissen Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage bildet, und der Winkel zwischen zwei Geraden ist also der Teil einer ganzen Umdrehung, den die eine Gerade zurücklegen muſs, um die andere zu decken."

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

p. 1: „Durch zwei auf einer Ebene sich schneidende Gerade entstehen vier Felder, welche Winkel heifsen.“

Féaux, Lehrbuch der elem. Planimetrie. — Paderborn 1882.

p. 10: „Die gegenseitige Lage zweier Linien führt zu der Vorstellung des Winkels. Unter Winkel versteht man nämlich den Unterschied der Richtung zweier Geraden.“

Es wird dann die Drehung erwähnt und es ist auch von einem Mafs der Drehung die Rede, das durch die Gröfse des Kreisbogens gegeben sei.

Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882.

p. 3: „Zwei in demselben Punkte einseitig begrenzte Gerade einer Ebene teilen die Ebene in zwei Felder, welche Winkel genannt werden.“

„Die Abweichung der Richtungen zweier sich schneidenden Geraden wird durch den Winkel gemessen, den die Geraden einschliefsen; je gröfser dieser Winkel ist, umsomehr sind die Richtungen verschieden.“

Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

p. 7: „Zwei Gerade teilen die Ebene in vier Teile, welche man Winkelräume oder kurz Winkel nennt; da jede Gerade eine Richtung bezeichnet, so ist ein Winkel der Richtungsunterschied zweier Geraden.“

Löser, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Weinheim 1882.

p. 11: „Zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, teilen die Ebene, in welcher sie liegen, in zwei Teile. Jeder dieser Teile heifst ein Winkel.“

„Man erhält eine Vorstellung von der Gröfse eines Winkels, wenn man sich einen der beiden Schenkel in der Ebene, worin er liegt, um den Scheitelpunkt dreht oder stetig gedreht

denkt, bis er mit dem andern zusammenfällt; je gröfser die Drehung, desto gröfser ist der Winkel und umgekehrt."

J. K. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. — Berlin 1883.

p. 56: „..., so kann der Winkel und der Drehungsabstand zwischen seinen Schenkeln, damit zugleich der Kreis und dessen Benutzung zur Messung der Winkel angenommen werden."

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 14: „Wenn die eine von den beiden sich schneidenden Geraden, durch welche die Ebene bestimmt ist, sich um einen ihrer Punkte dreht, so wird die Richtungsverschiedenheit zweier von dem festen Drehpunkte ausgehenden Richtungen durch entsprechende Drehung des Auges etc. wahrgenommen."

„Winkel heifst die Richtungs-Verschiedenheit zweier von einem Punkte ausgehenden Richtungen."

„Der Winkel ist eine Drehungsgröfse."

Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884.

p. 10: „Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so wird die Gröfse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke gemessen. ... Dreht sich eine Gerade um einen in ihr liegenden Punkt, so kann diese Drehung mit den bisher bekannten Bestimmungsstücken nicht gemessen werden, es mufs deshalb eine neue Gröfse eingeführt werden, welche bestimmt ist, Drehungen zu messen."

„Unter einem Winkel versteht man das Mafs der Drehung zwischen zwei Geraden."[1])

---

[1]) Völlig unsere Ansicht. Auch Hoch kommt zu diesem Resultat, indem er von den Betrachtungen bei der Strecke ausgeht und sie analog auf den Winkel überträgt. Ich benutze diese Gelegenheit, um noch darauf hinzuweisen, wie bei dieser Betrachtungsweise Strecke und Winkel zwar völlig analoge Resultate geben, aber doch insofern gegenüberstehen, als die eine ein Gebilde erster Stufe, der andere ein solches zweiter Stufe darstellt. Sie sind zugleich die beiden einzigen Elemente der geradlinigen Figuren, sodafs sie, wenn man nur noch den Kreis hinzunimmt, das gesamte Material der Planimetrie darbieten.

„Denkt man sich die beiden Schenkel eines Winkels durch Fortbewegung eines Punktes entstanden (und zwar ist der Scheitelpunkt dann immer der Anfangspunkt), so giebt ein Winkel auch den Unterschied der Richtung an, welcher zwischen den Bewegungen eines Punktes längs der Schenkel stattfindet."

Kambly, Die Elementar-Mathematik. — Breslau 1884.

p. 5: Wenn man aus einem Punkte zwei gerade Linien (nach verschiedenen Richtungen) zieht, so entsteht ein geradliniger Winkel.

Ein geradliniger Winkel ist also der Richtungsunterschied (die Abweichung) zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien."

„Dreht man den einen Schenkel um den Scheitel, bis er in die Richtung des anderen Schenkels fällt, so giebt diese Drehung die Gröfse der Abweichung der beiden Schenkel an."

Gaufs, Die Hauptsätze etc. I. — Bunzlau 1885.

p. 81: „Jede der beiden Teile, in welche die Ebene durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen zerlegt wird, heifst ein Winkel."

Koppe, Planimetrie. — Essen 1885.

p. 5: „Wenn man in einer unbegrenzten Ebene von einem beliebigen Punkte aus zwei Linien zieht und sich dieselben unbegrenzt fortlaufend denkt, so schneiden diese beide Linien von der unbegrenzten Ebene ein Stück aus, welches sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt, nach zwei Seiten aber durch die Linien begrenzt wird. Man nennt dasselbe einen Winkel."

„Ein Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt."

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 11: „Beschränkt man die Betrachtung auf zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen, so ist deutlich, dafs man den

einen derselben um ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt drehen kann, bis er in die Lange des anderen kommt. Die Gröfse dieser Drehung heifst der Winkel, den die beiden Strahlen mit einander bilden."

„Der zwischen den Schenkeln eines Winkels enthaltene unbegrenzte Ausschnitt der Ebene heifst Winkelebene."

Stegmann, Die Grundlehren d. eb. Geometrie. — Kempten 1886.

p. 8: „Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so heifst die Gröfse der Drehung um den gemeinsamen Endpunkt, durch welche der eine Strahl in die Lage des anderen übergeführt wird, Winkel."

„Der Winkel giebt den Richtungsunterschied zweier Strahlen an."

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. II. — Leipzig 1887.

p. 10: „Zwei Strahlen AB und AC, welche von demselben Punkte A nach verschiedenen Richtungen auslaufen, bilden einen Winkel."

„Der Winkel mifst den Richtungsunterschied zwischen seinen beiden Schenkeln."

Lieber und von Lühmann, Planimetrie. — Berlin 1887.

p. 4: „Ein Winkel entsteht, wenn man von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen hin gerade Linien zieht."

„Durch einen Winkel wird der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden gemessen, d. h. er giebt an, um wie viel eine Gerade der Richtung nach von der anderen abweicht."

Rausenberger, Die Elementargeometrie. — Leipzig 1887.

p. 29: „Wir nennen nun ein aus zwei von einem Punkte ausgehenden Halbgeraden zusammengesetztes Gebilde, insofern

es durch eine Drehung bestimmter Art[1]) erzeugt ist, einen Winkel.“

Es wird dann vom Vergleichen und Messen der Winkel gesprochen und auf die Analogie mit den Strecken hingewiesen.

p. 30: „Bemerkt zu werden verdient, daſs alle Winkelmessungen erst nach Einführung der Ebene einen Sinn haben, wenn auch das Winkelgebilde selbst von der Ebene unabhängig erscheint;[2]) denn das Addieren zweier Winkel durch Auseinanderlegen hat nur dann einen präzisen Sinn, wenn dabei die Winkel in dieselbe Ebene gebracht werden.“[3])

Naturgemäſse Einheiten des Messens.

Seeger, Die Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.

p. 8: „Zwei von einem Punkte auslaufende gerade Linien bilden einen Winkel.“

„Einen Winkel kann man sich immer dadurch entstanden denken, daſs ein ursprünglich mit dem einen Schenkel zusammenfallender Halbstrahl sich um den Scheitelpunkt so lange gedreht hat, bis er in die Lage des anderen Schenkels gelangt ist, und nach der Gröſse der hierzu erforderlichen Drehung hat man die Gröſse des Winkels zu beurteilen.“

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie. — Braunschweig 1887. (Prog. 638.)

p. 30: „Zwei Halbstrahlen, welche in ihren Grenzpunkten zusammenstoſsen, sollen in ihrer Vereinigung Winkelstrahl genannt werden.“

p. 32: „Da ein Winkelstrahl stets eine Ebene bestimmt, so liegt es nahe, den Teil der Ebene, welcher durch den Win-

---

[1]) Nämlich die kürzeste Drehung.

[2]) Dann müſsten Streckenmessungen erst nach Einführung der Geraden Sinn haben und andererseits die Strecke von der Geraden unabhängig erscheinen. Es scheint doch, als ob der Zusammenhang zwischen Winkel und Ebene nicht genügend klar erfaſst sei.

[3]) So, wie die Strecken in dieselbe Gerade gelegt werden müssen, wenn wir sie addieren wollen. — Die Addition muſs allerdings derartige Voraussetzungen machen, aber nicht die Vergleichung überhaupt.

kelstrahl begrenzt wird, in gewisser Weise auszuzeichnen: wir nennen denselben einen Winkel."

„Entstehung des Winkels durch Drehung eines Schenkels."

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

p. 11: „Nach der Definition der Ebene folgt bei Euklid die des Winkels: 'Ein geradliniger Winkel ist die Neigung zweier Geraden, die in einer Ebene in einem Punkte zusammentreffen.' Da der Winkel um so kleiner ist, je gröfser die Neigung, so würde der Begriff Neigung durch einen anderen z. B. Abweichung, welche mit dem Winkel ab- und zunimmt, zu ersetzen sein. Mit dieser Erklärung ist jedoch der Sprachgebrauch nicht allenthalben im Einklang. Man sagt z. B. ein Punkt liegt in einem Winkel, zwei Winkel lassen sich zur Deckung bringen, vier rechte Winkel erfüllen die Ebene und meint damit etwas Anderes als eine blofse Abweichung zweier Geraden.[1]) Der Ausdruck Winkel hat offenbar eine doppelte Bedeutung, zuerst die einer Raumgröfse, eines Ausschnittes aus der Ebene, der durch zwei in einem Punkte zusammentreffende Gerade gebildet wird und zweitens die in einer Lagenbeziehung zwischen denselben Geraden, von denen jede durch eine gewisse Drehung mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Gröfse dieser Abweichung oder Drehung, durch welche sie zum Zusammenfallen gebracht werden können, wird ebenfalls Winkel genannt. Die Definition des Winkels als Unterschied zweier Richtungen ist eine unklare Bezeichnung für dieselbe Beziehung."[2])

Feld und Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Wiesbaden 1888.

p. 1: „Ein Winkel ist die Richtungsverschiedenheit[3]) zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden."

---

[1]) Man vergleiche das Zitat aus Baltzers Elementen.

[2]) Diese letzte Bemerkung ist sehr treffend.

[3]) Dafs damit d. h. statt Unterschied Verschiedenheit zu setzen, nicht viel oder nichts gewonnen ist, habe ich gezeigt.

Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888.

p. 5: „Gehen zwei Gerade (Strahlen) von einem gemeinschaftlichen Punkte aus, so heifst die Gröfse der Drehung um diesen Punkt, welche die eine Gerade machen mufs, um in die Lage der anderen zu gelangen, der Winkel dieser Geraden. Derselbe giebt die Neigung der beiden Strahlen zu einander oder, mit anderen Worten, den Unterschied ihrer Richtungen an."

Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888.

p. 3: „Dreht man eine nach einer Seite hin unbegrenzte gerade Linie um einen festen Punkt so in einer Ebene, dafs sie aus einer Richtung in eine andere gelangt, so nennt man die Gröfse der dabei vollbrachten Drehung Winkel."

„Die Gröfse eines Winkels ist unabhängig von der Länge seiner Schenkel, aber abhängig von dem Richtungsunterschiede derselben. Den Richtungsunterschied zweier Schenkel nennt man auch ihre Neigung zu einander. Ein Winkel ist daher auch das Mafs für die Neigung zweier Geraden zu einander."

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888.

p. 12: „Denkt man sich von zwei zusammenfallenden und sich in ihren Anfangspunkten deckenden Strahlen den einen um diesen Punkt stets in gleichem Sinne und in einerlei Ebene in irgend eine andere Lage gedreht, so nennt man die Gröfse der jedesmaligen Drehung den von den beiden Strahlen gebildeten Winkel."

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

p. 10: „Nimmt man einen von zwei im Punkte O sich schneidenden Strahlen OA als festliegend an, so kann der zweite Strahl OB durch Drehung um den gemeinsamen Endpunkt O mit OA zur Deckung gebracht werden. Der hierbei von dem Strahl zurückgelegte Weg heifst Winkel."[1])

---

[1]) Man vergleiche, um sich Klarheit zu verschaffen, die betreffenden Betrachtungen bei zwei gegebenen Punkten. Man würde wohl auch

„Die Gröfse eines Winkels hängt von der Gröfse der Drehung, nicht aber von der Länge der Schenkel ab.“

„Die Schenkel eines Winkels bestimmen zwei verschiedene Richtungen; daher kann der Winkel als ein Mafs des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen angesehen werden.“

Koch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ravensburg 1889.

p. 9: „Durch zwei Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, wird ein Stück der Ebene abgegrenzt: der Winkel.“

„Dreht sich ein Strahl um seinen Anfangspunkt von einer ersten zu einer zweiten Lage, so durchläuft er einen Winkel.“

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889 (Progr. 68).

p. 15: „Ein Winkel ist ein von zwei Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, begrenzter Teil der unendlichen Ebene.“

„Die Gröfse hängt nur davon ab, wie weit sich der zweite Schenkel vom ersten bei der Drehung um den gemeinsamen Punkt entfernt hat.“

Schram und Schüssler, Vorschule der Mathematik. — Wien 1889.

p. 125: „Unter dem Winkel zweier Geraden, die von einem Punkte ausgehen, versteht man die Gröfse der Drehung um diesen Punkt, durch welchen die eine Gerade in die Lage der andern gelangt.“

„Der durch die Drehung des einen Schenkels beschriebene Teil der Ebene heifst das Winkelblatt des Winkels.“

„Durch den Winkel wird der Richtungsunterschied zweier Geraden näher bestimmt.“

---

dort nicht sagen, der Weg, den der eine Punkt zurücklegt, heifst Strecke, sondern, der Weg kommt in der Strecke zur Anschauung, wird durch die Strecke gemessen. Danach ist der Ausdruck auch hier zu modifizieren.

Uth, Leitfaden der Planimetrie. — Kassel 1889.

p. 4: „Der Richtungsunterschied zweier Strahlen mit demselben Anfangspunkte, gemessen,[1]) heiſst der Winkel, welchen die Strahlen miteinander bilden.“ „Der von den Schenkeln des Winkels begrenzte Teil der Ebene heiſst Winkelfläche (Winkelfeld).“

Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 5: „Dreht sich ein Strahl um seinen Endpunkt P aus seiner ursprünglichen Lage PA, so sagt man, der Strahl beschreibe einen Winkel; wenn er sich z. B. bis in die Lage PB gedreht hat, so hat er den Winkel APB beschrieben. Dieser Winkel ist um so gröſser, je weiter sich PA um P gedreht hat. Daher ist der Winkel das Maſs für die Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt, d. h. er giebt die Gröſse der Drehung an, welche ein Strahl ausführen muſs, um in die Lage eines andern zu gelangen.“

Martus, Raumlehre I. — Bielefeld 1890.

p. 10: „Zieht man von einem Punkte aus zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen, so entsteht ein Winkel.“

„Von der Verschiedenheit der Richtung des zweiten Schenkels gegen die des ersten hängt die Gröſse des Winkels ab.“

„Ein Zirkel, den man immer weiter öffnet, zeigt uns das Wachsen des Winkels mit zunehmender Richtungsänderung.“

Moroff, Das Winkelfeld. — Hof 1890. (Progr.)

Der Verfasser ist zu seiner Arbeit durch die Winkelartikel im 20. Jahrgange der Hoffmannschen Zeitschrift angeregt worden. Den vom Verfasser des vorliegenden Werkes her-

---

[1]) Womit oder wodurch? Wie ist es zu erklären, daſs etwas, wenn es gemessen wird — wobei es doch weder sein Wesen noch sonst irgend etwas ändert —, einen neuen Namen erhält? Denn nur darum würde es sich nach dieser Erklärung handeln. Was hätte es andererseits aber auch für einen Zweck, den Namen zu wechseln?

rührenden charakterisiert er mit der liebenswürdigen Wendung: „Und was ist es wieder für eine unglückliche, unselige Hand, welche die Frage einfädelt.“[1])

p. 10: „Treffen sich die Geraden, schneiden sie sich, und zerfallen dabei in Halbgerade, so zerlegen sie im Verein die Ebene in vier völlig gesonderte Felder, in Winkel. Die Ausdehnung eines Winkels ist unendlich grofs und dabei vergleichbar mit der eines andern oder einer Halbebene beziehungsweise der ganzen Ebene.“

Der Verfasser übersieht bei seinen Angriffen auf die Meinungen andrer, dafs es sich bei seiner Auffassung nicht um das einfache Unendliche handelt, sondern darum, dafs sich für $\infty : \infty$ ein bestimmter endlicher Wert angeben läfst. Ob aber derartige Betrachtungen für Schüler geeignet sind, dürfte billig bezweifelt werden. Hiermit sind auch des Verfassers gegen mich gerichteten Worte auf Seite 5 als hinfällig gekennzeichnet. So ganz ohne Überlegung, wie Hr. Moroff annimmt, pflege ich nicht zu arbeiten.[2])

Herm. Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890.

p. 3: „Unter einem Winkel versteht man das Mafs der stetigen Drehung, durch welche der eine von zwei sich schneidenden Strahlen in die Lage des andern gebracht wird.“ „Mafseinheit ist die volle Drehung.“

Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 48: „Das Stück der Ebene, welches durch zwei vom nämlichen Punkte ausschneidende Strahlen unvollständig begrenzt wird, heifst ein Winkel.“

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890 (Progr. 537).

---

[1]) Ich habe weiter oben (Seite 112) Gelegenheit genommen, eine Besprechung der Moroffschen Abhandlung zu zitieren, deren Verfasser trotz dieser Worte sich für meine Definition ausspricht resp. dieselbe der Moroffschen vorzieht.

[2]) Man vergleiche auch meine Ausführungen auf Seite 112 u. 113.

p. 32: „An die vorstehenden Axiome (Gerade, S. 28) wird nun in einer Anzahl neuerer und einigen älteren Arbeiten auf diesem Gebiete bereits eine Definition des Winkels angeschlossen, insbesondere eine Kongruenzbedingung für Winkel ausgesprochen und — etwa unter ausdrücklicher Verwahrung dagegen, dafs man sich zwischen den Seiten etwas wie eine Fläche ausgespannt denke — das Axiom von der Geraden und Ebene abgeleitet."

Es werden dann Becker und Frischauf zitiert und eingewendet, „dafs aber mit der Starrheit und Festigkeit der Linien noch nicht die Starrheit und Festigkeit des Winkels als eines Raumgebildes gegeben, wenn nicht noch ein die Gröfse des Winkels bestimmendes Element hinzukommt. Dies kann zunächst nicht das übliche Winkelmafs sein, weil die Definition des Winkels, sowohl als Ausschnitt bez. als Teil der Ebene, welches die ursprüngliche, als auch als Drehungsgröfse, welches nur die aus jener durch das wissenschaftliche Bedürfnis hervorgegangene erweiterte Auffassung sein dürfte, beidemal der Ebene als Grundlage bedarf. So ist allein Baltzers Einwand gegen die oben erwähnte Darstellung zu verstehen, denn er sagt ausdrücklich, dafs man Winkel nicht vergleichen könne, bevor die Kongruenz ihrer Ebenen festgesetzt ist. Dies darf nicht ohne Einschränkung gesagt werden; richtig ist aber: Es kann der Winkel als eine selbständige Gröfse nicht definiert werden vor der Definition der Ebene."[1])

„Hiermit wird dem Rechnung getragen, dafs er indirekt definiert werden kann und dies zunächst durch ein Streckendreieck, in dem er eine gegen jene Strecken bestimmte Lage hat; die Bezeichnung „Winkel" wird hiermit streng genommen entbehrlich."

„Somit richtet sich unser Einwand ... gegen diejenige

---

[1]) Wie die Vorstellung der Strecke erst sekundär sich zu derjenigen der unendlichen Geraden erweitert, so dürfte wohl analog der Winkel als erzeugendes Element der Ebene aufgefafst werden können — unbeschadet der Auffassung von Gerade und Ebene als apriorischer Gebilde. Es handelt sich hier um verschiedene Gesichtspunkte, von denen man ausgeht.

Darstellung der Elemente, welche eine vorausgehende Definition des Winkels als einer selbständigen Gröfse für notwendig und möglich erachtet.“

Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890.

p. 2: „Zwei verschieden gerichtete Geraden in der Ebene haben bei gehöriger Verlängerung einen Punkt gemein, d. h. sie schneiden einander. Den Unterschied in den Richtungen zweier Ungleichlaufenden in der Ebene nennen wir Winkel.“

„Wenn eine gerade Linie in der Ebene sich so fortbewegt, dafs ein Punkt derselben in Ruhe bleibt, so hat diese Linie in jeder neuen Lage eine andere Richtung als in der ursprünglichen, und der Winkel wird immer gröfser, je weiter man die Drehung fortsetzt.“

Scholim, Lehrbuch der Geometrie. — Kreuzburg O.-S. 1890.

p. 7: „Wir haben gesehen, dafs man zwei Strahlen, welche von demselben Punkte ausgehen, durch Drehung zur Deckung bringen kann. Diese Drehung wird um so gröfser sein müssen, je weiter die beiden Strahlen ursprünglich von einander abgedreht waren. Diese Abdrehung nennt man den Winkel der beiden Strahlen.“

Simon, Die Elemente der Geometrie. — Strafsburg 1890.

p. 2: „Zwei sich schneidende Geraden teilen ihre Ebene in vier Teile, Winkel genannt. Jeder von ihnen ist das Stück der Ebene zwischen zwei Strahlen, welche vom selben Punkte ausgehen.“

p. 48: „Von den verschiedenen Erklärungen des Winkels ist diese die einzige, welche gestattet sich den Winkel als aus gleichartigen Teilen zusammengesetzt d. h. also als Gröfse zu denken. Die Erklärung ‚Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden‘ hat den Fehler, dafs sie von einem Unterschiede spricht, ohne die Gleichheit zu definieren, und die Gleichheit kann nur mittelst des Parallelenaxioms definiert werden, bezw. müssen Linien als gleichgerichtet angesehen

werden, wenn ihr Abstand unveränderlich ist; es ist auch nur schwer oder gar nicht verständlich, wie man einen Richtungsunterschied teilen kann.[1]) Richtung ist im gewöhnlichen Sinne nichts anderes als Geradlinigkeit, und die Erklärung lautet übersetzt: ‚Zwei sich schneidende Gerade sind zwei verschiedene Gerade,' wo sie dann zwar sehr richtig, aber doch wenig fruchtbar ist. Die schlechteste Erklärung ist wohl den Winkel als Drehungsgröfse zu definieren. Diese kehrt unlogischer Weise die Beziehung um; gleiche Drehungen können nur durch die Gleichheit der Winkel oder Bogen erkannt werden, aber nicht umgekehrt;[2]) sonst müfste man auch noch die Zeit zur Hülfe nehmen und sagen: Drehungen sind gleich, wenn sie bei gleichförmiger Bewegung in gleichen Zeiten ausgeführt werden, und bei der Definition der gleichförmigen Bewegung müfste man doch wieder auf die Gleichheit der Winkel oder Bogen zurückkommen. Was den Einwurf betrifft, dafs die hier gegebene Erklärung dem Schüler das Unendliche zumutet, so bemerke ich, dafs es sich nur um das Unendliche im Werden handelt und der Quartaner die Schwierigkeit, dafs das Unendliche im Werden ein Unendliches im Sein voraussetzt, durchaus nicht wahrnimmt; er geht über den Begriff des Unendlichen weg, wie der Reiter über den Bodensee."[3])

E. Fischer, Die Geometrie. — Berlin 1891.

p. 3: „Gehen von einem Punkte zwei Gerade aus, so wird

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr treffend.

[2]) p. 2: „Ein Winkel kann wiedererzeugt werden dadurch, dafs der eine Schenkel oder Strahl sich in der Ebene um den Scheitel dreht, bis er in die Lage des andern kommt. Der Winkel dient zugleich als Mafs für die Drehungsgröfse."

[3]) An anderer Stelle äufsert sich Simon: „Die allgemeinen Grundbegriffe: Körper, etc., wie die besonderen: Punkt, Gerade, Ebene (Abstand, Richtung, Winkel) sind Grenzbegriffe, welche sich im Laufe der Jahrtausende aus der sinnlichen Erfahrung entwickelt haben."

„Der Grundbegriff Winkel wird am einwandfreiesten erklärt als Stück der Ebene zwischen zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, d. h. also Grenze des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius."

der Unterschied ihrer Richtungen als der Winkel bezeichnet, welchen sie mit einander bilden."

Auch auf die Drehung wird eingegangen, wobei eine dritte die Schenkel schneidende Gerade zu Hülfe genommen wird.

Hočevar, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1891.

p. 6: „Ein Winkel ist jener Teil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Halbstrahlen liegt."

Holl, Lehrbuch der Geometrie. — Stuttgart 1891.

p. 14: „Wenn zwei gerade Linien (Strahlen) von einem Punkte in verschiedener Richtung ausgehen, so sagt man, sie seien gegen einander geneigt und sie bilden einen Winkel."

„Ein Winkel ist der Richtungsunterschied (oder die Neigung) zweier Linien, die von einem Punkte ausgehen."

„Die Gröſse des Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Richtung derselben (ihrer Neigung, Öffnung) ab und wird bestimmt durch die Gröſse des Bogens, welcher um den Scheitel als Mittelpunkt zwischen den Schenkeln beschrieben wird. Die Zahl der Grade etc. des Bogens ist zugleich Maſszahl für den Winkel, der dieselbe Anzahl von Graden etc. hat. Es ist hierbei gleichgültig, ob eine gröſsere oder kleinere Zirkelöffnung angewendet wird, da die in den Winkelraum fallenden Bogen immer gleich viele Grade haben."

H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. — Berlin 1891.

p. 14: „Durch die Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt entsteht noch ein ebenes Gebilde. Ist PA die ursprüngliche Lage des Strahles und PB eine zweite, während der Bewegung eingenommene Lage, so wird durch die beiden Strahlen PA und PB die Ebene in zwei von einander getrennte Gebilde geteilt. Jeder dieser beiden Teile wird Winkel genannt."

„Erklärung. Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen begrenzt wird."

„Da die Schenkel (die bestimmenden Strahlen) unbegrenzt sind, so ist jeder Winkel ein unbegrenzt grofses Flächenstück; es ist deshalb nicht möglich, die wirkliche Gröfse eines Winkels auszumessen.“

Dagegen ist Vergleichung von Winkeln mittelst Drehung möglich.

„Wenn auch die wirkliche Gröfse eines Winkels nicht bestimmt werden kann, so ist es doch möglich, auszumessen, welchen Teil der Ebene er beträgt.“[1])

Rofsmanith, Die Elemente der Geometrie. — Wien 1891.

p. 17: „Dreht man einen Halbstrahl SA um seinen Endpunkt S, so schliefst er in jeder seiner weiteren Lagen mit der Anfangslage einen Winkel ein. Derselbe wird um so gröfser, je weiter die Drehung fortgesetzt wird.“

„Der Winkel zweier Halbstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen, kann somit als die Gröfse der Drehung betrachtet werden, welche erforderlich ist, um den einen derselben in die Lage des andern zu bringen.“

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 16: „Zwei gerade Linien, die sich schneiden, haben nicht dieselbe, sondern verschiedene Richtung, was schon daraus hervorgeht, dafs sie zu ihrer Konstruktion, weil sie nicht zusammenfallen, zwei Ausdehnungen nötig haben. Der gröfsere oder geringere Unterschied ihrer Richtung gegen einander heifst Neigung oder Winkel.“

Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892.

p. 6: „Gehen von einem gemeinschaftlichen Punkte zwei Halbstrahlen aus, so heifst die Gröfse der Drehung, welche einer der Halbstrahlen machen mufs, um in die Lage des andern zu kommen, der von den Halbstrahlen gebildete Winkel.‘

---

[1]) Höchst bedenkliche Erklärungen, besonders in einem Schulbuch.

Hercher, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1893.

p. 5: „Man vergleicht zwei sich schneidende Gerade hinsichtlich ihrer Richtung, indem man die eine soweit um den Durchschnittspunkt dreht, bis sie mit der andern zusammenfällt. Die Drehung, welche eine Gerade machen mufs, um in die Lage einer andern zu kommen, ist das Mafs für den Richtungsunterschied der beiden Geraden. Der Richtungsunterschied von zwei sich schneidenden Geraden heifst der Winkel der beiden Geraden."

III. Kapitel.

Die Lehre vom Parallelismus.

Wer es heutzutage unternimmt, zur Parallelenfrage das Wort zu ergreifen, der mufs es in dem Bewufstsein thun, dafs es unmöglich ist, neues Material zur Lösung des Problems herbeizuschaffen. Aber der Zweck des vorliegenden Werkes setzt den Verfasser in die glückliche Lage, die Behandlung von einem andern, gewissermafsen neutralen Standpunkte aus in Angriff zu nehmen; es gilt ja nicht eine neue Darstellung, einen neuen „Versuch", wie deren so mannigfache vorliegen; es gilt das Vorhandene zu zergliedern, zu gruppieren und dadurch zu klarer Erkenntnis zu bringen, es gilt das reichlich vorhandene Material kritisch zu beleuchten und auf diese Weise einen gesicherten Stand gegenüber der Frage zu gewinnen, es gilt vor allem zu untersuchen, welche Behandlung der Parallelenlehre für die Schule sich als die beste ergeben dürfte.

Im 47. Bande von Grunerts Archiv (1867) stellt sich der Herausgeber eine ähnliche Aufgabe, wie sie uns hier vorliegt. Er beginnt seine Abhandlung „Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen" mit den Worten (p. 307): „Seit den Zeiten des Euklides hat die Frage von der Theorie der Parallelen die Geometer, wenn auch teilweise mit längeren Unterbrechungen, doch immer wieder von Neuem lebhaft beschäftigt, viele Abhandlungen sind verfafst worden, in denen man diese Versuche gesammelt und einer eingehenden Kritik unterworfen hat. Schon

in einer im Jahre 1763 erschienenen verdienstlichen Schrift von Klügel[1]) sind achtundzwanzig mehr oder weniger von einander verschiedene Parallelentheorien gesammelt und beurteilt worden, und wer wollte alle die übrigen in den verschiedensten Sprachen und Ländern erschienenen Schriften ähnlicher Art aufzählen, die in den seit jener Zeit verflossenen hundert Jahren verfafst worden sind."

In der That, das vorliegende Material ist ein ungeheures! Hier Vollständigkeit auch nur einigermafsen zu bieten, würde ein Studium für sich allein bedingen, nun gar, wenn man das Neueste, was hierher gehört, mit in die Frage hineinziehen wollte. Und doch, ganz läfst es sich nicht vermeiden, und wir werden hier und da genötigt sein, diese neuesten Untersuchungen wenigstens zu streifen, bei welcher Gelegenheit zur Vervollständigung auf die wichtigsten litterarischen Erscheinungen dieser Art hingewiesen werden wird.

Schon im § 3 des ersten Kapitels wurde bei der Betrachtung der Lagen zweier Geraden das hier zu behandelnde Thema berührt: als ersten Fall zweier Geraden nahmen wir den, dafs die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam hatten und setzten fest, dafs solche Gerade Parallelen genannt würden.

Hier wollen wir einen andern Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen wählen, indem wir zuerst von einem allgemeineren Gesichtspunkte ausgehen und eine Definition eines allgemeinen Begriffs des Parallelismus versuchen. So viel ist wohl von vornherein klar, dafs wir Parallelismus auch im allgemeinern Sinne auf Flächen und Linien einzuschränken haben, von parallelen Körpern zu sprechen würde widersinnig erscheinen.

Es fragt sich nun, wovon wir bei diesen allgemeinen Betrachtungen auszugehen haben, resp. welche Idee wir zu Grunde legen müssen. Offenbar kommen zwei der gebräuchlichsten

---

[1]) Zu meinem Bedauern habe ich die Schrift selbst nicht einsehen können. Bei dem Mangel jeglicher öffentlichen Bibliothek an hiesigem Orte und bei den Weitläufigkeiten, die beim Verkehr mit auswärtigen Bibliotheken erwachsen, war es mir nicht mehr möglich, die genannte Schrift selbst zu benutzen.

Definitionen für parallele Gerade sofort außer Berücksichtigung: weder können wir das Nichtgemeinsamhaben von Punkten als entscheidendes Merkmal benutzen[1]) noch die Definition von der „gleichen Richtung" her ableiten. Das erstere würde die wirkliche Parallelität nur als einen Spezialfall enthalten, die zweite Erklärung keinen Sinn haben, wenn nicht schon die Definition paralleler Geraden vorangegangen wäre. Es würde also als das einzig Brauchbare für den allgemeineren Begriff des Parallelismus von Flächen und Linien nur übrig bleiben das Merkmal des konstanten Abstandes. Nach vielfältiger Erwägung und Prüfung scheint mir die folgende Definition einwandsfrei zu sein: Liegen zwei Raumgebilde — Flächen resp. Linien[2]) — so, dafs je zwei gegenseitige Nachbarpunkte konstanten Abstand von einander haben, so heifsen die beiden Gebilde parallel.[3])

Die Prüfung an besondern Fällen hat mir wenigstens keinen widersprechenden Fall ergeben. Nehmen wir z. B. eine Ebene und eine Gerade, so ist die Richtigkeit der Definition anschaulich evident, es leuchtet aber auch ein, dafs wir ausdrücklich von „gegenseitigen Nachbarpunkten" sprechen müssen. Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt in der Ebene an und denkt sich den zugehörigen Nachbarpunkt auf der Geraden, so ist natürlich nicht vice versa auch der beliebig gewählte Punkt der Ebene notwendig der Nachbarpunkt des betreffenden Punktes auf der Geraden: zu jedem Punkte der Ebene gehört ein ganz bestimmter Nachbarpunkt auf der Geraden, aber es

[1]) Ja selbst für Gerade gilt diese Definition ja nur in der Ebene, nicht allgemein im Raume.

[2]) Und zwar sowohl Fläche und Fläche, als Fläche und Linie, als Linie und Linie.

[3]) Magnus giebt in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie", Berlin 1883, p. 427, folgende Definition: „Einer Kurve BCD ist eine andere Kurve $B'C'D'$ parallel, wenn diejenigen Stücke BB', CC', DD' u. s. w. der an jener Kurve gezognen Normalen, welche zwischen beiden Kurven liegen, sämtlich einander gleich sind." Daran schliefst sich die Entwickelung einer Reihe interessanter Sätze, die das Wesen der parallelen Kurven völlig zur Klarheit bringen. — Mir scheint die Definition mit der meinigen im wesentlichen identisch.

giebt unzählig viele Punkte auf der Ebene, die denselben Punkt der Geraden zum Nachbarpunkt haben — und zwar ist der Träger dieser Punktreihe eine Gerade —; dagegen zu jedem Punkte der Geraden giebt es nur einen Nachbarpunkt auf der Ebene und jedem einzelnen Punkte der Geraden entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Ebene als Nachbarpunkt. Es giebt nicht mehrere Punkte auf der Geraden — wie vorher in der Ebene —, die denselben Punkt der Ebene zum Nachbarpunkt hätten. Diese beiden letzteren, eindeutig bestimmten zugehörigen Nachbarpunkte sind diejenigen, die als „gegenseitige Nachbarpunkte" bezeichnet worden sind. Die Richtigkeit der aufgestellten Definition ist in dem gewählten Beispiel anschaulich evident. Es wird übrigens nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dafs nach unserer Definition zwei beliebige ebene Kurven, deren Ebenen zu einander parallel sind, deshalb noch nicht selbst parallel zu sein brauchen, was mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch übereinstimmt.[1])

Als andres Beispiel sei erwähnt:

Konzentrische Kugelschalen fallen unter unsre Definition und sind demnach als parallel zu bezeichnen.

Gehen wir nun ohne weiteres zu den Linien über, so können wir unsere Untersuchungen unter drei Gesichtspunkten anfassen, wir können nämlich betrachten zwei Linien

1) im Raume,
2) auf Flächen, a. verschiedenen, b. derselben,
3) speziell, a. in zwei Ebenen oder b. in ein und derselben Ebene.

Bei der Erörterung dieser verschiednen möglichen Fälle[2]) würden z. B. unter 2) b. die Parallelkreise auf der Kugel zu besprechen sein oder auf einem Zylinder oder einem Kegel. Der wichtigste Fall ist natürlich 3) b., da wir uns hier

[1]) Überhaupt wird sich ergeben, dafs Parallelsein im Sinne unsrer Erklärung nur vorkommen kann bei gleichartigen Raumgebilden derselben Stufe, mit alleiniger Ausnahme davon, dafs Gerade und Ebene parallel sein können.

[2]) Hierbei ist wohl zu beachten, dafs auch schon bei der Erörterung des Falles 1) die spezielle Annahme, dafs die beiden Linien Geraden sind, in Betracht gezogen werden mufs.

unserm eigentlichen Ziele schon wesentlich nähern. Ein hierhergehörendes Beispiel würden zwei konzentrische Kreise sein. Schliefslich wäre die Untersuchung auf Geraden zu spezialisieren und hier ebenfalls wieder wie vorhin die verschiedenen Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen.[1]) Als speziellster Fall ergäbe sich zum Schlufs derjenige unsrer gewöhnlichen Parallelen.

Es ist natürlich, dafs eine solche allgemeine Betrachtung nicht in die Schule gehört, wenigstens nicht in den Anfang des planimetrischen Unterrichts, da wo zuerst von Parallelen die Rede ist. Mir schien es aber von Wichtigkeit, durch diese Verallgemeinerung den wesentlichen Kern herauszuschälen, das eigentlich charakteristische Merkmal für den Parallelismus darzulegen.[2]) Wer den vorliegenden Erörterungen einige Bedeutung beilegt, wird mit uns zu dem Resultat kommen, dafs die Konstanz des Abstandes als das wesentliche Merkmal des Parallelismus aufzufassen ist, und dafs deshalb die Definition hierauf sich zu stützen hat. Von methodischer Seite steht dem auch nicht das geringste im Wege.

Wenn man die verschiedensten Werke auf ihre Definition der Parallelen — und die daraus resultierende Behandlung der Parallelenlehre — ansieht (die beigefügten Zitate werden dem Leser die Möglichkeit hierzu gewähren), so zeigen sich im wesentlichen drei Arten der Auffassung:

---

[1]) Selbstverständlich können dann im Fall 2) nur Regelflächen in Betracht kommen. Hier ist es nun interessant, dafs bei 2) b. die Existenz solcher Geraden zur Unmöglichkeit werden kann, die bei 2) a. vorkommen.

[2]) Die Berechtigung zu einer derartigen Verallgemeinerung liegt meines Erachtens darin, dafs man eine teilweise Verallgemeinerung schon in den Parallelkreisen einer Kugel ganz allgemein als richtig anerkannt hat. Auch in diesem Beispiele ist übrigens die Konstanz des Abstandes der Nachbarpunkte — mag man den Abstand im absoluten Sinne räumlich auffassen oder in eingeschränktem Sinne Abstand auf der Kegelfläche — das wesentliche Merkmal. Kreise, die keinen Punkt gemeinsam haben, giebt es auf der Kugel, ohne dafs sie deshalb parallel zu sein brauchen, und die Verwendung des Begriffs der Richtung würde doch zu weitläufigen und nicht ganz leichten Erörterungen führen. Man vergl. den weiter unten näher zu besprechenden Aufsatz in Grunerts Archiv XV, p. 361.

1) Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam; hierbei sind zugleich diejenigen Definitionen zu erörtern, die das Nichtschneiden zu Grunde legen oder die Geraden sich im Unendlichen schneiden lassen. Die letztere Erklärungsweise führt uns hinüber zu

2) Die Geraden haben „gleiche Richtung" oder „gleiche Richtungen", wozu auch diejenigen Erklärungen gehören, die eine Transversale und die Gleichheit der Schnittwinkel zu Hülfe nehmen.

3) Die Geraden haben konstanten Abstand, eine Erklärung, die viel Verwandtes mit No. 1 hat, zu ihr wieder zurückführt und so den Zirkel der Erklärungen schliefst.

Des Weiteren ist dann der Versuch zu besprechen, die Parallele als den geometrischen Ort zu erklären aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben.

Daran wird sich schliefslich die Besprechung der Versuche anreihen, das Problem dadurch zu lösen, dafs andere gleichwertige an seiner Stelle erörtert werden, wie z. B. die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.

Da die Zitate auch bei diesem Kapitel historisch geordnet sind, so ist dadurch die Möglichkeit geboten, einen Überblick über die historische Entwicklung zu gewinnen und zu erkennen, welche der Erklärungen zeitweilig die Herrschaft gehabt hat.[1])

Die drei hauptsächlich von einander verschiedenen Definitionen der parallelen Linien stehen nicht soweit von einander ab ihrem Wesen nach, wie dies z. B. bei den drei gebräuchlichsten Winkeldefinitionen der Fall ist. Ich habe schon darauf hingedeutet, will aber der gröfseren Klarheit wegen noch einmal den Zusammenhang deutlich hervorheben.

Das „keinen Punkt gemeinsam haben" führte, weil es nicht befriedigte, hinüber zu dem „einen Punkt im Unendlichen

[1]) Hier liefsen sich vielleicht lehrreiche Betrachtungen über den „Geschmack in der Mathematik" anstellen, wie sie von anderem Gesichtspunkte aus Engel in seiner Antrittsvorlesung „der Geschmack in der neueren Mathematik" geboten hat. Allerdings würde sich bei dieser Auffassung Geschmack und Mode nahezu decken, womit im allgemeinen vielleicht nicht Jedermann einverstanden sein dürfte.

gemeinsam haben" — resp. war es der Einflufs der modernen Geometrie, der die verschiedenen Fälle unter einheitlichem Gesichtspunkte ordnete —; diese letztere Erklärungsweise wiederum zeigte sich identisch mit der „gleiche Richtung (Richtungen) haben". Andererseits kam man von der ersten Erklärung dazu, den „konstanten Abstand" ins Auge zu fassen, da nach unserem natürlichen Denken zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich nicht nähern können, weil sie sonst schliefslich einen Punkt gemeinsam haben würden: also immer gleichweit von einander entfernt sein müssen. Es wird sich daher bei der Besprechung der drei Erklärungen nicht umgehen lassen, hier und da von dem einen in das andere Gebiet hinüberzugreifen.

1) Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam
oder sie schneiden sich nicht
oder sie treffen sich im Unendlichen
oder sie haben im Unendlichen einen Punkt gemeinsam.

Zunächst möchte ich gegen die letztere Ausdrucksweise Einwendungen erheben. Abgesehen davon, dafs das Unendliche unnützerweise in die Erörterung hineingezogen wird, ist doch andererseits die Erklärung deshalb zu verwerfen, weil sie etwas bestimmtes aussagt, ohne dafs wir durch unsere Anschauung oder sonst woher irgendwelche Aufklärung resp. Erkenntnis davon gewonnen hätten.[1]) Woher wissen wir denn, dafs die Geraden sich im Unendlichen schneiden resp. treffen resp. dort einen Punkt gemeinsam haben? Die Ausdrucksweise ist aus Zweckmäfsigkeitsgründen zu gunsten einer einheitlichen Auffassung der Lage zweier Geraden geschaffen worden ohne jede innere Berechtigung. Die höhere Geometrie hat sich der Freiheiten der Auffassung bedient, deren sie sich ohne weiteres bedienen darf, nicht aber dürfen wir derartige Betrachtungen direkt in die elementare Planimetrie hineintragen.

Wenn Gauss in einem Brief an Schumacher sagt: „Der endliche Mensch darf sich nicht vermessen, etwas Unendliches

---

[1]) Man vergleiche H. Z. VII, p. 469, f. (aber auch H. Z. VIII, p. 220, f.).

möchte ich gegen den Gebrauch der vorliegenden Parallelendefinition im Schulunterricht sein. Der Schüler wird die Erklärung, die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, völlig verständlich finden, das Hereinziehen des Unendlichen kann nur dazu dienen ihn verwirrt zu machen, wenn man dort plötzlich etwas anderes annimmt als im Endlichen.[1])

Um den erörterten Skrupeln zu entgehen, haben viele Verfasser Ausdrücke gewählt wie die folgenden: „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, so weit man sie auch verlängern mag“ oder „Die Geraden haben im Endlichen keinen Punkt gemeinsam“, Ausdrücke, gegen die sich nichts einwenden läfst, die aber auch keinen wesentlichen Vorzug verdienen vor dem einfachen „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam“.

Die vorliegende Erklärung der Parallellinien läfst sich nun auf das natürlichste mit der dritten verknüpfen, denn es ist evident, dafs zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich nicht einander nähern dürfen, sondern immer — d. h. soweit sie unserer Anschauung resp. unserem anschaulichen Vorstellen zugänglich sind — gleichen Abstand von einander haben müssen. Alle Nachbarpunkte haben gleichen Abstand und somit kann man auch davon sprechen, dafs die Geraden selbst einen Abstand haben, nämlich den konstanten der Nachbarpunkte. Hier ist ein wesentlicher Unterschied mit zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben. Bestimmen wir nämlich bei zwei sich schneidenden Geraden zu einem beliebigen Punkte auf der einen Geraden den Nachbarpunkt auf der anderen, so ist nicht umgekehrt auch der erstere der Nachbarpunkt des zweiten, während dieser Fall eintritt bei parallelen Geraden.[2])

---

[1]) Ganz analog wie bei der Zahlenreihe: auch hier kann immer wieder 1 addiert und dadurch eine neue Zahl gewonnen werden, die für unser anschauliches Denken eine Zahl wie die frühere ist, d. h. eine endliche; erst wenn dieser Prozefs über jede Vorstellung hinaus fortgesetzt wird, gelangen wir zum Unendlichen als etwas Unvorstellbarem: so weit wir die beiden Geraden anschaulich verfolgen können, haben sie keinen Punkt gemeinsam, geht aber ihre Verlängerung über alles Vorstellen hinaus, so fehlt uns auch jede Vorstellung davon, ob sie einen Punkt gemeinsam haben oder nicht.

[2]) Man könnte hierauf sogar eine Definition der Parallelen gründen: 'st bei zwei Geraden ein Punkt Nachbarpunkt seines Nachbarpunkte

als etwas von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen", so gilt das ganz speziell im vorliegenden Falle. Wir können darüber, wie die beiden Geraden sich zu einander im Unendlichen verhalten, gar nichts aussagen, weder dafs sie sich schneiden, noch dafs sie sich nicht schneiden — obwohl uns das letztere wegen seiner Analogie mit dem Endlichen, mit dem unserer Anschauung Zugänglichen als das Natürlichere erscheinen mufs. Der „unendlich ferne" Punkt[1]) also, den zwei Gerade gemeinsam haben, ist lediglich ein Wort, ein leerer Begriff, da ihm in der Anschauung nichts entspricht.[2]) Aus diesen Gründen

[1]) Der Ausdruck „unendlich entfernter" Punkt findet sich bei Steiner, Systematische Entwicklung etc. Kap. 1, § 2. — Aber schon Desargues 1630 und Newton 1687 haben seiner Erwähnung gethan.

[2]) Bei Steiner l. c. heifst es (ich zitiere nach Steiner, Gesammelte Werke, Bd. I, p. 240, f.): „Man lasse den Strahl *p* . . . sich bewegen, so wird der Punkt 𝔭 die Gerade so durchlaufen, dafs er nacheinander in die Stellen 𝔟, 𝔞, 𝔣, 𝔮, 𝔥, 𝔠, 𝔟 gelangt und folglich sich stets nach einer und derselben Richtung hin bewegt. Nur in der einzigen besonderen Lage des Strahles, wo er nämlich mit der Geraden *A* parallel ist, welches etwa bei 𝔮 der Fall sein mag, findet **kein wirkliches Schneiden** desselben mit der Geraden statt; da aber sowohl vor als nach dieser Lage stets ein wirkliches Schneiden stattfindet, und zwar, da der unmittelbar vorhergehende Durchschnitt in der gröfstmöglichsten Ferne auf der Seite über 𝔥 hinaus, und der unmittelbar nachfolgende Durchschnitt in der gröfstmöglichsten Ferne auf der anderen Seite über 𝔣 hinaus liegt, so soll in der Folge der Übereinstimmung wegen gesagt werden, der Strahl *q* sei nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden *A* gerichtet, und es soll dieser unendlich entfernte Punkt, wenngleich derselbe in der Figur nicht wirklich anzutreffen ist, durch 𝔮 bezeichnet werden. Demnach hätte die Gerade *A* nur einen unendlich entfernten Punkt 𝔮, und man kann sich denselben sowohl nach der einen Seite (über 𝔥 hinaus) als nach der andern (über 𝔣 hinaus) hin liegend vorstellen. Auch folgt hiernach, dafs umgekehrt ein Strahl, der nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden *A* gerichtet ist, notwendigerweise mit ihr parallel sein mufs." Ich mache noch besonders darauf aufmerksam, dafs Steiner sagt, dafs die Parallele nach dem unendlich entfernten Punkte **gerichtet** ist, nicht etwa dafs sie ihn treffe oder mit der Geraden gemein habe; ja er schliefst dies durch seine Betrachtungen geradezu aus. Mir scheint, als sei die Darstellung Steiners an dieser Stelle nicht mit genügender Schärfe beachtet worden.

möchte ich gegen den Gebrauch der vorliegenden Parallelendefinition im Schulunterricht sein. Der Schüler wird die Erklärung, die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, völlig verständlich finden, das Hereinziehen des Unendlichen kann nur dazu dienen ihn verwirrt zu machen, wenn man dort plötzlich etwas anderes annimmt als im Endlichen.[1])

Um den erörterten Skrupeln zu entgehen, haben viele Verfasser Ausdrücke gewählt wie die folgenden: „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, so weit man sie auch verlängern mag“ oder „Die Geraden haben im Endlichen keinen Punkt gemeinsam“, Ausdrücke, gegen die sich nichts einwenden läſst, die aber auch keinen wesentlichen Vorzug verdienen vor dem einfachen „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam“.

Die vorliegende Erklärung der Parallellinien läſst sich nun auf das natürlichste mit der dritten verknüpfen, denn es ist evident, daſs zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich nicht einander nähern dürfen, sondern immer — d. h. soweit sie unserer Anschauung resp. unserem anschaulichen Vorstellen zugänglich sind — gleichen Abstand von einander haben müssen. Alle Nachbarpunkte haben gleichen Abstand und somit kann man auch davon sprechen, daſs die Geraden selbst einen Abstand haben, nämlich den konstanten der Nachbarpunkte. Hier ist ein wesentlicher Unterschied mit zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben. Bestimmen wir nämlich bei zwei sich schneidenden Geraden zu einem beliebigen Punkte auf der einen Geraden den Nachbarpunkt auf der anderen, so ist nicht umgekehrt auch der erstere der Nachbarpunkt des zweiten, während dieser Fall eintritt bei parallelen Geraden.[2])

---

[1]) Ganz analog wie bei der Zahlenreihe: auch hier kann immer wieder 1 addiert und dadurch eine neue Zahl gewonnen werden, die für unser anschauliches Denken eine Zahl wie die frühere ist, d. h. eine endliche; erst wenn dieser Prozeſs über jede Vorstellung hinaus fortgesetzt wird, gelangen wir zum Unendlichen als etwas Unvorstellbarem: so weit wir die beiden Geraden anschaulich verfolgen können, haben sie keinen Punkt gemeinsam, geht aber ihre Verlängerung über alles Vorstellen hinaus, so fehlt uns auch jede Vorstellung davon, ob sie einen Punkt gemeinsam haben oder nicht.

[2]) Man könnte hierauf sogar eine Definition der Parallelen gründen: „Ist bei zwei Geraden ein Punkt Nachbarpunkt seines Nachbarpunktes,

Kehren wir zu dem ersteren Gedanken zurück, so ist als ganz sicher festzusetzen, dafs wir in unserem anschaulichen Denken mit dem Ausschliefsen eines gemeinsamen Punktes der zwei Geraden die Konstanz des Abstandes eo ipso (gemäfs den Gesetzen unseres Denkens) verbinden. Es ist nicht denkbar, dafs der Abstand sich verkleinere oder vergröfsere, ohne dafs wir zugleich ein Näherkommen oder ein Weiterabweichen der beiden Geraden uns dabei vorstellen und mit dieser Vorstellung ist diejenige eines gemeinsamen Punktes wiederum untrennbar verbunden.

Von hierzugehörigen Aufsätzen ist es zunächst einer von Sturm „Die neuere Geometrie auf der Schule“ in Hoffmanns Zeitschrift, Bd. I, p. 474—490, der für die hier behandelte Frage von Wichtigkeit ist. Er ist geschrieben mit besonderer Rücksicht auf Geisers bekannte „Einleitung in die synthetische Geometrie“. p. 478 heifst es: „Mit hohem Interesse habe ich die schöne, so vorsichtig einschränkende Art und Weise kennen gelernt, wie der Verfasser die gewöhnlich grofse Schwierigkeiten bereitenden transcendenten Gebilde — den unendlich entfernten Punkt etc. — als notwendige Konsequenzen gewisser allgemeiner Sätze ableitet.[1]) Wenn bei den Definitionen der parallelen Geraden (als solcher Geraden derselben Ebene, welche sich in einem nicht erreichbaren Punkte treffen....) auf diese Gebilde hingearbeitet wird, so werden dieselben vielleicht der Einführung in den Schulunterricht nicht so erhebliche Schwierigkeiten darbieten: der Versuch wenigstens mufs mehrfach gemacht und es darf nicht von vornherein darüber abgesprochen werden.“

Auf den Einwurf der Redaktion, dafs „in einem unerreichbaren Punkte treffen“ eine contradictio in adjecto und gleichbedeutend mit „gar nicht treffen“ sei, erwidert Sturm: „Nur gegen eins mufs ich mich unbedingt erheben, gegen die Abfertigung der Parallelentheorie. Das einzige

---

so gilt dies für alle Punktepaare oder so haben die beiden Geraden konstanten Abstand oder so sind die Geraden parallel.“

[1]) Man vergl. das Zitat aus Steiner selbst; uns sagt dessen Darllung weit mehr zu, als die Geiser'sche.

Wort, das darin von mir herrührt, ist „unerreichbar“ statt „unendlich entfernt“; die Anschauung selbst ist jetzt Gemeingut aller produktiven Geometer.“

Sturm gesteht zu, selbst die gröſsten Schwierigkeiten bei dieser Vorstellung gehabt zu haben, hebt aber dagegen ihre Vorteile hervor und meint, daſs sie vorsichtig gebraucht nie zu einem Irrtume führe. Das Wort „unerreichbar“ solle nur als Übergangswort zu „unendlich entfernt“ dienen. Er sagt dann: „Aber auch bei diesem Worte muſs ich gegen die contradictio in adjecto protestieren; dieselbe fände doch nur statt, wenn die treffenden zugleich die erreichen sollenden wären, was eben nicht der Fall ist. Die sich treffenden sind die beiden unendlich langen geraden Linien, die erreichen sollenden sind wir Menschen. Sie geben doch wohl zu, daſs jede einzelne Linie für uns unerreichbare Punkte hat, warum können zwei Linien nicht einen dieser unerreichbaren Punkte gemein haben? In diesem würden sie sich dann auch treffen.“ „Der Einwand der sich stets gleich bleibenden Entfernung läſst sich doch sehr leicht für den, der mit unendlicher Gröſse zu operieren versteht, durch die Bemerkung widerlegen, daſs in der Unendlichkeit diese endliche Distanz verschwindet.“[1])

Hierzu möchten wir zunächst bemerken, daſs allerdings nichts dagegen spricht, daſs zwei Gerade einen Punkt im Unendlichen (Unerreichbaren) gemeinsam haben können, aber ebensowenig dafür, daſs sie einen solchen Punkt in der That gemeinsam haben müssen oder haben.[2]) Was dann das Verschwinden der endlichen Distanz im Unendlichen betrifft, so

[1]) Auf diesen Punkt werden wir bei der Besprechung eines weiteren Aufsatzes von Sturm noch zurückkommen.

[2]) „Gerade Linien sind parallel, wenn sie sich im Endlichen nicht schneiden. Man ist nicht befugt, die Negation vom Verbum wegzunehmen und mit dem Begriffe endlich zu verschmelzen. Müssen denn zwei Linien, welche sich im Endlichen nicht schneiden, sich im Unendlichen schneiden? Kann im Unendlichen nicht dasselbe stattfinden, wie im Endlichen? Könnten die beiden Geraden im Unendlichen nicht zusammenfallen? Wäre auf alle Fälle nicht mit dem Schnitt- oder Treffpunkte im Unendlichen das Unendliche fixiert?“

Zerlang in H. Z. Bd. III. p. 265.

würde ich die Schüler beklagen, denen man am Anfang des planimetrischen Unterrichts den Kopf mit derartigen mathematisch-philosophischen Abstraktionen anfüllte.[1]) Man würde ihnen damit eine völlig unverdauliche Speise vorsetzen, an der sie sich sehr leicht für alle Zeit gründlich den Geschmack an der Geometrie verderben würden. Dem jugendlichen Geist mufs man anschaulich kommen.[2])

Im übrigen enthält der fragliche Artikel sehr viel Gutes und Beherzigenswertes. Seine ausführlicher zitierten Stellen haben nun eine Reihe von Entgegnungen gezeitigt, die wir ebenfalls einer genaueren Betrachtung würdigen müssen.

An erster Stelle repliziert Kober im selben Bande der H. Z. p. 491 in seinem Artikel „Ueber die Definition des Parallelismus". Dort heifst es:

„Mit den Worten „erreichbar" oder „unerreichbar" meint er ohne Zweifel, nicht was dem physischen Menschen oder dem sinnlichen Auge, sondern was dem denkenden Verstande erreichbar oder unerreichbar ist. Trotzdem behauptet der Verfasser, dafs dieser unerreichbare Punkt wirklich existiere, und beruft sich dabei auf die Auffassung der höheren Geometrie."

„Den Gegensatz zwischen „parallel" und „schneidend" macht aber nicht die niedere Geometrie, d. h. der oder jener Geometer, sondern der allgemein menschliche Verstand. Es handelt sich nicht um eine willkürliche Definition, sondern um die im menschlichen Verstande vorhandenen Begriffe. Die Frage ist, ob Linien denkbar sind, die selbst im Unendlichen nicht zusammentreffen, sondern stets in gleicher Richtung oder gleicher Entfernung neben einander herlaufen ..... Sie sind denkbar, trotzdem dafs sie die Methode der höheren Mathe-

---

[1]) Übrigens giebt es doch noch genug Mathematiker, die $\infty + a = \infty$ ein „bedenkliches Prinzip" nennen.

[2]) „Wer die Parallelentheorie mit dem unendlich fernen Punkte einleitet, begeht den Fehler, den Schüler von seiner gewohnten Anschauung und seinem natürlichen Denken zu entfernen. In Folge solcher Fehler glaubt der Schüler endlich, dafs die Wissenschaft zu seiner bisherigen Erkenntnis im Gegensatze stehe und wird irre an sich selbst."
J. Kober, „Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie" in H. Z. III. p. 261.

matik nicht brauchen und nicht behandeln kann, sondern sie vorkommenden Falls als wirklich, wenn auch im Unendlichen, zusammentreffend behandelt. Ob solche Linien in der Natur, im Weltall, vorkommen, ist völlig gleichgültig; es existiert ja überhaupt keine gerade Linie .... in der äufseren Wirklichkeit, sondern nur in unserm Denken. Denken wir uns eine Eisenbahn ins Unendliche hinausgebaut, so wird doch Niemand sagen wollen, dafs die Schienen, wenn auch im Unendlichen, je zusammentreffen würden? dafs also die Lokomotive auf ihnen nicht mehr würde stehen können? Hierin läge in der That eine contradictio in adjecto. Ob unser sinnliches Auge die Lokomotive als einen Punkt oder gar nicht sieht, hat damit nicht im Mindesten zu thun."

Auch die weiteren Einwendungen Kober's gegen Sturm verdienen alle Beachtung, vor allen Dingen, wenn er sagt, auf Wahrheit kommt es an, nicht auf ein methodisches Prinzip.

Ebenfalls gegen Sturm wendet sich J. C. Becker in H. Z. Bd. II. p. 89. Er sagt:

„Ich gebe zwar zu, dafs die Geometrie der Lage berechtigt ist, von dem unendlich fernen Punkte einer Geraden zu sprechen und zwei Parallele als Linien zu definieren, die diesen Punkt gemein haben .... Aber darum ist der „unendlich ferne Punkt" doch nur — eine blofse Fiktion[1]), und ebenso wenig reell, wie die imaginären Schnittpunkte zweier Kurven, die sich wirklich schneiden."

Becker weist dann nach, wie man zu dieser Fiktion gekommen, worüber wir bei der zweiten Definition zu sprechen haben werden, und führt an, dafs Reye die unendlich entfernten Elemente der Raumgebilde als „uneigentliche Elemente" bezeichne. Man müsse sich davor hüten, durch die Fiktionen der höheren Mathematik die Grundbegriffe der Elemente sich trüben zu lassen.

Becker selbst will die Definition des Parallelismus auf den Begriff der Stellung stützen.

---

[1]) Ganz im Sinne Steiner's, gemäfs seiner weiter oben zitierten Darstellung.

Man vergl. H. Z. Bd. XVI. p. 81.

Auf eine Bemerkung Kober's kommt Bolze zurück in H. Z. II. p. 334: „Zwei Parallellinien sind nach rechts ebenso parallel, wie nach links, also müssen sie sich nach links ebenso gut in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, wie nach rechts; folglich haben sie zwei Punkte miteinander gemein."

Dieser Einwand ist hinfällig, denn die neuere Geometrie nimmt ausdrücklich nur einen unendlich entfernten Punkt auf der Geraden an resp. sie identifiziert die unendlich entfernten Punkte. Man kann auf folgende Weise zu dieser Vorstellung gelangen. Gegeben sei ein Strahl und eine Gerade der Einfachheit halber in solcher Lage, dafs der Strahl durch den Nachbarpunkt seines Anfangspunktes auf der Geraden gehe. Denkt man sich nun den Strahl in drehender Bewegung, so wird er auf der Geraden alle Punkte nach der einen Seite hin stetig durchlaufen (passieren): in zwei aufeinanderfolgenden Lagen des Strahles werden zwei benachbarte (endlich oder unendlich benachbarte) Punkte der Geraden getroffen. Der Schnittpunkt rückt immer weiter hinaus, ohne dafs diese Beziehungen sich ändern. Ist nun der Strahl parallel zur Geraden und nimmt man an, dafs er in diesem Falle einen unendlich fernen Punkt mit der Geraden gemeinsam habe, so kann er nun eine halbe Volldrehung machen, ohne dafs er mit der Geraden einen Punkt im Endlichen gemein hat. Während dieser ganzen Bewegung aber hat er einen unendlich fernen Punkt mit der Geraden gemeinsam. Dreht man dann noch etwas weiter, so haben Strahl und Gerade wieder einen Punkt im Endlichen gemein. Wie man nun dazu kommt, die unendlich vielen unendlich entfernten Punkte als einen einzigen zu betrachten, wird sofort klar, wenn wir drei aufeinanderfolgende Lagen des Strahles im Endlichen betrachten. Die drei zugehörigen Punkte der Geraden sind Nachbarpunkte, reihen sich stetig aneinander. Dies gilt ausnahmslos im Gebiete des Endlichen. Übertragen wir diese Betrachtung auf den Grenzfall so liegt zwischen dem äufsersten Punkte nach der einen Seite hin und dem äufsersten Punkte nach der andern Seite hin nur ein Punkt, „der" unendlich entfernte Punkt der Geraden. Noch, fast möchte ich sagen, anschlau-

licher gestaltet sich diese Untersuchung, wenn wir nicht einen Strahl und eine Gerade nehmen, sondern zwei Gerade. Hier haben wir direkt äufsersten Punkt nach der einen Seite, unendlich entfernten Punkt, äufsersten Punkt nach der andern Seite. Alle drei reihen sich stetig aneinander in völliger Analogie mit den Betrachtungen im Endlichen, es liegen sozusagen nebeneinander äufserster Punkt nach rechts, unendlich entfernter Punkt, äufserster Punkt links. Die Singularität des unendlich entfernten Punktes ist also hier noch einleuchtender.[1])

Es geht aus diesen Betrachtungen zugleich hervor, wie man zu der Fiktion des unendlich entfernten Punktes der Geraden gekommen ist: es ist eben die einheitliche Auffassung, die zu dem methodisch notwendigen unendlich fernen Punkt geführt hat. Aber auch nur aus diesem Gesichtspunkte ist die Einführung des unendlich fernen Punktes erklärlich und gestattet; nicht aber ist es etwa zwingende Wahrheit, da wir ja die Analogie des Endlichen und Unendlichen gar nicht ohne weiteres postulieren dürfen. Es ist also bei der eben beschriebnen Betrachtung sehr wohl der eine Fall als Grenzfall[2]) auszunehmen und als solcher zu bezeichnen, indem wir sagen, dafs die beiden Geraden da keinen Punkt gemeinsam haben.

Den verschiedenen Angriffen tritt nun Sturm in einem zweiten Aufsatze — H. Z. Bd. II. p. 391 — „Ueber die unendlich entfernten Gebilde" entgegen, in dem er leider anfänglich den vornehmen Ton objektiver wissenschaftlicher Dis-

---

[1]) Auch hier mufs ich wieder auf Steiner's Darstellung selbst verweisen, mit der die meinige ja im wesentlichen übereinstimmt. Ich mufs jedoch hervorheben, dafs meine Darstellung von der Steiner'schen völlig unabhängig entstanden ist; das Zitat, obwohl an früherer Stelle, ist doch erst später von mir hinzugefügt worden.

[2]) „Parallel sein heifst also zunächst nur weder konvergent noch divergent sein. — Nimmt man zu dem Zwecke in einer von zwei konvergenten Geraden einen festen Punkt an und dreht um ihn die Gerade, bis der früher konvergente Strahl divergent ist, so mufs eine Übergangsrichtung als gemeinschaftliche Grenze vorhanden sein, welche weder konvergent noch divergent d. h. parallel ist, ebenso sicher, wie ein schwingendes Pendel einmal sich in der senkrechten Richtung befinden mufs."
Zerlang in H. Z. Bd. III. p. 266.

kussion fallen läfst, obwohl er zugeben mufs: „Ich selbst bin, seitdem ich die Angriffe erfahren, erst tiefer in die Anschauung eingedrungen, deren hohen Wert als überaus kräftiges Beweisinstrument ich bei meinen nun doch schon ziemlich ausgedehnten geometrischen Untersuchungen erkannt, über deren innere Wahrheit und Berechtigung oder vielmehr Notwendigkeit ich aber noch wenig nachgedacht hatte.“

Was zunächst das Wort „unerreichbar“ betreffe, so habe er gemeint dem „physischen Menschen unerreichbar“ wegen der endlosen Zeit, die zum Erreichen nötig sein würde. Er habe es nur als Übergangswort zu unendlich entfernt gebraucht, ohne besondern Wert darauf zu legen. Es handle sich um eine Definition der Parallelen, die der neuen Anschauung sich anbequeme, ihr wenigstens nicht widerspreche. „Das scharfe Bewufstsein, was parallele Linien sind, bekommt der Schüler bald, trotzdem die Definition nicht vollkommen ist.“[1]) Vielleicht sei deshalb eine Definition in Tertia oder Sekunda nicht wichtig.

Sturm kommt dann darauf zurück, dafs die endliche Distanz zweier Parallelen in unendlicher Entfernung gegenüber dieser Entfernung ignoriert werden müsse, da sonst ein Hauptprinzip der Geometrie verletzt werde.[2]) „Man ersieht, dafs ich ebenfalls annehme, dafs sich parallele Linien in Wirklichkeit nie treffen, einen „endlichen“ Punkt nicht gemein haben; aber für uns Menschen, die wir uns von ihren unendlich entfernten Partieen eben in unendlicher Entfernung befinden, sind diese Partieen nicht verschieden, sondern identisch.“

Weiter wird die Singularität des unendlich fernen Gebildes dadurch erläutert, dafs sie eine Folge der Relation zu den endlichen Punkten sei.

„Mit den endlichen Gröfsen verglichen sind die unendlich

---

[1]) Dieses scharfe Bewufstsein, was parallele Linien sind, ist meiner Meinung nach eben die Auffassung der Parallelen als solcher Linien, die in konstanter Entfernung nebeneinander herlaufen und sich daher nie treffen.

[2]) Auch hier also tritt wieder das Prinzip in den Vordergrund, nicht die Wahrheit der Auffassung. Man vergleiche Kober's Replik und Fresenius, Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde. H. Z. Bd. II. p. 494.

grofsen Gröfsen alle gleich, mit einander verglichen sind sie verschieden.“

„So haben also auch für uns die sämtlichen unendlich fernen Punkte einer Geraden, sobald wir sie in Beziehung setzen zu endlichen Punkten, den Wert eines einzigen Punktes. Nehmen wir irgend einen endlichen Punkt der Geraden als Ausgangspunkt, so entspricht jeder Entfernung von demselben ein Punkt, der Entfernung ∞ also auch (nur) ein Punkt.“[1])

„Zwei Parallelen haben also einen „endlichen“ oder „eigentlichen“ Punkt in Wahrheit nicht gemeinsam, aber ihre unendlich fernen (uneigentlichen) Punkte sind identisch; ihre unendlich fernen Partieen befinden sich, möchte ich sagen, in demselben unendlich fernen Punkte.“

Sturm knüpft noch weitere Betrachtungen über unendlich entfernte Gebilde an, kommt auf das Reziprozitätsgesetz zu sprechen, erwähnt die Degeneration und die imaginären Gebilde und betrachtet schliefslich „die Sache auch etwas mit Hilfe der analytischen Geometrie“.

p. 406 macht Sturm einige Bemerkungen, die uns zu der zweiten Auffassung hinüberführen. Es heifst da: „Gewöhnlich wird bei parallelen Linien viel von Richtung gesprochen, ohne dafs die Bedeutung dieses Wortes vorher erläutert worden ist. Gemeinhin pflegt man zu demselben noch die Bestimmung wohin? hinzuzufügen: „ich gehe in der Richtung auf eine Stadt,“ „die Kanonen schossen alle in derselben Richtung d. h. auf denselben Punkt hin“. Wenn man in der Geometrie das Wort ohne den bestimmten Zusatz gebraucht, so geschieht dies infolge einer ein für alle Male gemachten Konvention über das Ziel der Richtung: wenn nun aber gerade parallele Geraden als von derselben Richtung bezeichnet werden, so müssen doch auch sie ein gemeinsames

---

[1]) Wird nicht eine Richtung auf der Geraden festgesetzt, so entspricht jeder Entfernung vom Ausgangspunkt nicht ein Punkt, sondern wir erhalten zwei Punkte, einen nach rechts und einen nach links. Ist somit Sturm's Prämisse falsch, so ist es auch die Schlufsfolgerung, dafs der Entfernung ∞ ein Punkt entspreche. Dieser Beweis erscheint also verfehlt. Man vergleiche meine Ausführungen zu diesem Punkte weiter oben.

Ziel für ihre Richtung haben: ein unendlich fernes — als Punkt erscheinendes — Objekt."

Damit verfällt Sturm in den verhängnisvollen Irrtum, Richtung und Ziel zu verwechseln: ein äufserst schwerer Fehler, der uns bei der sonstigen Schärfe der Auffassung sehr merkwürdig berührt. Was darüber zu sagen ist, findet sich im § 1 des ersten Kapitels; hier nur kurz noch einmal die Zurückweisung: Was dasselbe Ziel hat, hat deshalb nicht dieselbe Richtung; und umgekehrt. Wenn zwei Menschen auf eine Stadt zugehen, so haben sie — im allgemeinen — nicht dieselbe Richtung.

Sturm fährt dann fort: „Zwei Linien haben dieselbe (oder gleiche) Richtung, wenn sie nach demselben unendlich entfernten Punkte (oder nach zwei verschiedenen im Unendlichen gelegnen, aber für uns identischen Punkten) hinstreben. Zwei Menschen gehen in derselben Richtung (ohne Zusatz), wenn sie dasselbe unendlich entfernte Objekt stets im Auge behalten; die Absicht es erreichen zu wollen, ist ja gar nicht notwendig."

In diesen Worten liegt wieder dieselbe Verwechslung wie oben, die Verwechslung von Ziel und Richtung. Nur ist allerdings zu bemerken, dafs hier die einzige zulässige Ausnahme vorliegt. In dem Falle nämlich, wo zwei Geraden parallel sind, treffen die beiden Bedingungen gleichzeitig ein, dafs die Geraden sowohl gleiche Richtung[1]) als auch gleiches Ziel haben. Hier, aber auch nur hier, darf beides gleichwertig für einander gebraucht werden. Vielleicht ist dies der Grund, der Sturm zu seinem Irrtum veranlafst hat.[2])

Nicht unbeachtet dürfen dann die Worte in der Klammer bleiben. Danach haben jede zwei gerade Linien gleiche Richtung, denn sie sind doch nach verschiedenen im Unendlichen gelegnen Punkten gerichtet. Man sieht, selbst die Angriffe haben doch immer noch nicht vermocht, völlige Klarheit zu schaffen.

Wir sind mit den letzten Erörterungen schon tief in das Gebiet der zweiten Definition gedrungen, wollen aber doch

---

[1]) Nach allgemeinem Sprachgebrauch.

[2]) Man vergleiche H. Z. XVI. p. 339.

erst noch einmal zur ersten Definition zurückkehren und unsre Ansicht darüber kurz aussprechen. Nach unsern Erörterungen hat sich ergeben, dafs die Definition in ihrer ursprünglichen Form durchaus brauchbar für den Schulunterricht ist, besonders wenn man Veranlassung nimmt, sie mit der dritten Definition, die den konstanten Abstand benutzt, zu kombinieren. Dagegen empfiehlt es sich auf der Schule vorläufig von einer Definition, die sich modernen Ansichten anpafst, abzusehen.[1])

2) Die Geraden haben dieselbe oder gleiche Richtung (Richtungen)

oder die Geraden bilden mit einer Transversalen gleiche Winkel.

Die vorliegende Erklärung ist sehr beliebt; soweit wir im Augenblick übersehen können, diejenige, die bei weitem die andern überwiegt. Sieht man genauer nach, so wird man finden, dafs die meisten, die sich ihrer bedienen, eine nähere Erörterung des Begriffes Richtung nicht für nötig gehalten haben. So war es bequem auf grund eines nicht genau präzisierten Begriffs eine Erklärung der Parallelen aufzubauen, die aber dadurch selbst unklar blieb.

Wir müssen zunächst gegen die äufsere Form der Definition uns aussprechen. Vor allen Dingen ist es der Ausdruck dieselbe Richtung, gegen den ich immer wieder ankämpfen werde, wenn auch Hr. Professor Lorberg in Bonn mich deshalb für einen noch gröfsern Ignoranten in mathematisch-philosophischen Erörterungen halten sollte, als er jetzt schon thut — vorausgesetzt, dafs das möglich ist. Es liegt nämlich hier durchaus etwas Besondres vor. Wir können von zwei Gegenständen sagen, sie haben dieselbe Farbe; aber das ist etwas ganz andres, als: zwei Gerade haben dieselbe Richtung. Ich habe schon im II. Kapitel auf die Besonderheit unsres Falles hingewiesen. Zwei Gerade, die dieselbe Richtung haben, sind durchaus nicht anders zu denken, als zusammenfallend. Es leuchtet das ein, wenn wir von Einer bestimmten Richtung

---

[1]) Man vergleiche noch: Scherling, Der Streit über den unendlich entfernten Punkt. — H. Z. Bd. III. p. 463. — Ferner die Diskussion Reidt-Weinmeister, H. Z. XI. p. 111, f.

ausgehen. Denken wir uns dann zwei Gerade in dieser Richtung, so fallen sie unweigerlich zusammen, d. h. Gerade mit derselben Richtung sind zusammenfallend, nichts anderes. Man erkennt aber auch an diesem Beispiele sofort den Unterschied zwischen unserem besondern Falle und irgend einem andern z. B. dem von uns gewählten Beispiele der Farbe. Dieselbe Farbe kann ich mir mehreremale, an verschiednen Orten denken, ohne daſs dadurch ihre Qualität irgendwie berührt wird; anders bei der Richtung. Eine bestimmte Richtung ist eben nur einmal vorstellbar, wollten wir sie uns an verschiednen Stellen vorstellen, so bleiben sie eben nicht die Eine bestimmte Richtung. Es geht also hieraus hervor, daſs Richtung nicht eine Eigenschaft ist, welche bei zwei verschiednen Geraden völlig übereinstimmen kann. Wer mir hier etwa entgegnen will, daſs z. B. doch viele Linien denkbar seien, die alle Nord-Südrichtung haben würden, den bitte ich sich diese Linien direkt oder nahe beim Nord- oder Südpol vorzustellen, woraus sich sofort ergeben wird, daſs die Identität der Richtung nur den Worten, nicht der Sache nach besteht. Ganz analoges gilt für Ausdrücke wie „wagerecht“, „senkrecht“. Auch hier handelt es sich nur um eine scheinbare Identität, denn diese Worte bedeuten eben an vorschiednen Orten etwas anderes, wenn auch wesentlich identisches. Es ist aber auch hier unser Spezialfall völlig da, wenn wir uns im Raum die Nord-Südrichtung denken, die also vom Nord- nach dem Südpol hingeht. Dann giebt es auch hier nur Eine, und alle Geraden, die sie haben, fallen in eine zusammen, die bestimmt ist durch die beiden Punkte Nordpol und Südpol.

Eine weitere Frage ist nun, ob es heiſsen dürfe: Gerade von gleicher Richtung resp. die Geraden haben gleiche Richtung, oder ob es heiſsen müsse: die Geraden haben gleiche Richtungen.

Zu dieser Frage bemerkt Hoffmann in seiner Zeitschrift Bd. XXIII. p. 341:

„Man findet immer noch hier und da die Definition: Parallele Gerade sind solche, welche gleiche Richtung haben.

Zuvörderst ist diese Definition sprachlich fehlerhaft.

Was ist „gleiche Richtung"? Es giebt höchstens Richtungen, welche einander gleich sind oder kürzer ausgedrückt: „einander gleiche Richtungen", oder in der Einzahl: „eine Richtung, welche einer andern gleich ist". Ähnlich: „Was ist eine gleiche Kugel?"

Hiermit können wir nicht übereinstimmen. Der Sprachgebrauch hat sich bei diesen Wendungen freier entwickelt und es wird Niemandem einfallen darin einen Fehler zu suchen, wenn man z. B. sagt, zwei Gegenstände haben gleiche Farbe. Man würde sogar, wenn sie einfarbig wären, es für einen Fehler halten zu sagen, die beiden Gegenstände haben gleiche Farben, da man dann daran denken würde, dafs beide mehrfarbig seien. Gegen den Gebrauch des Singulars liefse sich also an sich nichts einwenden.

Des weitern bemerkt dann Hoffmann, dafs der Ausdruck „gleich" deshalb nicht zulässig sei, weil man in der Mathematik „gleich" nur für Gröfsen also im Sinne von „gleich grofs" gebrauchen dürfe. Auch dies scheint uns eine Einschränkung, deren Notwendigkeit wir nicht einsehen. Wollte man aber diese Einschränkung festsetzen, dann würde für den Ausdruck „gleiche Richtung" dasselbe gelten, was wir weiter oben für „dieselbe Richtung" auseinandergesetzt haben: wir haben es hier mit einem Fall zu thun, wo Gleichheit und Identität zusammenfallen.

Von der gröfsten Wichtigkeit erscheint uns wieder in Bezug auf diesen Ausdruck das Wesen der Richtung selbst, dafs wir hier keine Nuancen haben, wie bei Farbe, Licht etc., so dafs also die Gleichheit mit der Identität wie gesagt zusammenfällt. Doch wird es notwendig sein, auf die Elemente zurückzugehen, um völlige Klarheit zu schaffen. Zwei Richtungen, die wir mit einander vergleichen, können entweder — man denke an die Erörterungen des § 1 im ersten Kapitel — den einen oder den andern Punkt oder beide konstituierende Elemente oder nichts gemeinsam haben. Haben sie den Ausgangspunkt gemeinsam, das Ziel verschieden: so sind die Richtungen verschieden; haben sie verschiedene Ausgangspunkte, aber gleiches Ziel: so sind die Richtungen verschieden; haben sie gleichen Anfang und gleiches Ziel: so sind die Rich-

tungen gleich d. h. hier also identisch (dieselben). — Niemand aber wird doch bei einer solchen Analyse auf den Gedanken kommen, dafs nun zwei Richtungen gleich seien, die weder in der einen, noch in der andern Hinsicht (Element) übereinstimmen.[1])

Was dazu geführt hat, die Richtung in die Definition der Parallelen einzuführen, ist wohl einerseits die früher übliche Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes[2]) gewesen — was dann für Parallelen die Richtungsgleichheit ergab[3]) — andererseits der sogenannte Richtungsbeweis, der so verlockend bequem erscheint, in der That aber nur ein circulus ist. Er wird auch direkt zur Definition verwendet, resp. das in ihm liegende Agens, wenn man bei der Definition der Parallelen ausgeht von dem Umstand, dafs sie mit ihren Transversalen gleiche Winkel bilden. Aber hier werden Eigenschaften, die aus der Definition folgen, vorweggenommen und zur Definition verwendet, was offenbar nicht zulässig ist.[4])

Wir sind also auf das Bestimmteste dafür, dafs eine Definition der Parallelen, die sich auf den Richtungsbegriff stützt, zu verwerfen sei; dafs aber, wenn eine solche dennoch

---

[1]) Hierzu vergleiche man aus dem Artikel „Studien über geometrische Grundbegriffe" des Herausgebers der H. Z. den Abschnitt „Gleiche Richtungen", IV. p. 111, der für die hier erörterten Fragen von grofser Bedeutung ist.

[2]) „Parallelen heifsen Linien gleicher Richtung. Die Gleichheit der korrespondierenden Winkel ergiebt sich aus der Gleichheit der Richtungsunterschiede."

J. Kober, Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. III. p. 261. — Vergl. auch H. Z. III. p. 535.

[3]) Die Alten hatten das Wesen gleich im Namen zum Ausdruck gebracht: das Nebeneinander (ohne etwas Gemeinsames). Auch von diesem Gesichtspunkte aus ist es ganz unzulässig, nun plötzlich statt des Trennenden das Einigende (Gleiche) hervorzuheben. So nur konnte es auch kommen, dafs man im gewöhnlichen Leben ganz verkehrter Weise verwandte Anschauungen z. B. als parallel zu bezeichnen pflegt.

[4]) „Die Mathematik soll auch den Schein der Phrase vermeiden, deshalb halte ich es jetzt für ganz verwerflich, die Parallelentheorie mit dem Richtungsunterschiede abzumachen."

Ziegler, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. — H. Z. III. p. 189.

beliebt wird, weder von derselben noch von der gleichen Richtung die Rede sein dürfe, sondern dafs man dann nach einem passenderen Ausdruck zu suchen hat.

Schon oben war in einer Fufsnote darauf hingewiesen, dafs Hoffmann sich mit hierhergehörigen Untersuchungen beschäftigt hat; auch er kommt dabei zu dem Resultat, dafs das Kriterium für die Gleichheit von Richtungen in dem gleichen Richtungsunterschiede gegen eine dritte Gerade zu suchen sei. Dann kommt er auf den Unterschied von gleichgerichtet und parallel zu sprechen und hierbei kommt auch ihm der Gedanke, dafs der Ausdruck „gleiche Richtung" seine Bedenken habe, denn er sagt in einer Fufsnote: „Ob es nicht zweckmäfsiger sein dürfte, den Begriff gleiche Richtung mit ähnliche Richtung zu vertauschen, will ich hier nur angeregt haben." Diese Worte zeigen deutlich, dafs auch ihm Skrupel an dem landläufigen Ausdruck aufgestiegen sind. Es ist eben die Definition der Parallelen mit Hülfe von gleichen Richtungen nichts anderes, als eine Erklärung idem per idem. Was für die Richtungen gleich, ist für die Geraden parallel. Kein Mensch wird sich sogenannte gleiche Richtungen vorstellen können, ohne dafs er sich parallele Gerade denkt, oder gar gleiche Richtungen vor parallelen Geraden denken. Die ganze Definition ist ein Spiel mit Worten.

Gilles stellt sich energisch auf den Standpunkt der Richtungsdefinition der Parallelen in einem Aufsatze „Bedenkliche Richtungen in der Mathematik" in H. Z. XI. p. 17. Allerdings sagt er: „Selbstverständlich mufs der Begriff gleiche Richtung definiert werden; wenn dabei auch ein axiomatisches Element zurückbleibt, so ist dasselbe doch in der möglichst elementaren Form einzuführen." Er verweist dabei auf sein Lehrbuch S. 9 und S. 6, wo sich Seite 9 folgendes findet:

„Die Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und eine Richtung, in welchen Angaben das ganze Wesen der Geraden enthalten ist." Aufzählung der Fälle:

„2. c) Der Ausgangspunkt ist verschieden, die Richtung dieselbe."

„EF und RS haben dieselbe Richtung bedeutet, dafs beide Geraden sich nur der Lage nach unterscheiden, so dafs

die Gerade *EF*, wenn sie in allen Punkten sich gleichmäfsig über die Gerade *ER* gleitend bewegt, in demselben Augenblick die Lage *RS* bekömmt, wenn ein Punkt derselben in die Gerade *RS* fällt, d. h. alle Punkte fallen zu gleicher Zeit in *RS*.“

Selbst mit dieser, den gewöhnlichen Darstellungen gegenüber sehr viel gewissenhafteren Behandlung können wir uns nicht befreunden. Die geschilderte Bewegung setzt die Kenntnis des Parallelen voraus.

Von besonderer Wichtigkeit ist ferner noch ein hierhergehöriger Aufsatz: „Der sogenannte Richtungsbeweis in der Lehre von den Parallelen“ von Dr. Hubert Müller in H. Z. XVI. p. 407.

Er leitet den Artikel mit folgenden Worten ein: „Schwierige geometrische Beweise sind kaum an einer andern Stelle des Unterrichts so unangenehm wie in der Lehre von den Parallelen, einmal, weil sie Knaben von 12 Jahren beigebracht werden müssen, und zweitens, weil die zu beweisenden Sätze so sehr einfach und jedem Schüler von vornherein anschaulich gewifs sind. In der lobenswerten Absicht hier Hülfe zu schaffen hat man den Grundsatz „Parallele Linien haben gleiche Richtung“ aufgestellt und mit demselben einen Beweis geführt, welcher in dieser Zeitschrift (IX. 192) angegriffen worden ist.“

Bolze hat nämlich am angeführten Ort gezeigt, dafs es sich bei dem sog. Richtungsbeweis um einen Scheinbeweis handelt. Müller giebt dies nicht zu und sucht an einem Beispiele die Richtigkeit seiner Behauptung nachzuweisen. Er sagt dann:

„Der Schwerpunkt liegt in dem Begriffe Richtungsunterschied, welcher sich dem allgemeinen Begriffe des Unterschiedes ebensowenig fügt, als die Potenzen mit negativen Exponenten dem ersten Potenzbegriff sich unterordnen. Der Richtungsunterschied wird nicht durch Abziehen einer Richtung gefunden, oder umgekehrt gesagt: der Richtungsunterschied ist nicht wieder eine Richtung, sondern ein Winkel.“

„1) Linien gleicher Länge sind solche, deren Längenunterschied Null ist. Dafs auch die Parallellinien als Linien

gleicher Richtung solche sind, deren Richtungsunterschied Null ist, darf man nicht als logisch evident ansehen; dieser Ausspruch kann aber anschaulich evident sein."

Linien gleicher Richtung würden zunächst Schenkel eines Nullwinkels sein; sie sollen aber auch parallel sein. Es handle sich also um eine Identität des Nullwinkels und des Streifens zweier Parallelen. Es wird dann das Bedenkliche dieser Identität ausführlich erörtert.

„2) Gleiche Richtungen bilden mit derselben dritten gleiche Richtungsunterschiede" dürfe nicht unmittelbar als richtig angesehen werden.[1]) Auch hier zeigt sich die Unzulänglichkeit des Richtungsbeweises.

Müller faſst seine Resultate in den beiden Sätzen zusammen:

„1) Wer mit Richtungen operieren will, darf den unendlich fernen Punkt nicht verleugnen.

2) Wer den Richtungsbeweis führt, begeht den Fehler, daſs er Auffassungen, welche erkannten Wahrheiten entspringen, als Anschauungen aufstellt, um aus ihnen die ursprünglichen Wahrheiten als logische Folgerungen abzuleiten."

Wir können uns den Ausführungen Müller's im wesentlichen nur anschlieſsen, besonders der zweite Satz ist uns völlig aus der Seele gesprochen, auch wir sehen im Richtungsbeweise einen völligen circulus.

---

[1]) In Schlömilch's Geometrie des Maſses findet sich:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Richtung } a = \text{Richtung } b \\ \text{Richtung } c = \text{Richtung } c\end{array}}{\text{Winkel } ac = \text{Winkel } bc}$$

„weil Gleiches mit Gleichem verglichen Gleiches liefert."

Ziegler bemerkt dazu (H. Z. III. p. 189): „Dieser verzwickte Ausdruck beweist die Unsicherheit des Schlusses und berechtigt zu folgendem Dilemma: Ist diese Vergleichung eine Subtraktion oder nicht? ist Unterschied im gewöhnlichen Sinne gleich Differenz, dann kann die Differenz zweier Richtungen nur wieder eine Richtung (kein Winkel) sein, oder ist es ein neuer Begriff, dann ist Richtungsunterschied ebenso tautologisch als Neigung. Schon die Möglichkeit eines solchen Zweifels macht die Argumentation als Schleichweg verdächtig, diese hat in dem Miſsbrauche des Gleichheitszeichens eine fatale Ähnlichkeit mit dem bekannten Beweise, daſs eine Katze drei Schwänze hat."

Hiermit wollen wir die Besprechung dieses zweiten Definitionsversuchs für Parallelen beschliefsen.

3) Die Geraden haben konstanten Abstand. Bei der Besprechung dieser Definition können wir uns ganz kurz fassen, da alles Wesentliche schon besprochen worden ist, besonders bei Gelegenheit von Definition 1). Sowohl in unserer allgemeinen Erörterung am Anfang dieses Kapitels, wie bei der Besprechung der ersten Definition haben wir unsrer Ansicht unverhohlenen Ausdruck gegeben, dafs wir diese Definition wissenschaftlich für korrekt halten und für den Schulgebrauch für am geeignetsten. Dafs zwei Gerade, die überall gleichen Abstand haben, sich niemals treffen werden, ist anschaulich evident, aber auch die Winkelsätze bei einer Transversalen lassen sich auf Grund dieser Definition sehr leicht beweisen, wie das folgende Kapitel lehren wird.

Auf Grund der Untersuchungen schlagen wir also für die Schule folgende Fassung für die Definition von Parallelen vor:

Haben zwei Gerade konstanten Abstand von einander, so dafs sie keinen Punkt gemeinsam haben, so heifsen sie parallel.[1])

An diese Definition dürfen sich dann eine Reihe von Grundsätzen ohne weiteres anreihen.

Nachdem so die drei Definitionen der Parallelen zur Erörterung gekommen, bleibt noch übrig, der Versuche zu gedenken, die gemacht worden sind, an die Stelle des Problems ein andres zu setzen. Nachdem man erkannt hatte, dafs das Problem unbeweisbar war oder besser, dafs sein Beweis noch offen war, und nachdem man dies als einen vermeintlichen Fehler der sonst so strengen Euklidischen Geometrie anzusehen sich befleifsigte, tauchten eine Menge von Versuchen auf, das Problem entweder zu beweisen oder durch ein andres, das der Anschauung mehr entsprechen sollte, zu ersetzen.

Von diesen Versuchen wandten sich die einen dahin, den geometrischen Ort zu konstruieren aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben. Dafs sich dafür eine Linie ergeben müsse, stand klar fest, aber ein strenger Beweis dafür,

---

[1]) Man vergl. II. Z. XXIII. p. 342.

dafs wir es hier mit einer Geraden zu thun haben, liefs sich ebensowenig erbringen, wie ein Beweis für das eigentliche Problem.

Sehr vielseitig gestalteten sich die Versuche das Axiom, das sich an die Parallelenlehre anschlofs, durch ein andres zu ersetzen, von denen ich hier vorläufig nur einige erwähnen will: bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten wird sich Gelegenheit finden, näher auf die Fragen einzugehen.

Bolyai: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich.

Legendre: Durch jeden Punkt im Innern eines Winkels läfst sich eine Gerade ziehen, die beide Schenkel schneidet.

Schotten: Die Winkelsumme in ebenen Polygonen ist konstant.

Simon: Sind in einem Viereck drei Winkel rechte, so ist es auch der vierte.

Das berühmte Axiom, das sich nun an die Parallelendefinition anschliefst und das den Anlafs zu den tiefsinnigsten Untersuchungen gegeben hat, wird allgemein als das elfte Axiom Euklids bezeichnet. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dafs es nicht von Euklid als Axiom aufgestellt worden ist, sondern in der Form eines Postulates. Die falsche Stellung nimmt es in den Ausgaben Euklids seit Gregory 1703 ein[1]) (Ausnahmen Peyrard 1814, August 1826). Es lautet: Zwei Gerade, welche von einer dritten so geschnitten werden, dafs die inneren Winkel an derselben Seite der Schneidenden zusammen kleiner als zwei Rechte sind, schneiden sich, gehörig verlängert, an eben dieser Seite. — Wie schon gesagt sind die Versuche, dieses Axiom durch ein andres zu ersetzen resp. zu beweisen, zahlreich gewesen. Heutzutage findet man an seiner Stelle in den Lehrbüchern gewöhnlich den Grundsatz: Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele ziehen, ein Satz, der auch oft als Lehrsatz aufgestellt wird.

Warum gerade dieses Axiom in der Reihe der übrigen

---

[1]) Lindemann im Bd. II der Vorlesungen: Das vierte und fünfte Postulat sind in der ersten griechischen Ausgabe von Euklids Elementen (Basel 1533, Hervagius) unter die Axiome gestellt. Peyrard 1814—18 stellte die richtige Ordnung aus den Handschriften wieder her.

Anstofs erregte, liegt in der Natur der Sache. Die Axiome 1—9 sind rein logisch, resp. Axiome der allgemeinen Gröfsenlehre, daran schliefsen sich die geometrischen Axiome 10—12, von denen 10 und 12 anschaulich evident sind, 11 aber der Anschaulichkeit entbehrt, da es sich um Unendliches handelt. Wer die Gerade als unendlich nach beiden Seiten hin ansieht, für den existiert allerdings die Frage nach dem 11. Axiom nicht, so dafs eigentlich das 11. Axiom nicht den Angelpunkt der Untersuchungen bilden sollte, sondern die Auffassung der Geraden.

Schon im Altertume hatte man übrigens den Zusammenhang des vorliegenden Problems mit der Frage nach der Winkelsumme im Dreieck erkannt. Schon Proclos, Euklids bedeutendster Kommentator, bemerkte, dafs das 11. Axiom die Umkehrung sei des Satzes: In jedem Dreieck betragen zwei Winkel zusammen weniger als zwei Rechte, da alle drei erst zwei Rechte zusammen betragen.

Gauss stellte zuerst 1792 die Behauptung auf, dafs das Parallelenaxiom eine Erfahrungsthatsache und folglich unbeweisbar sei. Von da an datieren denn die Arbeiten, die eine Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom aufstellen. Wir werden Gelegenheit finden, bei der Besprechung einschlägiger Schriften hier und da über diese Arbeiten zu sprechen, ohne hier auf die Frage selbst tiefer eingehen zu müssen, da für die Schule die betreffenden Untersuchungen ohne praktisches Interesse sind.

Entschieden mufs nur die Frage werden, welche Stellung man im allgemeinen System dem Satze anweisen will, wenn man ihn als Axiom nicht anerkennt. Axiom ist das notwendige Minimum der Voraussetzung oder das Urteil, das auf den Grundbegriffen sich aufbaut ohne durch Beweise auf andre Urteile zurückgeführt werden zu können. Als ein derartiges Urteil also vermag die Schule der Nicht-Euklidiker das 11. Axiom nicht anzusehen, sondern sie fafst dasselbe als einen Einschränkungssatz, durch den aus der absoluten Geometrie ein bestimmter beschränkter Teil ausgeschieden wird, derjenige, den wir jetzt als Euklidische Geometrie zu bezeichnen pflegen, den wir besser als anschauliche Geometrie bezeichnen würden.

Ein weiteres Eingehen erspare ich mir und komme direkt

auf die hierhergehörigen Arbeiten. Zunächst will ich eine Reihe von Abhandlungen aus Grunert's Archiv besprechen, dann eine Anzahl Programmarbeiten, die direkt unser Thema zum Gegenstand haben. Daran schliefsen sich die Zitate aus den Lehrbüchern an.

Grunert's Archiv Bd. 8, S. 320 findet sich eine Abhandlung von Matzka, Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie. Der Verfasser leitet seine Arbeit mit den Worten ein:

„Die Lehre von den parallelen Geraden hat allbekanntlich die hinderliche Eigenheit, dafs man, wie man es auch immer anfangen mag, doch jedesmal auf einen Satz stöfst, der sich nicht in der gewöhnlichen Weise aus seinen Vorläufern, oder aus der Natur der in ihm verbundnen geometrischen Begriffe erweisen läfst."

Die Ursache liege in der Unmöglichkeit, die einfachen Begriffe „Lage und Richtung" erklären oder charakterisieren zu können. Als Abhilfen habe man vielerlei Erklärungen der Parallellinien versucht, allein „es handle sich hier nicht um eine Sach- sondern um eine Worterklärung, d. h. eigentlich um Angabe des Grundes für die Wahl einer Benennung einer bereits erkannten Eigenschaft zweier unbegrenzten geraden Linien."

Die beiden Geraden seien 1) gleichgerichtet oder gleichlaufend, 2) gleichabständig. Das letztere dürfe man aber nicht in die Erklärung hineinnehmen. Erst wenn nachgewiesen sei, dafs beide Eigenschaften sich gegenseitig bedingten, dürfe man den Ausdruck parallel gebrauchen.

Eine andre Abhülfe sei Grundlegung eines möglichst einleuchtenden Lehrsatzes. Hier seien die, die sich auf das Dreieck stützten, von vornherein zu tadeln. Im Übrigen seien es besonders folgende beiden:

1) Zu einer Geraden giebt es durch jeden Punkt nur eine Parallele.

2) Zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, sind es auch zu einander.

Der Hauptgrund für ihre Aufstellung sei die Analogie; doch widersprächen dem andre Analogieen.

„Die dritte Abhülfe ist die Berücksichtigung des allgemein und streng erweisbaren notwendigen Zusammenhanges zweier Paare unzertrennlich zusammenbestehender Beschaffenheiten oder Merkmale und die daraus folgende Aufstellung der vier, solchen Zusammenhang umständlich und vollständig aussprechenden Sätze."

Der Verfasser stellt sodann einen neuen Hauptlehrsatz der Logik auf und wendet dieses Gesetz dann auf die Parallelentheorie an. Der weitere Gang der Abhandlung ist zu ausführlich, um wörtlich zitiert werden zu können, andrerseits entzieht sich die Arbeit einer kurzen Wiedergabe. Die „Schlufsbemerkung" lautet:

„Nunmehr unterliegt es keinem weitern Anstande, vor aller Kenntnis der Lehre vom Dreiecke, blofs durch Deckung von ebenen Figuren nachzuweisen, dafs durchaus getrennte Geraden auch durchweg gleichabständig von einander sind. Dann ist man berechtigt, solchen Geraden die Benennung parallel zu geben."

Gr. Arch. Bd. 15, p. 361 behandelt Germar „Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibaut's Beweise der Summe der Dreieckswinkel für die gesamte Elementargeometrie und besonders für die Theorie der Parallelen." In der Einleitung heifst es: „Nach einer Äufserung des Proclos schreibt Eudemus den euklidischen Beweis des Satzes, dafs die Summe aller Dreieckswinkel gleich zwei rechten Winkeln sei, den Pythagoräern zu; er war also schon lange vor Euklides in Gebrauch."

Diese Beweisart gründe sich auf die Gleichheit der Wechselwinkel und danach habe Euklid seine Parallelendefinition gerichtet gegen seinen strengen, logischen Takt.[1])

[1]) „Nach allem sind wir gegenwärtig zu der Annahme berechtigt, dafs das Parallelenaxiom sich aus den übrigen Grundvoraussetzungen der Geometrie nicht ableiten läfst und in der That nur als Axiom eingeführt werden kann. Es ist nicht gerade anzunehmen, dafs Euklid sich diesen modernen Anschauungen schon genähert habe; aber aus der Ordnung der Sätze des ersten Buches ergiebt sich zur Evidenz, dafs ihm die eigen-

Eine Definition der Parallelen müsse vom genus Parallellinien überhaupt ausgehen, ehe sie auf gerade Parallele ausgehe. „Für das genus ist aber schwerlich ein anderes Merkmal aufzufinden, als das, welches der sensus communis überall mit dem Parallelismus verbindet, nämlich den durchgängigen gleichen Abstand.“

Der Beweis, dafs derartige Linien sich nicht schnitten, sei leicht, während dies umgekehrt keineswegs der Fall sei, nämlich, dafs gerade Linien, welche unendlich verlängert sich nicht schneiden, deswegen gleichen Abstand haben müfsten.

Ebenso sei der Beweis unmöglich, dafs zwei Gerade, die in zwei Punkten gleichen Abstand hätten, überall gleichen Abstand hätten, wenn nicht vorher der Satz von der Dreieckswinkelsumme unabhängig von der Parallelenlehre gefunden sei.

Vermehrt werde die Schwierigkeit durch den unbestimmten Begriff der geraden Linie, wenn er sich auf die Richtung stütze.

Von der gröfsten Wichtigkeit sei demnach der Thibaut'sche Beweis von der Dreieckswinkelsumme.

Es folgt dann eine höchst umständliche Herleitung des Thibaut'schen Satzes und der dazu nötigen Hülfssätze; auch die direkten Folgesätze werden aufgestellt.

„Jetzt sind alle Vorbedingungen vorhanden, deren es bedarf, um zum Endziele zu gelangen, d. h. den überall gleichen Abstand der geraden Parallelen, und die Gleichheit ihrer Wechselwinkel nach Euklidischer Methode durch die Gleichheit der Dreiecke zu beweisen.“

Zuerst wird der Satz bewiesen, dafs zwei gerade Vertikalen auf einer Geraden parallel sind d. h. überall gleichen Abstand

---

artige Stellung dieses Axioms bereits klar wurde und dafs er ganz deutlich Sätze unterschied, die von dem Axiom unabhängig sind, und solche, die sich nur mit seiner Hülfe beweisen lassen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dafs bei Euklid das Motiv dieser Scheidung nur das Unbehagen darüber war, Sätze mit Hülfe einer nicht zu beweisenden Wahrheit zu begründen, deren Evidenz doch nicht unmittelbar auf der Hand liegt.“

Rausenberger, Euklids Elemente, aus „Berichte des Freien Deutschen Hochstifts“, Jahrg. 1890.

haben; dann daſs, wenn von zwei Geraden in einer Ebene jede von einer dritten Geraden vertikal geschnitten wird, diese parallel sind. Es wird dann zu einer beliebigen Transversale übergegangen und zum Schluſs der Satz bewiesen, daſs bei gleichen Wechselwinkeln die Geschnittnen parallel sind.

Im 18. Bd. von Grunerts Archiv giebt Hörlych einen „Abriſs eines Beweises für den sogenannten elften Euklidischen Grundsatz". Dieser Beweis beruht auf der unendlichen Konstruktion halbseitiger Dreiecke und teilt also diese Schwäche mit allen ähnlichen Versuchen. Der Herausgeber entschuldigt übrigens die Aufnahme des Artikels in das Archiv in einer Nachschrift.

Wichtiger erscheint ein Aufsatz „Ueber den zweiunddreiſsigsten Satz im ersten Buche der Elemente des Euklides" von W. Fischer in Gr. Archiv, Bd. 28, p. 365. Auch hier handelt es sich um Thibaut's Beweis. Als ersten Grundsatz spricht er aus, daſs man einen Strahl drehen könne und daher auch die Lage zweier gegebenen Strahlen als Resultat einer Drehung ansehen könne. Die fertige Drehung heiſse Winkel. Zusammenhang zwischen voller Drehung und vollem Winkel. Dem folgt Definition des gestreckten Winkels und darauf der Grundsatz:

„I. Ein Strahl kann durch keine einfachere und kürzere Bewegung aus einer gegebnen Richtung in die entgegengesetzte gelangen, als dadurch, daſs er um seinen Anfangspunkt einen gestreckten Winkel beschreibt."

„II. Auf einer Ebene kann ein Strahl, der eine gegebene Richtung verläſst, ohne rückläufig zu werden, durch keine einfache und kürzere Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkommen, als durch eine volle Umdrehung um seinen Anfangspunkt als Scheitel."

Es folgt dann der Lehrsatz, daſs alle gestreckten Winkel gleich sind, mit einer Reihe von Zusätzen über Vollwinkel, hohle, erhabene, rechte etc.

Grundsatz. „Bei zwei Strahlen, die in verschiednen

Richtungen von einem Punkte auslaufen, ist keine einfachere und kürzere Bewegung aus dem einen in den anderen denkbar als die Drehung, wodurch der hohle Winkel zwischen ihnen erzeugt wird.“

Daran schliefst sich dann der Lehrsatz: „Bei jedem Dreieck ist die Summe der drei Innenwinkel gleich einem gestreckten Winkel oder $= 2R$.“

Es wird die bekannte Schiebung und Drehung vorgenommen. (α, β, γ sind die Innen-, x, y, z die Aufsenwinkel.)

„An sich betrachtet ist die gesamte Drehung des Strahls $= x + y + z$.

Dieselbe kann aber, da sie zwar um drei verschiedene Punkte, jedoch fortwährend in einerlei Sinn vor sich ging, und da der bewegliche Strahl schliefslich in seine ursprüngliche Lage zurückkam, unmöglich kleiner sein als eine volle Umdrehung um einen einzigen Punkt. Folglich ist jedenfalls

$$1) \quad x + y + z \text{ nicht kleiner als } 4R,$$

obwohl man wegen Ermangelung eines gemeinschaftlichen Scheitels vorläufig $x + y + z$ noch nicht $= 4R$ setzen kann.“ Da nun $x + y + z + \alpha + \beta + \gamma = 6R$, so ist

$$2) \quad \alpha + \beta + \gamma \text{ nicht gröfser als } 2R.$$

„Demnach bleibt zu beweisen übrig, dafs $\alpha + \beta + \gamma$ auch nicht kleiner als $2R$ sein kann. — Man ziehe die Verlängerungen AG und BH der Seiten BA und CB und denke sich einen Strahl, der seinen Anfangspunkt N in A und die nämliche Richtung wie AG hat. Diesen Strahl lasse man zunächst den Winkel GAF durchlaufen. Sobald er in AF angelangt ist, schiebe man ihn rückwärts so, dafs sein Anfangspunkt N nach C kommt, aber der Punkt A in ihm bleibt.

Er hat dann die Richtung CA, mithin, weil AF die Verlängerung von CA ist, noch die nämliche wie AF, weshalb zur Drehung GAF keine neue hinzugekommen sein kann. Wird der Strahl aus seiner jetzigen Lage CAF um N in C im vorigen Sinne weiter gedreht, so fängt er sogleich an, den Winkel γ zu beschreiben, gelangt, wenn er γ durchlief, in die Richtung der Seite CB, sowie ihrer Verlängerung BH,

und wird, in CH fortgleitend, bis N auf B kommt, einerlei mit BH, ohne dafs zu den Drehungen GAF und γ eine neue hinzugekommen wäre. Sobald er aber aus BH um N in B die Drehung im vorigen Sinne fortsetzt, beginnt er den Winkel HBD zu beschreiben, und langt, wenn er diesen durchlaufen hat, in BD an. Offenbar ist die gesamte Drehung des Strahls $= G\hat{A}F + \gamma + H\hat{B}D$. Da aber der Strahl aus der Richtung AG in die entgegengesetzte BD kam, so ist es unmöglich, dafs seine gesamte Drehung kleiner sei als eine halbe Drehung um einen einzigen Punkt; folglich ist $G\hat{A}F + \gamma + H\hat{B}D$, oder wegen $G\hat{A}F = \alpha$, $H\hat{B}D = \beta$

3) $\alpha + \beta + \gamma$ nicht kleiner als $2R$.

Aus 2) und 3) geht hervor

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Der Verfasser ist auf den zweiten Teil seines Beweises durch eine Notiz in Crelle's Übersetzung von Legendre's Geometrie gekommen und sucht die Schärfe des Beweises in den aufgestellten Grundsätzen und der Verknüpfung der beiden Teile.

Schon bei den einleitenden Worten dieses Kapitels erwähnte ich einer Arbeit von Grunert, „Über den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen", die sich im 47. Bande von Gr. Arch. S. 307 findet und auf die wir nunmehr näher einzugehen haben. Es heifst da:

„Alle Parallelentheorien bewegen sich wenigstens zunächst um das berühmte elfte Axiom des Euklid, dem man allgemein, und gewifs mit vollem Rechte, die zu einem Grundsatze erforderliche Evidenz abgesprochen hat."

Es wird dann das elfte Axiom im Wortlaut mitgeteilt. Hierzu sage Klügel: „Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundsätzen streitig machen. Doch konnte Euklid auch nicht ihn in die Reihe anderer scharf erwiesener Sätze bringen. Er hat ihn also, um einen Ausdruck aus der Kant'schen Philosophie zu borgen, als einen synthetischen Satz a priori unter die Grundsätze gestellt. Der Satz enthält eine Eigenschaft der geraden Linie, welche sie von den krummen

unterscheidet, ob man gleich sie nicht aus der Natur derselben durch eine Verbindung mit anderen Sätzen herleiten kann, weil sie unmittelbar in ihr liegt. Proklus setzt den Grundsatz unter die Postulate."

Mit dem Grundsatz stehe und falle die Parallelentheorie. Man habe versucht andere Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, dabei sei aber die Schwierigkeit immer dieselbe geblieben. Aufs engste hänge aber die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreieck zusammen.

Es komme darauf an, klar und bestimmt auszusprechen, worin man die Schwierigkeit der Parallelentheorie finde. Diese ist nach Grunert's Ansicht folgende:

„Läfst sich unter Zugrundelegung der euklidischen Definition der Parallelen, mit Hülfe der niemals angefochtenen und angezweifelten Grundsätze des Euklides, aber mit Ausschlufs des elften unter denselben, ferner mit Hülfe der ohne dieses Axiom in aller Strenge beweisbaren und bewiesenen Propositionen I bis XXVI des ersten Buches der Elemente des Euklides die Lehre von den Parallelen in aller Strenge begründen oder nicht?"

In den letzten Jahren sei die Frage in den Hintergrund getreten gewesen, ja die französische Akademie solle sich einschlägige Arbeiten verbeten haben. Nun sei neuerdings durch die Veröffentlichung des Briefwechsels Gauss-Schumacher die Frage wieder in Flufs gekommen. Gauss habe darin auch auf die fast vergessenen Arbeiten Lobatschewsky's und der beiden Bolyai's aufmerksam gemacht und sich im wesentlichen damit einverstanden erklärt. Grunert empfiehlt die Arbeiten Hoüel's,[1]) will aber in der vorliegenden Abhandlung vor-

---

[1]) 1. Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel. Suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris 1866.

2. Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les XXXII premières positions des Élémens d'Euclide, par J. Hoüel. Paris. 1867.

zugsweise auf Legendre's[1]) schöne Beweise näher eingehen.

Der Gang des Beweises schliefst sich nun völlig an Legendre's Beweisgang an und es ergeben sich folgende zwei Sätze als Resultate:

„A. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht gröfser sein als zwei rechte Winkel, dieselbe kann nur ebenso grofs oder kleiner als zwei rechte Winkel sein."

„B. Wenn nur in irgend **einem** ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zwei Rechte beträgt, so beträgt in völliger Allgemeinheit in allen ebenen Dreiecken ohne Ausnahme die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel, und ist also eine den Wert $2R$ habende konstante Gröfse."

Man scheine sich darüber einig zu sein, dafs die apriorische Erkenntnis mit diesen beiden Sätzen ihr Ende erreiche und nur die Erfahrung zu weiterer Beantwortung übrig bleibe. Alle Messungen hätten nun — je nach dem Mafse ihrer Genauigkeit — die Thatsache, dafs die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte betrage, sehr wahrscheinlich gemacht. Mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit gelte daher der Satz: „In jedem ebenen Dreieck ist die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln." Auf ihm baue sich — mit der gemachten Einschränkung — die Geometrie auf. Hieran schliefse sich dann der Beweis des elften Axioms, sowie der damit zusammenhängenden Sätze.

In einer Nachschrift spricht sich Grunert dahin aus, dafs die Nichteuklidische Geometrie von der Schule fern zu halten sei.

Schliefslich behandelt noch Worpitzky unsre Frage im Bd. 55 von Gr. Arch. p. 417 in der Abhandlung „Über die Grundbegriffe der Geometrie." Er stellt das Axiom auf: „Es giebt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel kleiner ist, als

[1]) 1. Mémoires de l'Académie des Sciences. T. XII. p. 369.
2. Élémens de Géométrie (3. bis 8. Auflage).

ein beliebig klein gegebener Winkel," das er dem elften Axiom aus verschiedenen Gründen vorzieht. Legendre's Nachweis, dafs die Winkelsumme nicht gröfser als $2R$ sei, erkennt er als völlig streng an, schliefst daraus, dafs ein Dreiecksaufsenwinkel nicht kleiner sein kann, als die Summe der beiden Dreieckswinkel an den anderen Ecken, woraus folgt, dafs kein Dreieck, in dessen Felde ein anderes Dreieck liegt, eine gröfsere Winkelsumme hat als das letztere.

„Giebt es daher irgend ein Dreieck, dessen Winkelsumme einem gestreckten Winkel gleich ist, so gilt dasselbe von allen Dreiecken. — Denn durch das Aneinanderlegen von vier Dreiecken, welche dem erstgedachten kongruent sind, kann man ein neues Dreieck mit derselben Winkelsumme beschaffen und durch Wiederholung dieses Verfahrens das Feld eines solchen Dreiecks so grofs machen, dafs ein beliebig gegebenes Dreieck ganz hineinfällt und aus diesem Grunde keine kleinere Winkelsumme besitzt."

Hieraus läfst sich nun ableiten, dafs die Winkelsumme im Dreieck einem gestreckten Winkel gleich sein mufs.

Hiermit sind die Arbeiten in Gr. Arch., die diesen Gegenstand behandeln, erledigt; doch findet sich, was nicht unerwähnt bleiben möge, in zahlreichen Rezensionen noch oft Gelegenheit, die vorliegende Frage zu erörtern, und es bieten besonders die Rezensionen des jetzigen Herausgebers der Zeitschrift viele anregende Bemerkungen.

Von erwähnenswerten Abhandlungen mögen an erster Stelle genannt werden die in den „Göttinger Anzeigen" 1816 am 20. April besprochenen von Schwab (Berlin 1814) und Metternich. Es heifst in der Besprechung, die Lücke der Unbeweisbarkeit der Parallelentheorie bestehe thatsächlich. Schwab habe schon vor 15 Jahren einen ähnlichen Versuch veröffentlicht, indem er alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Nach seiner Erklärung seien Parallellinien solche Gerade, die einerlei Lage haben. Sie müssen von einer dritten Geraden notwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden, weil diese Winkel nichts anderes

seien, als das Mafs der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallelen.

Hier liege im wesentlichen derselbe Versuch vor. Nach Schwab sei Lage ein blofser Verhältnisbegriff (Situs est modus, quo plura coëxistunt vel iuxta se existunt in spatio). Man könne wohl sagen, dafs zwei Gerade 𝔄 und 𝔅 eine gewisse Lage gegen einander hätten, die mit der gegenseitigen Lage zweier Geraden ℭ und 𝔇 einerlei sei. Aber Schwab gebrauche das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht koinzidierender Geraden spreche.

Diese Bedeutung sei leer, wenn nicht Identität bestimmt werde und gesagt sei, woran wir sie erkennen.

Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit einer dritten erkannt werden, so stehe damit noch nicht fest, ob diese Gleichheit auch bei jeder beliebigen Transversale statthabe: solle die Gleichheit der Winkel mit jeder Geraden das Kriterium sein, so wisse man wieder nicht, ob gleiche Lage ohne Koinzidenz möglich sei.

Ein grofser Teil der Schrift wende sich gegen Kant und behaupte, die Gewifsheit der Geometrie beruhe nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf dem principium identitatis und dem principium contradictionis.

Dafs von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, habe wohl Kant selbst nicht leugnen wollen: aber es sei sicher, dafs sie für sich ohne lebendige Anschauung nichts zu leisten vermöchten.

Der Versuch Metternich's wird nicht günstiger beurteilt.

Sehr gelobt dagegen wird in den „Göttinger Anzeigen" Jahrg. 1822 die Schrift von Carl Richard Müller, Theorie der Parallelen; nur befinde sich ein schwacher Punkt in Artikel 15 auf S. 15.

Der Verfasser gehe von einem gleichschenkligen Dreieck aus, bei dem jeder Basiswinkel gröfser als der Winkel an der Spitze ist. Es werde dann der Winkel von der Spitze am einen Schenkel angetragen, der gefundene Abschnitt des

anderen Schenkels auf diesem Schenkel abgetragen, wieder der Winkel an der Spitze angetragen u. s. f. — Es werde behauptet, dass die Stücke auf den Schenkeln eine abweichende Progression bilden. Der Beweis des Verfassers sei apagogisch, indem er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzähle und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versuche. Verfasser behaupte nämlich, dafs unter jener Voraussetzung einer von folgenden 5 Fällen statthaben müsse. Die aufeinander folgenden Stücke wären

1) alle einander gleich,

2) jedes nachfolgende gröfser,

3) einige gleich und das nachfolgende gröfser oder kleiner,

4) einige aufeinander folgende nähmen fortschreitend ab und die darauf folgenden fortschreitend zu,

5) sie seien abwechselnd gröfser oder kleiner.

In dieser Aufzählung sei der mögliche Fall übergangen, dafs die Stücke anfangs fortschreitend zu- und dann fortschreitend abnähmen; dies sei der wichtigste Fall und seine Erledigung die eigentliche Lösung.

Man könne einwenden, dafs er analog dem dritten Falle sei. Aber der Beweis dieses Falles sei gerade verfehlt, indem ganz willkürlich angenommen werde, dafs bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit α an der Spitze und gröfserem Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die angeführte Konstruktion vorgenommen werde, die Folge der abgeschnittenen Stücke notwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident angesehen werden dürfe.

De undecimo Euclidis Axiomate iudicium. Auctore Andrea Jacobi. — Jena 1824. —

Nach einer kurzen Einleitung, die feststellt, dafs auch in den Fundamenten der Mathematik eine unsichere Stelle sei,[1]) erörtert der Verfasser zuerst den Begriff Axiom.

---

[1]) Lambert 1786 in „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik“: „Die Frage selbst betrifft nämlich weder die Wahrheit noch die Gedenkbarkeit des elften Euklidischen Grundsatzes, sondern sie bezieht sich blofs darauf, ob dieselbe aus den Euklidischen

„Axioma est propositio categorica, in qua semper notiones fundamentales vel simplicissimae inter se iunguntur, simulque, quae veritas insit eiusmodi coniunctioni, indicatur.“

Dann wird festgestellt, was theorema bedeute.

„Theorema est propositio categorica, in qua semper notiones compositae inter se iunguntur, simulque, quae insit eiusmodi coniunctioni veritas, indicatur.“

An diesen Erklärungen prüft der Verfasser den Satz Euklids und kommt zu dem Resultat, dafs er zu den Lehrsätzen gehöre. Drei Methoden der Abhülfe gebe es: ein neues (anderes) Axiom, eine andere Definition der Parallelen, eine andere Definition der geraden Linie.[1]) Müller mache fünf Klassen der Versuche, was aber nicht richtig sei; Voit drei Klassen.

In folgenden Werken fände sich eine neue Definition der Parallelen, nämlich als Linien von konstantem Abstand. Zugleich hielten die Verfasser diese Definition „per se claram atque a nemine in dubium vocari posse putarunt.“

Wolfius, Elementa matheseos universae. Tom. I. Halae 1730.

Bézout, Cours de mathématiques.

Bossut, Traité élémentaire de Géométrie. — Paris 1777.

Andreae Taquet, elementa Euclidea geometriae planae ac solidae etc. — Romae 1745.

Petri Rami. Arithmet. libri duo, geometriae XXVII. a Lazaro Schonero recogniti. Francofurti 1599.

Postulaten mit Zuziehung seiner übrigen Grundsätze in richtiger Folge hergeleitet werden könne.“ Damit scheint uns in der That der Kernpunkt der Frage getroffen.

[1]) Hier werden zitiert:

Voitius, Percursio conatuum demonstrandi parallelarum theoriam de iisque iudicium. Gottingae 1802.

Ausführliche evidente Theorie der Parallellinien herausgegeben von Johann Wolfgang Müller, Nürnberg 1819. —

Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Gottingae 1763. Kluegel.

Wahl, Dissertatio mathematica symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Jenae 1823. —

Behn, Dissertatio de linearum parallelarum proprietatibus nova ratione demonstratis. — Jenae 1761.

Cataldo, Opusculum de lineis rectis aequidistantibus et non aequidistantibus. Bononiae 1603.

Lüdicke, Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie. Meifsen 1819.

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. Mainz 1822.

Ouvrier, Theorie der Parallelen. Leipzig 1808.

Jacobi ist durchaus anderer Ansicht und hält die Definition eher für einen Lehrsatz.

Unter denen, die einen Beweis für nötig halten, sei zuerst Clavius (1607) zu nennen. Sein Beweis sei aber wenig tauglich.

Robert Simson (1806) gebe ein neues Axiom, das aber der aufgestellten Definition des Verfassers nicht entspreche.

Ebenso wenig glücklich sei der Versuch Kircher's (Adolph Kircher, Nouvelle théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectioner la théorie des parallèles de A. M. Legendre. Paris 1803).

Auch Vit. Giordano da Bitonto (Euclide restituto overa gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati, Romae 1680) bemühe sich vergeblich einen Beweis zu liefern, indem er von der Definition ausgehe, parallele Geraden seien solche, die sich weder näherten noch sich von einander entfernten.

Friedr. Gottlob Hanke (Principia theoriae de infinito mathematico et demonstratione possibilitatis parallelarum. Lipsiae 1757) verdiene gar keine Beachtung.

Ebenfalls nehme der Versuch Schweikart's (Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie, Jena und Leipzig 1807) einen schiefen Ausgang; sein Beweis gehe von dem Satze aus, in jedem rechtwinkligen Viereck seien die gegenüberliegenden Seiten gleich.

Es sei also keinem Mathematiker, der von der Äquidistanz ausgegangen, gelungen, diese Linien wirklich als gerade nachzuweisen. Daher sei diese Definition zu verwerfen.

Auch die Definition, die von den gleichen Winkeln bei einer Transversalen ausgehe, (Vavignon, Élémens des Mathématiques. Paris 1731) sei als ungenügend schon von Kluegel und Voit nachgewiesen.

Der Verfasser geht nun über zu den Versuchen, ein neues Axiom an die Stelle des fraglichen zu setzen. Hier sind zu nennen:

Proclus, In commentariis in lib. I elementorum Euclidis. — Basileae 1533.

Koenig, Élémens de Géométrie contenant les six premiers livres d'Euclides, mis dans un nouvel ordre et à la portée de la jeunesse. — Hagae Com. 1758.

Lorenz, Grundriſs der reinen und angewandten Mathematik. Helmstaedt 1791.

Schwab, Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae. — Stuttgardiae 1801.

Müller, Ausführl. evidente Theorie der Parallellinien. — Nürnberg 1819.

Das Axiom des Proclus lautet:

„Duas lineas rectas mutuo sibi incidentes inde a puncto secandi magis magisque a se recedere, ita quidem, ut earum distantia tandem fiat infinite magna.“

Koenig: „Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, muſs sie auch die andere schneiden.“

Lorenz: „Jede Gerade durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels muſs hinreichend verlängert auch den anderen Schenkel schneiden.“

Schwab: „Zwei Gerade, die gleiche Lage gegen einander haben, sind auch gegen eine dritte gleich geneigt.“

Schon Kluegel und Hoffmann hätten gezeigt, daſs diese Sätze keine Axiome seien. Aber auch Müller's Axiom sei kein solches.

Es bleibe also noch die dritte Klasse übrig, nämlich die Klasse derjenigen, die einen Beweis des Euklidischen Satzes versucht hätten. Ausführlicher sollen nur die besprochen werden, die den Euklidischen Satz ersetzt haben durch den anderen, daſs in jedem Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte betrage. Hierher gehören:

Legendre, Élémens de Géométrie. Paris 1802.

Hauff, Archiv der reinen u. angew. Mathemat. 9. Heft. 1799. Num. VI.

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. ed. III. 1818. Göttingen.

Wolf's Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik. — Marburg 1818. (Anonym.)

Ob sie ihren Zweck erreicht hätten, könne man aus Hofmann's und Wohls Abhandlungen sehen. Verfasser will die Fehler dieser Theorieen nicht noch einmal darlegen.[1])

Weitere Versuche rühren her von

Karsten, Mathesis theoretica atque sublimior. Rostock 1760.

Hofmann.

Malezieu, Élémens de Géométrie. — Paris 1721.

Nasarradinus.

Lambert's Versuch sei fast identisch mit dem des Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus etc. Mediolani 1733).

Kaestner's (Anfangsgründe etc. 1792, S. 204) mit dem von Schmidt (Anfangsgründe der Mathematik. Frankfurt am Main 1797. — S. 131).

Segner, Elementa; Halae 1756.

Lacroix, Élémens etc. Paris 1803.

Hausen, Elementa matheseos. Lipsiae 1734.

Pardies, Élémens etc. Hagae Com. 1705.

Clairaut, Elementa geometrica. — Paris 1741.

Sauveur, Géométrie élémentaire. — Paris 1753.

Camus, Élémens de géométrie. — Paris 1750.

Boscowich, Elementa universae math. -- Romae 1752.

Wallisius, opera. —

„parvi vel nullius sunt momenti".

Jacobi geht dann näher auf Crelle's Arbeit ein, die ungefähr auf dieselben Prinzipien sich stütze, wie die von

---

[1]) Auch Lambert habe in seiner Theorie der Parallellinien in dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik 1786 dies hinreichend nachgewiesen.

Lacroix, und auf Bürger's Theorie. Beide seien verfehlt, ebenso die Abhandlung von Baucker (mufs wohl heifsen Paucker).

Demnach seien alle Versuche als verfehlt zu bezeichnen. Bei der Lektüre aber seien ihm neue Ideen zur Parallelentheorie gekommen, die er nun mitteilen wolle. Dabei geht Jacobi auf die gleiche Richtung der beiden Geraden zurück. Interessant ist hier noch eine philologische Untersuchung über die Bedeutung des Wortes „Parallelen", je nachdem παρά mit Genetiv, Dativ oder Accusativ konstruiert angesehen werde.

Horn, Parallelenproblem. — Glückstadt 1837. (Progr.)

Der Verfasser sieht die Schwierigkeit, das Parallelenproblem zu beweisen, darin, dafs sich „eine Verbindung des Endlichen und Unendlichen findet." Geht man von den endlichen Winkeln aus, so ist der Beweis leicht, nicht aber umgekehrt, wo man von der Unendlichkeit ausgeht. „Hier ist der Standpunkt des Ausgangs nicht fest", daher die Beweisversuche in eine unendliche Reihe auslaufen.

„Weniger strenge Beweise gingen von einem andern Begriffe der Parallellinien aus, indem sie dieselben definierten als solche, die beständig einen gleichen Abstand von einander haben. Allein abgesehen davon, dafs die Konstruktion, also die Möglichkeit solcher Linien nicht von ihnen nachgewiesen ward, konnten sie nicht darthun, dafs alle Nichtparallelen schneidende sind, worauf es doch vorzüglich ankam. Es blieb ihnen immer das Gespenst der nicht sich schneidenden Konvergenten übrig, welches kein Zauberstab bannen konnte."

I.

Versuche, den Knoten zu lösen.

Erste Methode. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so dafs ein Winkel ein rechter, der andre ein spitzer ist, so müssen sich die Linien nähern.

Beweis durch immer kleinere Perpendikel.[1])

Daran schliefst sich der Beweis, dafs die Linien sich

---

[1]) Nach einer Fufsnote aus: Hoffmann, Die Elemente des Euklid. — Man vergl. Schweikart, Theorie der Parallellinien.

schneiden müssen. — Es folgt dann die Verallgemeinerung (XI. Axiom). — Horn widerlegt diese Beweisart. Es gehe erstens der Beweis von der Anschauung aus, zweitens handle es sich dabei um eine unendliche Annäherung, wodurch der Zweck nicht erreicht werde.

Zweite Methode. In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei rechte Winkel.

Nachweis, dafs nicht gröfser und nicht kleiner als $2R$ nach Legendre.

Auch diese Beweise leiden daran, dafs sie in einer unendlichen Annäherung bestehen.

Dritte Methode. Wenn man auf den Schenkel eines halben rechten Winkels eine Linie zweimal anträgt, so ist ein Perpendikel von dem Endpunkt dieser Linie auf den anderen Schenkel gröfser als die gegebene Linie.[1])

Auch hier ist wieder die unendliche Annäherung störend. Dann aber kommt hinzu, dafs für die inneren Winkel $= 2R$ zwar sich beweisen läfst, dafs die Geraden sich nicht schneiden, aber nicht, dafs sie immer gleichen Abstand haben.

Vierte Methode. Wenn zwei Parallellinien geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich etc.

Beweis stützt sich auf die Gleichheit der Lote. Hierzu bemerkt Horn, dafs er den Beweis nur anführe, weil er sich in vielen Lehrbüchern des vorigen Jahrhunderts fände.

Dies sind die vier Hauptwege. Auch andre Versuche. „Von Aufgaben ist man z. B. ausgegangen, ohne zu bedenken, dafs in der Aufgabe nur ein Beweis des Möglichen, nicht aber des Notwendigen liegt.“

II.

Versuche, den Knoten zu zerhauen.

„Man stellte entweder 1) als Grundsatz auf, dafs, wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel wären, sie unter sich parallel sein müfsten; oder 2) dafs durch einen Punkt nur eine Linie mit einer andern parallel gezogen werden könne; oder 3) behauptete man, der Euklidische Grundsatz sei in einer einfacheren Gestalt ein solcher.“

---

[1]) Ebenfalls nach Hoffmann.

Erste Methode. (Nach Grunert's Lehrbuch der ebenen Geometrie.) Für die Schule resp. den Anfänger gute Darstellung, aber nicht streng wissenschaftlich. Der Fehler liegt daran, dafs Grunert parallele Linien und sich nicht schneidende identifiziert, worin gerade die Schwierigkeit beruht.

Zweite Methode. (Nach Tellkampf's Vorschule der Mathematik.) Auch diese weist Horn als unberechtigt zurück.

Dritte Methode. (Nach Hessling, Theorie der Parallellinien.) „Wenn GH und CD von JN geschnitten werden und die Winkel $CML + GLM < 2R$ sind, so ist $G\hat{L}J > C\hat{M}L$, welches sich sehr leicht beweisen läfst. Da nun der gröfsere Winkel $G\hat{L}J$ nicht in dem kleineren $C\hat{M}L$ enthalten sein kann, so mufs GH die CD schneiden."

Obwohl sehr einfach, erfülle er seinen Zweck nicht.

„Da nun bis jetzt alle Beweise für die Paralleltheorie gescheitert sind ...., so fragt es sich: Wie soll man es mit der Parallelentheorie halten? Betrifft die Frage den Unterricht, so ist die Antwort nach dem Standpunkte verschieden. In den mittleren Klassen eine einfache Methode; in den höheren gestehe man den Mangel eines Beweises offen ein. Betrifft aber die Frage die Wissenschaft, dann kann die Antwort nur eine Forderung sein, das Problem zu lösen."

Verfasser zweifelt an der Möglichkeit und hält „den Satz, sowie alles, was sich auf ihn stützt, für eine Hypothese, deren Gültigkeit für unser Leben freilich hinreichend durch die Erfahrung dargethan wird, deren allgemein notwendige Richtigkeit aber ohne Absurdität bezweifelt werden könnte."

J. St. Mill, System der deduktiven und induktiven Logik, übersetzt von Th. Gomperz. Leipzig 1884. (I. Originalausgabe 1843.)

II p. 361: „Man nimmt an, dafs es giebt .... z. B. Parallellinien und dafs diese Linien überall gleichweit von einander abstehen."

Hierzu findet sich folgende Anmerkung: „Die Mathematiker haben es gewöhnlich vorgezogen, Parallellinien nach der Eigenschaft zu definieren, dafs sie in derselben Ebene

liegen und niemals zusammentreffen. Dies macht es jedoch notwendig, noch als ein weiteres Axiom irgend eine andere Eigenschaft paralleler Linien anzunehmen; und das Ungenügende in der Art, wie Eigenschaften zu diesem Zwecke von Euklid und andern gewählt werden, galt stets als der wundeste Fleck der Elementargeometrie. Auch als eine bloſse Worterklärung ist die Äquidistanz zur Bezeichnung von Parallellinien geeigneter, da es die Eigenschaft ist, die wirklich in der Bedeutung des Namens enthalten ist.[1]) Wenn in derselben Ebene liegen und niemals zusammen treffen alles wäre, was wir unter „parallel sein" verstünden, so würden wir es nicht ungereimt finden, zu sagen, daſs eine Kurve ihrer Asymptote parallel ist.[2]) Die Bedeutung von Parallellinien ist: Linien, die genau dieselbe Richtung verfolgen und die daher niemals weder einander näher kommen noch sich von einander entfernen — eine Vorstellung, welche die Betrachtung der Natur uns ohne Weiteres darbietet. Dass die Linien niemals zusammentreffen werden, ist natürlich in dem umfassenderen Satze enthalten, daſs sie überall gleichweit entfernt sind. Und daſs irgend welche gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nicht äquidistant sind, gewiſs zusammentreffen werden, läſst sich in der strengsten Weise aus der im Text angenommenen Grundeigenschaft gerader Linien beweisen, daſs sie nämlich, wenn sie von demselben Punkte ausgehen, ohne Ende immer mehr und mehr auseinander gehen."

F. Märcker, Theorie der Parallellinien. — Meiningen 1846.

Der Verfasser giebt zuerst eine genaue Darstellung der Geraden und der Ebene, sowie der Beziehungen dieser beiden Raumgebilde. Daran schlieſst sich die Definition der krummen Linien, § 13—15 Planimetrie, § 16—21 die Winkellehre, § 22—24 einiges vom Kreise, § 25—43 von den geradlinigen

---

[1]) Man vergl. meine Ausführungen weiter oben, sowie die Fuſsnote auf S. 204 No. 3.

[2]) Danach würden auch zwei beliebige Kreise, die sich nicht schneiden, parallel sein; während in Wahrheit doch nur konzentrische Kreise in derselben Ebene als parallel bezeichnet werden dürfen.

Figuren. — Nun kommt der Abschnitt „Von den Parallellinien."

§ 44. Erklärung: „Zwei Gerade in derselben Ebene, die, soweit man sie auch verlängern mag, nie einander schneiden, heifsen Parallelen."

Zusätze. 1) Zwei Lote auf einer Geraden sind parallel.

2) Konstruktion.

3) Auf derselben Seite.[1])

§ 45. Wenn zwei Geraden, auf entgegengesetzten Seiten einer dritten, mit dieser parallel sind, so sind sie einander parallel.

§ 46. „Wenn auf dem einen Schenkel irgend eines spitzen Winkels ein Lot auf der inneren Seite errichtet wird, so schneidet dies genugsam verlängert den andern Schenkel."

Hieran schliefsen sich eine Reihe von Sätzen über Parallelen.

§ 59. „Parallelen haben überall gleichen Abstand. Zus. Lote zwischen Parallelen sind gleich."

Daran schliefsen sich § 60 und 61 die Sätze von der Winkelsumme im Dreieck.

Schulz, Über die Theorie der Parallellinien. Königsberg i. d. Neumark 1846.

§ 1 und 2 enthalten einleitende Betrachtungen.

§ 3. 1) Man hat, an einer rein geometrischen Lösung

---

[1]) Hierzu bedarf man der Erklärungen des § 15: „Von zwei Geraden, die nur einen Punkt, der kein Endpunkt ist, gemein haben, liegen die durch diesen Punkt getrennten Stücke einer jeden auf entgegengesetzten Seiten der andern.

Erkl. a) Solche Geraden schneiden sich. (Durchschnittspunkt, Treffpunkt.)

b) Wenn von zwei Geraden jede ganz auf derselben Seite der andern liegt, so heifst die Seite einer jeden, worauf die andere liegt, die innere, und die, worauf die andere nicht liegt, die äufsere. — (Entsprechende, gleichnamige Seiten.)

c) Eine Gerade, die über beide Endpunkte hinaus, soweit es die Ebene gestattet, verlängert wird, teilt diese in zwei Teile, und keine in der einen befindliche Linie kann in den andern sich erstrecken, ohne die Gerade zu schneiden."

gänzlich verzweifelnd, die Stützen anderswoher zu nehmen gesucht. Hierher gehören die Beweise

a) durch den Satz vom zureichenden Grunde,

b) vermittelst der Einführung des unendlich Kleinen,

c) vermittelst der Drehung.

2) Rein geometrische Versuche, aber nur näherungsweise, selbst ohne Nachweis, daſs man auf dem angefangenen Wege zum Ziele gelangen könne.

3) Man hat andre Erklärungen, als die Euklidischen, von Geraden, Parallelen und Winkeln gegeben.

4) Man hat einen andren Grundsatz aufgestellt, der der unmittelbaren Anschauung näher liegt — oder was richtiger wäre, welcher zugleich aus den Euklidischen Erklärungen von selbst folgt.

5) Der letzte Weg endlich ist der, daſs man gerade darauf ausgeht, entweder jenes ungenügende Axiom selbst als Lehrsatz zu beweisen oder einen andern Satz, aus welchem jenes Axiom, sowie die übrigen Sätze der Parallelentheorie streng logisch folgen.

Die meisten Lösungen gebe es zu 2), 1) und 3), während 4) und 5) noch ungelöst seien.

§ 4. Verfasser geht näher auf den Beweis 1, a) ein und weist nach, daſs der unbewiesene Satz eingeschmuggelt sei, daſs, wenn der innere Winkel gröſser sei als der entsprechende äuſsere, sich die Geraden schneiden.

1, b) entziehe sich völlig der einfachen, unmittelbaren Anschauung, auf welche allein Euklid sein System aufbaue.

1, c) sei nicht rein geometrisch. Auſserdem liege ein Fehler in der Annahme, daſs wenn zwei Linien von einer dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, sie auch von jeder beliebigen andern unter gleichen Winkeln geschnitten würden.[1])

§ 5. Auch der Beweis 2) sei nicht streng; er könne die Sätze höchstens plausibel machen.

---

[1]) Nur für die durch die Mitte der ersten Transversalen gehenden Transversalen sei ein strenger Beweis ohne Hülfe der Parallelentheorie möglich.

§ 6. Der dritte Weg legt andere Erklärungen[1]) zu Grunde. Hier fragt es sich, welches sind die einfachsten geometrischen Begriffe?

Unmittelbar unsrer Anschauung gegeben sei der Raum, er ist also keiner weiteren Erklärung auf geometrischem Gebiete fähig. Durch Unterscheidung, Begrenzung gelangen wir zu Neuem.

Als unterschieden im Raume seien nun für unsere Anschauung — und zwar unmittelbar — nur gegeben die drei Normal-Richtungen[2]) seiner Ausdehnung, die Dimensionen Länge, Breite, Höhe. Diese Namen seien subjektiv. Je nachdem man nun eine, zwei oder alle drei Richtungen zugleich setze, erhalte man Linie, Fläche, Körper. Mit den Dimensionen sei zugleich die gerade Linie und die rechtwinklige Lage der Axen gegeben. Der Punkt als ausdehnungslose Grenze der Linie sei die Negation aller Ausdehnung.

Mit diesen Erklärungen will nun Verfasser den im § 3 bezeichneten vierten Weg einschlagen. Er stellt folgende neue Grundsätze auf:

„1) Nähern sich zwei Geraden, bis sie sich schneiden, so entfernen sie sich vom Schnittpunkt ab ebenso wieder voneinander, aber in umgekehrter Lage.

2) Nähern sich zwei Gerade, so kann sich dies nicht ändern, ohne dafs sie sich geschnitten haben.“

Hierauf baue sich nun die Parallelentheorie ganz streng so auf:

1) Die Summe der Winkel im Dreieck ist nicht gröfser als 2 R.

2) Werden zwei gleiche Lote auf derselben Geraden errichtet und ihre Endpunkte m und n verbunden, so entstehen bei m und n gleiche Winkel.

3) Treffen zwei Gerade a und b eine und dieselbe dritte c

---

[1]) Erklären heifst, die einfacheren Elemente des Erklärten aufweisen — und bei den eigentlichen Sacherklärungen, die Entstehungsweise aus diesen Elementen nachweisen. (Die Erklärung mufs auf so einfache Elemente zurückgehen, die als unmittelbar in unserm Wesen beruhend nicht mehr auf einfachere zurückgeführt werden können.)

[2]) Richtung liegt unmittelbar in unsrer Anschauung.

senkrecht, so sind die Lote (m und n), zwischen a und b in gleicher Entfernung von c errichtet, einander gleich.

4) In demselben Falle von No. 3 kann das Lot m ($= n$) nicht kleiner sein als das Lot c (d. h. als das zwischen a und b enthaltene Stück der dritten Linie), weil sonst ein Viereck mehr als 4 R enthielte.[1])

5) In demselben Falle (oder auch, gleiche Wechsel- oder gleiche Gegenwinkel oder supplementäre innere Winkel vorausgesetzt) haben a und b überall gleiche Entfernungslote.

Mit diesem letzten Satze sei bekanntlich die ganze Schwierigkeit der Parallelen-Theorie gehoben.

Dudeck, Versuch einer folgerechten Durchführung der Lehre von den parallelen Linien.[2]) — Hohenstein 1847.

Es sei zu beweisen:

entweder: „Zwei Geraden können eine solche Lage haben, dafs ihre senkrechten Abstände in allen Punkten gleich sind.“

oder: „Zwei Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen, stehen auch gemeinsam auf einer vierten senkrecht.“

oder: „Der elfte Euklidische Grundsatz“.

Der Verfasser wendet sich 1) zu, indem er von Senkrechten bei einem spitzen Winkel ausgeht.

Schmeisser, Kritische Betrachtung einiger Grundlehren der Geometrie, wie sie in den meisten Lehrbüchern vorkommen. — Frankfurt a/O. 1851.

2) Verfasser rechnet den Parallelismus zu den „ursprünglichen Anschauungen a priori“, fälschlich Begriffe genannt. Definition sei nicht möglich. „Jede einfache Vorstellung ist einer Definition[3]) nicht fähig, aber auch nicht bedürftig.“

---

[1]) Hier steckt der Grundsatz, der an die Stelle des 11. Axioms tritt.

[2]) Als Litteratur wird angegeben: Hill, Geschichte und Kritik der Parallelentheorieen. Lundae 1844.

[3]) „Der einzige Zweck einer Definition ist, einen denkbaren Gegenstand durch Angabe der den Begriff desselben konstituierenden Merkmale zur Erkenntnis zu führen.“

Vergl. Kant, Kritik d. r. Vernunft. p. 316. — Fries, System der Logik. p. 36; 273.

7) Auch der „Parallelismus" eine Grundvorstellung.

Schon Geminus erkläre die Parallelen für ein Liniengebilde, eine Grundvorstellung wie Kreis, Ellipse etc. (Auch Proklus.)[1])

8) Proklus in Bd. IV. p. 93 seines Kommentars:

„Bei den Parallelen sind drei eigentliche Merkmale anzunehmen, welche sowohl ihr Wesen an sich bestimmen, als auch umgekehrt stattfinden. Sie gelten nicht nur alle drei zugleich, sondern auch jedes abgesondert von den übrigen. Das eine ist, daſs wenn eine Gerade die Parallelen schneidet die Gegenwinkel einander gleich sind; das zweite, daſs die innern zwei Rechten gleich; das letzte, daſs der äuſsere dem ihm gegenüberliegenden (Wechselwinkel) gleich ist.

Denn jedes dieser Merkmale gehörig dargestellt zeigt, daſs gerade Linien parallel sind."

Verfasser bespricht dann, nachdem er den Winkel erörtert hat, die geometrischen Grundsätze, deren er 3 formelle und 3 materielle aufstellt.[2])

15) Das elfte Axiom sei ein Einschiebsel eines Ungeschickten. Über das ganz unnütze Ding, worüber schon seit langer Zeit viel Unnützes geschrieben worden sei, noch etwas zu sagen, sei nicht der Mühe wert.

16) Das zwölfte Axiom sei auch kein Satz, weil das Prä-

---

[1]) Man vergl. J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallelen. Jena 1817. — Allg. Lit. Zeit. v. 1817. Ergänz. Bl. 121; S. 962. — Lambert's Briefwechsel deutscher Gelehrten. Bd. I. p. 23.

[2]) A) Formelle.

1) Zwischen zwei Grenzpunkten ist nur eine gerade aber unzählig viele krumme Linien denkbar.

2) Durch zwei Punkte ist die Lage oder Richtung einer geraden Linie bestimmt; zu der einer krummen aber sind mehrere Bestimmungsstücke nötig.

3) Gerade Linien, ebene Flächen und gerade Körperräume können nicht in sich selbst zurücklaufend gedacht werden, aber krumme.

B) Materielle.

1) Zur Begrenzung einer Linie sind mindestens zwei Punkte;

2) zur Begrenzung einer Ebene drei Gerade nötig, aber nur eine oder zwei Gerade und eine Krumme oder auch nur eine Krumme.

3) Die Begrenzung eines Körperraums erfordert mindestens vier ebene Flächen etc.

dikat darin die Bedingung der Möglichkeit der Begrenzung einer Fläche blos verneine.

Die Euklidischen „Axiome" seien überhaupt säintlich keine „Axiome", sondern nur „allgemeine Aussprüche".

Im Abschnitt III spricht Schmeisser Über die logische Anordnung der Lehren der Elementargeometrie. Der Parallelismus wird ganz am Anfang abgehandelt.

Krueger „Ueber die Lehre von den Parallelen, namentlich in Bezug auf neuere Lehrbücher.[1]) — Bromberg 1852.

Verfasser geht aus von Euklids Definition und stellt dann folgende Klassen von Beweisversuchen auf:

1) Man suchte das elfte Axiom direkt zu beweisen.

2) Man stellte einen andern Satz als Grundsatz auf.

3) Man suchte Lehrsätze, die sich bei Euklid auf die Parallelenlehre stützen, unabhängig davon zu beweisen und darauf die Sätze von den Parallelen zu gründen.

4) Man gab andere Definitionen von Parallelen, aus denen man entweder mit einem Grundsatz oder ohne einen solchen die Eigenschaften dieser Linien ableitete.

Folgende Definitionen seien neu aufgestellt worden[2]):

1) Eine Linie ist parallel mit einer Geraden, wenn alle ihre Punkte von der Geraden gleichweit abstehen.

2) Zwei Gerade, welche gleiche Entfernung von einander haben, sind parallel.

3) Zwei Geraden sind parallel, wenn sie mit einer dritten sie schneidenden gleiche Winkel in demselben Sinne bilden.

4) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie gleiche (dieselbe) Lage haben.

5) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie gleiche (dieselbe) Richtung haben.

---

[1]) Man vergl. S. Sohnke, Die Parallelen, in Encyklopädie von Ersch und Gruber.

[2]) Hoffmann, Kritik der Parallelentheorieen. Jena 1817. — Gilbert's Geometric nach Legendre. — Bertrand, Legendre, Thibaut. Grunerts Archiv Bd. 15.

Zuerst bespricht Verfasser Legendre's Theorie und giebt seine Beweise wieder, dann verschiedne andre Versuche.[1])

In den neueren Lehrbüchern seien die drei letzten Definitionen bevorzugt; so gebe von Swinden die dritte. E. Gottfr. Fischer (Berlin 1833) gehe von der zweiten Definition aus, ähnlich verfahre Schlömilch. Es komme immer noch ein Grundsatz hinzu. Alle hätten den Begriff der gleichen oder ungleichen Richtung.

Verfasser kritisiert die verschiednen Beweisversuche und verfällt dabei in den groben Fehler, Richtung mit Ziel zu verwechseln.

Es werden ferner kritisiert Snell, der sehr abfällig beurteilt wird, Kossack (desgl.), Schmeisser (desgl.), Koppe, Nagel.

Verfasser vermifst überall die nötige Strenge, wie sie sich bei Euklid finde (Kunze ausgenommen). Durch einige Änderungen in der Reihenfolge der Sätze und Definitionen sei Euklids Darstellung zu retten. Die Definition der Parallelen müsse auf Satz 27 folgen, das elfte Axiom nach Satz 17.

„Aber ich glaube, dafs die Strenge der geometrischen Methode weniger in der vollkommnen Evidenz der Grundsätze selbst liegt, welche doch immer eigentlich Lehrsätze sind, aber für einen gewissen Standpunkt als erste gelten müssen; als vielmehr in der Art und Weise, wie die ersten Sätze angewendet werden: in der Sicherheit und Geschicklichkeit, mit welcher die Lehrsätze und Aufgaben auf die Definitionen, Axiome und Postulate zurückführt werden. Und in dieser Beziehung müssen Euklids Elemente als Muster von geometrischer Strenge und Evidenz gelten."

Schulz, Theorie der Parallellinien. — Königsberg 1854.

Zuerst rekapituliert der Verfasser seine frühere Abhandlung (s. o.) und verbreitet sich dann ausführlich über Gerade und Richtung, die er „im wesentlichen" identifiziert. § 5

---

[1]) Kunze (sehr anerkennend); Wolff; Brettner; Klügel; Ramus; Streit; Wiegand.

handelt von dem „Abhängigkeitsverhältnis zwischen Winkelgröfse und Schenkelrichtung". Hier finden sich folgende Sätze:

„Haben zwei Geraden keinen Punkt gemein, so kann die Verschiedenheit oder Gleichheit ihrer Richtungen nicht unmittelbar erkannt werden, sondern mittelbar mit Hülfe einer dritten."

„Weichen zwei Geraden unter gleich grofsen Winkeln von einer und derselben dritten nach derselben Seite hin ab, dann haben diese zwei Geraden eine gegenseitig gleiche Richtung."

§ 6 bringt dann eine Lösung nach der dritten Methode (vergl. die frühere Abhandlung), § 7 eine Lösung nach der vierten Methode, indem an Stelle des Euklidischen Axioms das folgende aufgestellt wird: „Nähern sich zwei Gerade, so müssen sie im Annähern verharren, so lange sie an derselben Seite nebeneinander herlaufen".

§ 8 giebt dann einen Rückblick.

Lotz, Ueber die Theorie der Parallelen.[1] — Fulda 1862.

I) Euklids Lehre.

II.

Sätze aus andren Theorieen.

Erste Gruppe.

1) Sind die von zwei bel. Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten gleich, so stehen sie auch auf der ersten Geraden senkrecht und schneiden von beiden gleiche Stücke ab.

2) Steht eine von irgend einem Punkte einer Geraden auf eine zweite gefällte Senkrechte auch auf der ersten senkrecht, so mufs auch jede andere von der ersten auf die zweite gefällte Senkrechte auf der ersten senkrecht stehen und der ersten Senkrechten gleich sein; auch die Stücke auf der Geraden sind gleich.[2])

3) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Senkrechten ungleich, so bilden sie mit der

---

[1]) Vergl. Hoffmann, Kritik der Parallelentheorie. Jena 1817. — Klügel, Göttingen 1763.

[2]) Beweis aus 1.

ersten Geraden innere Gegenwinkel, von denen der an der gröfsern Senkrechten spitz, der an der kleinern aber sein stumpfer Supplementwinkel ist.[1])

4) Bildet eine von irgend einem Punkte einer Geraden auf eine zweite gefällte Senkrechte mit der ersten ungleiche Nebenwinkel, so ist jede andere von irgend einem Punkte der ersten Geraden auf die zweite gefällte Senkrechte gröfser oder kleiner als die erste, je nach der Lage des Punktes.[2])

5) Werden zwei Gerade von bel. vielen andern durchschnitten, und sind von den Gegen- und Wechselwinkeln, welche jene beiden mit einer bel. von diesen bilden, irgend zwei korrespondierende oder Wechselwinkel gleich oder zwei Gegenwinkel Supplemente, so gilt dies auch bei den übrigen durchschneidenden Linien.[3])

Zusatz: Die drei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.

6) Wie in 5, nur ungleich.[4])

7) Werden zwei Gerade von bel. vielen andern durchschnitten und bildet eine der schneidenden mit einer Richtung der durchschnittnen Linien innere Gegenwinkel, die kleiner als zwei Rechte sind, während die andern von der ersten Geraden gleiche Stücke abschneiden und auf der zweiten senkrecht stehen, so müssen diese in der oben angegebenen Richtung aufeinander folgenden Senkrechten um gleiche Stücke abnehmen und auf der zweiten Geraden gleiche Stücke abschneiden.

Zusatz 1. Schneidet man von dem einen Schenkel eines Winkels Stücke ab, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4 . . . . und fällt von ihren Endpunkten Senkr. auf den andren Schenkel, so verhalten sich diese Senkr. und die von ihnen auf dem andern Schenkel abgeschnittnen Stücke wie 1 : 2 : 3 : . . . .[5])

Zusatz 2. In jedem Schenkel eines jeden, wenn auch noch so kleinen Winkels läfst sich immer ein Punkt nicht nur so bestimmen, dafs die von ihm auf den andern Schenkel

---

[1]) Beweis aus 1. (Hülfslinien und Kongruenz von Dreiecken.)

[2]) Beweis indirekt aus 1 und 3 oder direkt aus 1.

[3]) Beweis mit Hülfe von Satz 2. (Kongruenz von Dreiecken.)

[4]) Beweis aus der Winkelsumme im Viereck.

[5]) Beweis unmittelbar aus dem Hauptsatz.

gefüllte Senkr. gröfser wird als jede geg. Linie, sondern auch so, dafs die Senkrechte vom andern Schenkel ein Stück abschneidet, welches gröfser ist als jede geg. Strecke.[1])

III.

1 bis 4 sind Hauptsätze, 5 und 6 Verallgemeinerungen, 7 mit seinen Zusätzen Anwendungen auf spezielle Fälle.

Alle Sätze problematisch, da der erste problematisch.

Es wird dann gezeigt, dafs sich von allen Sätzen immer nur ein Teil beweisen läfst. Legendre's Beweis von Zusatz zu 5 wird u. a. auch als circulus nachgewiesen.

IV.

Neue Gruppe von Sätzen:

8) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Lote einander gleich, so mufs ihnen auch jedes andere von der ersten auf die zweite gefällte Lot gleich sein.[2])

9) Sind die von drei Punkten, die auf derselben Seite einer Geraden liegen, auf diese gefällten Lote gleich, so geht jede durch zwei dieser Punkte gezogne Gerade auch durch den dritten.[3])

10) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Lote gleich und liegt ein dritter Punkt auf derselben Seite der zweiten Geraden wie die erste, aber nicht in der letzteren, so mufs das von ihm auf die zweite Gerade gefällte Lot kleiner oder gröfser sein als jedes der beiden ersten je nach der Lage.[4])

Zusatz: Die drei Eckpunkte eines Dreiecks können nicht gleichweit von einer Geraden entfernt sein.

11) Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Lote einander gleich, ist aber die von einem dritten Punkte, welcher auf derselben Seite der zweiten

---

[1]) Aus Zusatz 1.

[2]) Beweis aus 1 und 2 oder aus 1 allein. Umgekehrt: Beweis von 1 aus 8.

[3]) Beweis aus 1 oder aus 8. — Beweis von 1 aus 9, von 8 aus 9.

[4]) Beweis aus 1 und 4. — Beweis aus 9, 9 indirekt aus 10.

Linie liegt wie die ersten, auf die zweite Linie gefällte Senkr. gröfser oder kleiner als jede beiden gleichen ersten, so kann dieser dritte Punkt nicht in der ersten geraden Linie liegen, und zwar mufs er zwischen beide gerade Linien oder aufserhalb derselben fallen, je nach der Länge des Lots.[1])

12) Sind zwei von einer Geraden auf eine zweite gefällte Lote ungleich, und ist ein drittes Lot auf der zweiten Geraden einer der beiden ersteren gleich, so mufs der Endpunkt des dritten Lotes zwischen beide Geraden oder aufserhalb fallen je nach der Länge.[2])

13) Sind zwei Lote ungleich, so ein drittes ebenfalls ungleich je nach der Lage.[3])

14) Sind zwei resp. Lote ungleich, so werden die Lote von dem gröfsren nach dem kleinern hin immer kleiner, umgekehrt gröfser.[4])

V.

Kritische Betrachtung.

Clavius nimmt Satz 9 als Grundsatz an. — Verschiedne andre suchen ihn zu beweisen. — Dabei werden offen oder verdeckt irgendwelche von den in III. und IV. geg. Sätzen benutzt.

VI.

Anwendung auf die Parallelentheorie.

VII.

Zwei neue Wege: neue Grundsätze oder neue Definitionen.

Erste Gruppe.

1) Vom ersten oder letzten Schnitt.

Weder Kästner, der den Grundsatz des ersten oder letzten Schnitts aufstellte, noch die Anwender haben ihn als bestimmten Satz hingestellt.

---

[1]) Beweis aus 1 und 3 oder indirekt aus 9 und 10 oder direkt allein aus 9 oder direkt aus 8. — 11 indirekt aus 8.

[2]) Beweis aus 1 und 3 oder aus 11 und 10. — 8 und 11 folgen, 8 indirekt, 11 direkt, aus 12.

[3]) Beweis aus 3 und 4, 12 und 10, 8 indirekt aus 13.

[4]) Beweis aus 13.

Es werden nun die Grundsätze des letzten und ersten Schnitts aufgestellt.[1])

2) Der Grundsatz der ersten oder letzten Senkrechten (von Legendre).

Zweite Gruppe.

3, a) Wenn zwei Gerade auf der nämlichen Ebene einerlei Lage gegeneinander haben, so haben sie auch die nämliche Lage gegen jede dritte Gerade.[2])

3, b) Wenn zwei Gerade gegeneinander verschiedene Lage haben, so haben sie auch verschiedene Lage gegen jede dritte.

Was heifst einerlei Lage gegeneinander haben?

4, a) Wenn zwei Gerade eine gleiche Richtung haben, so müssen beide auch gleiche Richtung gegen jede andere Linie haben.

4, b) Zwei Gerade, die keinen Richtungsunterschied haben, können auch keinen Richtungsunterschied gegen irgend eine andre Gerade haben.

Bézout und Thibaut bewegten sich im Zirkel.

Keiner von den Sätzen dieser Gruppe kann zu der vollen Gewifsheit erhoben werden, welche die Mathematik erfordert.

Dritte Gruppe.

5) Zwei Gerade, welche derselben dritten parallel sind, müssen auch untereinander parallel sein.

6, a) Eine Gerade, welche eine von zwei parallelen Geraden durchschneidet, mufs auch die andre durchschneiden.

6, b) Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich mit dieser nur eine Parallele ziehen.

Vierte Gruppe.

7) Durch einen innerhalb eines hohlen Winkels liegenden Punkt läfst sich immer eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel schneidet.

8) Jede Gerade, welche durch einen innerhalb eines hohlen

---

[1]) Es handelt sich um das Verschieben einer Geraden auf den Schenkeln eines Winkels und die Lage der Schnittpunkte.

[2]) Von Schwab herrührend.

Winkels liegenden Punkt geht, schneidet wenigstens den einen Schenkel des Winkels.[1])

Verfasser giebt nun seine Parallelentheorie, die er auf die Winkeldefinition (unendl. Ebenstück) stützt.

Parallelen sind solche gerade Linien, die mit derselben dritten, der Richtungslinie, gleiche korrespondierende bilden.

Satz I. Parallelen schneiden sich nicht.

Satz II. Nichtparallele Linien schneiden sich und zwar auf der Seite der Richtungslinie, auf welcher ein äufserer Winkel gröfser ist als sein innerer korrespondierender.[2])

Satz III. Linien, welche sich nicht schneiden, sind in Bezug auf jede Richtungslinie parallel.

Satz IV. Über schneidende.

Thiermann, Geometrische Abhandlung über Erklärungen, Forderungen und Grundsätze nebst einer elementaren Begründung der Lehre von den parallelen Linien. — Göttingen 1862.

Nach ausführlicher Behandlung des Begriffes „Grundsatz" spricht sich Verfasser dahin aus, dafs der zehnte, elfte und zwölfte Grundsatz Euklids zu den Lehrsätzen gehören. P. Voit wolle den Zusammenhang zwischen dem elften Axiom und dem 17. Lehrsatz entdeckt haben. Das sei nicht richtig. Schon Proclus sage Lib. 3. pet. 5: eius (petitiones) conversum Euclides etiam tamquam theorema ostendit. Auch Borellius weifs das. (Vergl. Eucl. restit. p. 38.)

Verfasser spricht sich gegen die philosophischen und besonders gegen die mathematischen Versuche aus, das elfte Axiom durch eine ganze Reihe andrer zu ersetzen. — Trotzdem seien diese Arbeiten nicht ohne Wert. — Falsche Definition der Parallelen.

Hinweis auf J. J. J. Hoffmann und E. Külp.

Borellius: Et patet, hanc passionem esse valde remotam et incomprehensibilem. nam extensio illa infinita ad utramque partem absque concursu concipi non potest; neque conveniens

---

[1]) Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels läfst sich keine Gerade ziehen, die nicht wenigstens einen Schenkel schneidet.

[2]) Dazu 4 Beweise.

est, ut a passione remota difficili, et non evidenter cognita deducantur in propos. 27, 28, 29 aliae passiones magis manifestae.[1])

„Eine negative Definition ist also jedenfalls zu vermeiden; denn entweder ist sie nicht bestimmt oder, sollte sie dies sein, so kann sie eine positive Form annehmen.“

Verfasser acceptiert die Definition des Posidonius: Parallele Linien sind solche, die überall gleiche Abstände haben.[2])

Der Nachweis der Darstellbarkeit solcher Linien ist noch nicht geliefert.[3])

Begründung der Lehre von den Parallelen.

$$BA \perp AC;\ DB \perp BA.$$

Es wird zunächst gezeigt, dafs wenn BD und AC auch nur bei einer kleinen endlichen Strecke gleichweit von einander abstehen, sie überhaupt parallel sind.[4])

Dann wird gezeigt, dafs gleich anfangs die beiden Geraden parallel sind. Der übrige Gang ganz wie bei Euklid. Schliefsl. XI. Axiom.

Die wichtigsten Versuche, gleichweit abstehende Linien nachzuweisen.

Clavius schliefst aus der Definition der Geraden, dafs eine Linie, deren sämtliche Punkte von einer Geraden gleichen Abstand haben, eine Gerade ist. — Die Analogie mit dem Kreis wird noch ausgeführt.

Borellius schliefst sich an Clavius an, definiert Parallele als Geraden von gleichem Abstand.

Ebenso Kircher; J. K. J. Hauff; Bossut.

Saccherius stelle drei Hypothesen auf vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel, und wolle zeigen, dafs die zweite und dritte falsch sind. Der Versuch sei als mifslungen zu bezeichnen.

---

[1]) Müller, Ausführliche und evidente Theorie der Parallellinien. — Nürnberg 1819.

[2]) Einwurf des Ign. Hoffmann.

[3]) Einwurf des Hieron. Saccherius.

[4]) Vergl. Clavius; Kircher; J. Hoffmann.

Robert Simson: Eine gerade Linie kann nicht erst einer andern geraden Linie näher kommen und sich dann von derselben entfernen, ohne sie vorher geschnitten zu haben u. s. w. (Grundsatz.)

Metternich kurz abgewiesen.

J. C. Schwab gründet seinen angeblichen Beweis auf die Identität der Lage; Herbert auf die der Richtung.

Witte, Die Parallelentheorie und die Definition des Winkels. — Wolfenbüttel 1867.

Eine Begründung der Parallelentheorie mufs sich stützen auf die Begriffe: gerade Linie und Winkel.

Sehr eigentümliche Definitionen: „Der ebene Winkel ist ein Teil einer Ebene, der von zwei beliebigen Richtungen eines Punktes in derselben begrenzt ist.“[1])

Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Wiesbaden 1868.

Im § 10 kommt der Verfasser auf die Parallelen zu sprechen, von denen es drei Erklärungen gebe,

a) Geraden ohne Schnittpunkt,

b) Geraden mit konstantem Abstand,

c) Geraden von gleicher Richtung.

Was die erste Erklärung betreffe, so sei sie der Vorstellung nicht zugänglich; aufserdem sei dies eine negative Eigenschaft. Die zweite Erklärung beruhe auf einer abgeleiteten Eigenschaft. — Was schliefslich die dritte Erklärung anlange, so sei zu bemerken, dafs Gleichheit nur bei Gröfsen möglich sei. Hier komme der Konflikt zwischen Quantität und Richtung zum Austrag. Richtung sei kein quantitativer Begriff, aber sie sei der Veränderung, Bewegung (Drehung) fähig und diese Veränderung sei vermehrbar oder ver-

[1]) Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. — Genève 1778. Schulz-Königsberg, Entdeckte Theorie der Parallelen. 1784.

minderbar, also quantitativer Natur, daher der Messung zugänglich.[1])

Bei diesen Betrachtungen gelte es, die Richtung von ihrem Ausgangspunkte in der Vorstellung abzulösen.

Man habe in einer Geraden von verschiedenen Ausgangspunkten identische Richtung. Nun nehme man gleiche Drehungen vor, dann habe man sicher auch gleiche Richtungen.[2]) Die neuen Schenkel seien parallel.

Mit dieser Ableitung der Parallelen sei zugleich die Vorstellung der gleichen Winkel mit der Schneidenden gegeben. Auch die Zugehörigkeit der Parallelen zu einer Ebene liege schon in dieser ihrer Genesis.

A. Dauber, Die Grundlagen der Mathematik. — Helmstedt 1871.

Der Verfasser kommt im Verlauf seiner sehr lesenswerten Abhandlung auch auf die uns hier interessierenden Fragen zu sprechen.

Die verschiedenen Geraden können quantitativ gleich sein, der Unterschied der Lage also nur in qualitativer Beziehung. Dieser qualitative Unterschied heifst ihre Richtung.

„Gerade von gleicher Richtung heifsen parallel.“ Der Richtungsunterschied zweier Geraden von verschiedener Richtung, durch Drehung um den Schnittpunkt innerhalb der Ebene erzeugbar, heifse Winkel.

„Der Winkel als der anschauliche Ausdruck der vollzogenen Richtungsänderung enthält zwar an sich nur formelle Konstruktionselemente, hat aber doch den Charakter einer Gröfse (virtuelle Raumgröfse).“

Man könne nun von der Gleichheit der Richtungen rückschliefsen auf den gleichen Unterschied gegen jede dritte.

---

[1]) Man vergl. unsere Ausführungen in Kapitel I, § 1 und in Kapitel II.

[2]) Denn es gelten die logischen Axiome:

„1) Gleiches wird durch die nämlichen Veränderungen in wieder Gleiches verwandelt.“

„2) Was durch die nämlichen Veränderungen zu Gleichem geworden ist, mufs vorher gleich gewesen sein.“

A. Germann, Studien zur Lösung der Parallelentheorie. — Ehingen 1872.

Nach einer Reihe von geometrischen Axiomen und Erklärungen, wie z. B. der Raum ist unterschiedslos, d. h. durch eine einfache Lagenänderung ohne Veränderung von Entfernungen findet keine Änderung der geometrischen Eigenschaften statt, geht Verfasser von Kugel und Kreis aus, konstruiert die Ebene als geometrischen Ort der Schnittkreise kongruenter Kugelflächen und gelangt so zu den Eigenschaften der Ebene. Die Gerade ist der Schnitt zweier Ebenen. Berührung zwischen Geraden und Ebenen ist unmöglich. Dann folgen die Sätze über die parallelen Ebenen und Geraden, die darauf ausgehen, dafs parallele Ebenen überall gleichweit von einander abstehen.

Vering, Über die Definitionen des Winkels und der Parallelen. — Neufs 1872.

Verfasser verteidigt zuerst die Einführung der Bewegung in die geometrischen Betrachtungen und wendet die Bewegung[1]) an, um „mittelst derselben zu klarer Auffassung und richtiger Erkenntnis der Raumgebilde“ zu gelangen.

Auch bei den Parallelen komme man mit Gröfsenvergleichung nicht aus; es müsse der Begriff der Richtung, also Bewegung hinzugezogen werden.

Drei mögliche Definitionen der Parallelen gebe es, die sich aus ihren Eigenschaften ergeben:

1) Parallele schneiden sich nicht.

2) Parallele haben gleichen Abstand.

Diese Erklärung habe zwei Vorzüge; sie sei erstens positiv und zweitens bleibe sie im Endlichen.

3) Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie mit einer dritten nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden.

Hier müsse die dritte Linie als bestimmt vorausgesetzt werden.

Die Parallelenlehre müsse zwischen der Winkel- und

---

[1]) Bewegung natürlich ohne Rücksicht auf Stoff, Kraft und Zeit.

Dreieckslehre abgehandelt werden. Es liefsen sich noch folgende Definitionen aufstellen:

4) Zwei Gerade, welche in einer Ebene gleiche Richtung haben, heifsen parallel.

5) Zwei Gerade heifsen parallel, wenn die eine sich ohne Drehung in die Lage der andern bringen läfst.

Obwohl der Verfasser die Schwäche dieser Definition, die doch die Parallelverschiebung implicite enthält, erkennt, giebt er ihr doch den Vorzug vor den anderen, weil nur eine Richtung in Betracht zu ziehen ist, und entwickelt aus ihr die in den andern Definitionen berührten Eigenschaften in Form von Lehrsätzen.

Leinemann, Die Theorie der parallelen Geraden. — Münster 1874.

A. Die bisherigen Theorieen.

Verfasser spricht sich gegen die Erklärung des Nichtschneidens aus. — Das Nichtschneiden sei z. B. bei Kurven durchaus kein Grund für ihre parallele Lage — und will von dem überall gleichen Abstand ausgehen.

Andre erklärten eine parallele Gerade als eine solche, welche ohne eine Schwenkung zu machen in die Lage einer andern übergehen könne.

Die Dreieckslehre sei vor der Parallelenlehre abzumachen, weil der Ausgangspunkt naturgemäfs von drei Geraden und zwar von drei sich schneidenden Geraden sei. (Der Parallelenfall ein spezieller.) — Aus pädagogischen Gründen werde aber der andere Weg eingeschlagen.

B. Versuch einer naturgemäfsen und rationellen Theorie.

I. Fundamentierende Sätze über rechte Winkel und Normalabstände.

Hier werden die Sätze abgehandelt, dafs es in einem und von einem Punkte nur ein Lot gebe, dafs das Lot dem spitzen Winkel der schrägen gegenüberliegt. Ferner

„Sind von zwei an der nämlichen Seite einer Geraden liegenden Punkten aus Senkrechte auf dieselbe herabgelassen, so bildet die Verbindungslinie dieser Punkte Winkel mit den Senkrechten, deren Summe gleich zwei Rechten ist."

Dieser Satz, der also das Axiom enthält, das als Ersatz des elften von Simon z. B. aufgestellt wurde, wird mit Hülfe von Drehung nach Art des Thibaut'schen Beweises bewiesen.

„Wenn zwei von einer Geraden auf eine andre herabgelassene Lote gleich sind, so bilden sie auch rechte Winkel an den Ausgangspunkten."

Beweis durch Umklappen um ein gedachtes Mittellot.

„Wenn zwei Verbindungslinien zweier Geraden lauter rechte Winkel mit ihnen bilden, so sind die ersteren gleich."

Indirekter Beweis.

„Eine begrenzte Gerade hat lauter gleiche senkrechte Abstände von einer Geraden, wenn ihre Endpunkte von der andern gleiche Abstände haben."

„Dies gilt nicht für eine krumme oder eine gebrochene Linie."

„Auch eine unbegrenzte Gerade kann so liegen, dafs alle von ihr aus auf eine zweite zu fällenden Lote gleich sind."

II. Die Parallelenlehre selbst.

„Erklärung: Eine unbegrenzte Gerade ist zu einer andren parallel, heifst, ihre senkrechten Abstände von derselben sind gleich."

Es folgen nun eine Reihe von Lehrsätzen, die alle auf Grund der in I. aufgestellten Sätze ausführlich bewiesen werden, zum grofsen Teil indirekt. Diese Sätze sind:

„Senkrechte auf der einen Parallelen sind auch auf der andern senkrecht, folglich auch die zweite der ersten parallel."

„Zwei Lote auf derselben Geraden sind parallel."

„Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Parallele."

„Zu zwei sich schneidenden giebt es keine gemeinsame Parallele."

„Sind zwei Gerade zu einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel."

Dann folgen die Sätze, die über die Winkel bei einer Transversalen durch die Parallelen handeln. Als letzter Satz schliefslich:

„Zwei Parallelen können sich nicht schneiden.“

III. Von den Nichtparallelen.

Dieser Abschnitt giebt zuerst die Umkehrungen der Winkelsätze und schliefst dann ab mit dem Satz:

„Sich trotz aller Verlängerung nicht schneidende Geraden derselben Ebene sind parallel.“

Die vorliegende Abhandlung kann recht als ein Typus gelten für die vergebliche Mühe, einen Beweis für das Parallelenaxiom zu liefern.

Günther, Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert. — Ansbach 1877.

Thibaut's Beweis stützt sich auf das Axiom, dafs die drehende Bewegung unabhängig sei von der progressiven.

Zuerst geht Günther darauf ein, ob die Eigenschaft der geraden Linie, nach einer vollen um einen ihrer Punkte vollzogenen Umdrehung in sich selbst zurückzukehren, als bekannt vorausgesetzt werden dürfe. Thibaut's eigne Erklärung schliefse die Eigenschaft nicht ohne weiteres in sich.

Thibaut's Versuch habe nicht die ihm gebührende Anerkennung gefunden.

Kunze gebe den Beweis in seinem Lehrbuche — offenbar unabhängig von Thibaut —, indem er sich einfach auf die unmittelbare Anschauung berufe.

Gründlicher, aber um nichts exakter sei Germar's Versuch in Grunert's Archiv, von dem Günther eine gedrängte Inhaltsübersicht giebt.

In neuerer Zeit habe nur der Leitfaden von Fischer-Schröder den Thibaut'schen Beweis. Er stütze sich auf folgende beiden Axiome.

„I. Ein Strahl, der eine gegebene Richtung verläfst, kann auf eine Ebene, ohne rückläufig zu werden, durch keine einfachere und kürzere Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkommen, als durch eine volle Umdrehung um seinen Anfangspunkt als festen Scheitel.

II. Ein Strahl kann durch keine einfachere und kürzere Bewegung aus einer gegebenen Richtung in die entgegen-

gesetzte gelangen als dadurch, dafs er um seinen Anfangspunkt einen gestreckten Winkel beschreibt.“[1])

Infolge dieser Doppelannahme zerfalle der Beweis in zwei Teile, deren erster mit demjenigen Thibaut's übereinstimme, während der zweite neu sei und deshalb spezielle Beachtung verdiene.

Der Verfasser geht dann auf die fundamentale Identität der Grundgedanken von Thibaut und Grafsmann ein.

Es folgt sodann der kritische Teil, der auf folgende drei Fragen Beantwortung sucht:

„1) Involvieren sämtliche Beweisversuche, die wir besprochen, ein und dieselbe unbewiesene stillschweigend angenommene Voraussetzung, und durften sie diese Annahme mit Recht machen?

2) Wie läfst sich diese Schwäche, wenn sie sich als solche erweisen sollte, beseitigen, so dafs den Anforderungen mathematischer Strenge wie auch pädagogischer Erfahrung möglichst entsprochen werde?

3) Kann endlich die Behauptung, das jedenfalls notwendig werdende Axiom sei „eine Folgerung aus dem Fundamentalprinzip unserer Raumanschauung“, Anspruch auf Berechtigung erheben?“

Ad 1) Die Mechanik behandle die Vertauschung von Translation und Rotation nicht als Axiom, sondern als — allerdings leicht zu beweisendes — Theorem. Der Beweis gehe auf die Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm zurück.

Ad 2) Ein Axiom ist nötig nach allgemeiner Übereinstimmung. Im Interesse des Unterrichts liege es, sich zu einigen. Verfasser schlägt folgendes vor:

„Eine aus ihrer ursprünglichen Richtung herausgerückte und dann in ein und derselben Ebene willkürlich bewegte Gerade hat, sobald sie in ihre Anfangslage zurückgelangt ist, jedenfalls eine Drehung von m vollen Winkeln ($=360^0$) zurückgelegt, unter m eine willkürliche ganze Zahl verstanden.“

Zweierlei sei klargestellt, dafs der Beweis von Thibaut's

---

[1]) Man vergl. S. 214.

Prinzip auf die Parallelensätze zurückgehe, dafs aber andrerseits dieser oder ein ähnlicher Grundsatz aufserordentliche Vorzüge für die Didaktik der Elementargeometrie besitze.

Die Beantwortung der Frage 3) hänge aufs engste mit dem Begriffe des Axioms zusammen. Verfasser geht an der Hand von Erdmann's bekanntem Werke näher auf die Frage ein und kommt dazu, Frage 3) zu verneinen.

Zum Schlufs spricht Günther die Hoffnung aus, „dafs die Geometrie des Raumes für das alte Kreuz der Geometer noch ein anderes Hülfsmittel finden werde, als jenes der blofsen Resignation im Gauss'schen Sinne."

Günther giebt am Schlusse seiner Abhandlung noch eine Zusammenstellung der Literatur, die wir hier ebenfalls mitteilen wollen, wenn auch viele der Werke schon an anderen Stellen von uns mitgeteilt, zum teil auch ausführlich benutzt worden sind.

1) Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles, Mémoir de l'acad. royale des sciences. Tom. XII. S. 370 ff.

2) Mansion, Sur le premier livre de la géométrie de Legendre à propos de quelques traités récents, Revue de l'instruction publique 1870. S. 317 ff.

3) Pietzker, Hoffm. Zeitschr. VII., S. 470.

4) Günther-Sparagna, Sulla possibilità di demostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni geometriche, Battaglini's Giornale di matematica. Vol. XI. S. 11.

5) Gauss, Göttinger Gelehrte Anzeigen 1822. S. 1727.

6) Thibaut, Grundrifs etc. Göttingen 1818.

7) Hankel, Die Entwicklung der Mathematik etc. Tübingen 1869.

8) Günther, Ziele und Resultate der neueren math.-hist. Forschung. — Erlangen 1876.

9) Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Berlin 1877.

10) Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1841.

11) Germar, Die Wichtigkeit etc. in Grunert's Archiv. Bd. XV. p. 361 ff.

12) Fischer's Lehrb. der Planimetrie von Schröder Nürnberg 1870.

13) Helmholtz, Über die Thatsachen etc. Gött. gel. Anz. 1868.

14) Schlegel, System der Raumlehre. Leipzig 1872.

15) v. Wolf, Anfangsgründe etc. Halle 1710.

16) Kästner, Anfangsgründe etc. Göttingen 1792.

17) Grunert, Lehrbuch der Eb. Geometr. — Brandenburg 1869.

18) Killing, Über einige Bedenken etc. Hoffm. Zeit. Bd. VIII. p. 220.

19) Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877.

20) Helmholtz, Pop. wiss. Vortr. — III. Heft. — Braunschweig 1876.

21) Günther, Kritik der Raumtheorieen von Helmholtz und Schmitz-Dumont. — Zeitschrift f. d. Realschulwesen. 1. Jahrg. p. 410 ff.

22) Hoüel, Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide. — Bordeaux 1869.

23) Baltzer, Über die Hypothesen der Parallelentheorie. Crelle's Journal, Bd. 83. p. 372 ff.

24) Genocchi, Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques. — Bull. de l'acad. Belg. XXXI, S. 181 ff.

25) De Tilly, Reponse sur cette lettre. Ibid.

26) Hoffmann, Die Prinzipien des I. Buchs etc. — H. Z. III, p. 121.

Polster, Geometrie der Ebene.[1]) — Würzburg 1878.

In einer Vorstufe schickt Verfasser eine Reihe von Sätzen über die Gerade voraus, deren Definition er nach Euklid gegeben hat.

Solche Sätze sind z. B.: „Eine Gerade ist an jedem Punkte

[1]) Man vergleiche desselben Verfassers „Versuch einer Parallelentheorie“ in Blätter für das Bair. Gymn.- und Realschulwesen. — Jahrgang 1877.

gerade." „Eine Gerade kann nicht in sich zurücklaufen." Es folgt dann die Definition:

„Eine unbegrenzte Gerade von bestimmter Art ihrer Lage und nach bestimmter Reihenordnung der in ihr liegenden Punkte heifst Richtung," an die sich wieder Sätze anschliefsen, wie die folgenden:

„Alle Punkte einer Geraden liegen in derselben Richtung."

„Jede Richtung hat von Punkt zu Punkt dieselbe Form."

„Eine Strecke wird durch Verschiebung verlängert."

„Alle Richtungen sind unter sich kongruent."

Es folgt dann ein Abschnitt über die gegenseitigen Lagen gerader Linien in einer Ebene. Definition 3 lautet:

„Zwei Gerade, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, ohne einander zu schneiden, heifsen parallele Geraden oder Zeilen."

Das dritte Kapitel dieses Abschnittes „Theorie der Konvergenz und des Parallelismus" bringt u. a. 10 Kriterien der Konvergenz (alle im wesentlichen identisch mit dem elften Axiom) und vier Kriterien des Parallelismus, woran sich die Sätze über die Winkel an der Transversalen anschliefsen.

Zwei Anhänge betrachten dieselben Sätze wie Kapitel 3) im wesentlichen von demselben Gesichtspunkte aus.

Most, Neue Darlegung der absoluten Geometrie etc. Coblenz 1883.

Von Gauss ausgehend schildert Verfasser das Verhältnis der absoluten Geometrie zu den Einzelgeometrieen. Hauptsatz der absoluten Geometrie sei: „Die Inhalte der Dreiecke verhalten sich wie die Abweichungen ihrer Winkelsummen von zwei Rechten."

Dafs der ebene Raum unendlich gedacht werden müsse, darüber entscheide nur eine für die ebene Raumform charakteristische Voraussetzung, sei es, dafs die Linien konstanten Abstandes gerade seien, sei es, dafs es wirklich in aller Strenge ähnliche Figuren gebe.

Es folgen Betrachtungen über den absoluten Raum und werden eine Reihe von Sätzen entwickelt.

Dann heifst es: „Eine Linie, welche von einer Geraden

überall denselben Abstand hat, wird Parallele der Geraden genannt; es ist selbstverständlich damit nicht gesagt, dafs diese Linie eine Gerade sein soll.“

Die Abhandlung schliefst mit dem interessanten Nachweis, dafs die verschiedenen Geometrieen — pseudosphärische, Euklidische, sphärische — im Unendlichkleinen übereinstimmen.

A. Schmitz, Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie. — Neuburg a. D. 1884.

§ 1. Das elfte euklidische Axiom.

Bertrand's Beweis wird unter Zurückweisung von Lüroth's (Schl. Z. Bd. 21) Einwürfen als unrichtig bezeichnet, weil sowohl Winkelfelder als Parallelstreifen etwas Unendliches seien.

Legendre's Beweis sei ein circulus (petitio principii.)

Thibaut's Beweis setze ein anderes, allerdings auch unsicheres Axiom an die Stelle des elften.

§ 2. Die Geometrie von Lobatschewsky-Bolyai.

1) Betrachtungen über die unendlich fernen Punkte.

Parallele Gerade können als solche betrachtet werden, die sich in einem unendlich fernen Punkte unter einem unendlich kleinen Winkel schneiden.

2) Erklärung von „Parallelwinkel zur Distanz OA“ (Abstand). Sätze über die Parallelen.

3) Über die Winkelsumme im Dreieck.

4) Über die Beziehungen zwischen der Winkelsumme des Dreiecks und der Dreiecksfläche.

5) Über den Abstand von parallelen und nicht parallelen Geraden.

6) Krumme Linien (Schnittpunkte; Grenzlinie; Linie gleichen Abstandes).

§ 3. Die Unbeweisbarkeit des elften Axioms.

Die absolute Geometrie liefere den Beweis, dafs das elfte Axiom keine Folge der übrigen sei, sondern dafs der Inhalt desselben nur durch Erfahrung gewonnen werde.

§ 4. Die Bedeutung der hervorragendsten an die Geometrie von Lobatschewsky sich anschliefsenden Arbeiten.

Literatur: Battaglini, giornale di matematiche Bd. V. (1867.)

Beltrami (von Hoüel übersetzt) in annales scientifiques etc. — Bd. VI. (1868.)

Klein, Math. Annalen Bd. 4, 6, 7.

Beez, Math. Annalen Bd. 7.

Schlömilch's Z. Bd. 20, 21, 24.

§ 5. Riemann's und Helmholtz' Grundsätze.

Unser Raum der einzig mögliche und denkbare.

Die Dreidimensionalität und die Unendlichkeit besitze absolute Gewifsheit. Ebenso besitze das elfte Axiom absolute Gültigkeit, es spreche eine wesentliche Eigenschaft des Raumbegriffes aus. Es sei unbeweisbar — unabhängig von den übrigen Axiomen — aber es konstituiere gemeinsam mit den übrigen den Raumbegriff.

§ 6. Philosophische Konsequenzen für die Definition des Raumbegriffs.

Dieser Abschnitt schliefst mit folgenden Definitionen:

„1) Raum ist ein Begriff, durch welchen die Möglichkeit der Koexistenz der Körper ausgedrückt wird.

2) Es existieren feste Körper, deren räumliche Verhältnisse durch drei Hauptrichtungen bestimmt sind; diese sind vollkommen frei nach den drei Richtungen hin beweglich, die Beweglichkeit kann jede beliebige Geschwindigkeit und Dauer haben.

3) Zwischen zwei Punkten giebt es nur einen kürzesten Weg — die Gerade.

4) Das elfte Euklidische oder ein demselben äquivalentes Axiom.“

H. Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. — Breslau 1885.

Sage man von Parallelen, sie haben einen Punkt im Unendlichen gemein, so trete ein Widerspruch zwischen Attribut und Prädikat hervor; das Sichnichtschneiden werde als ein besonderer Fall des Sichschneidens gefafst, nämlich als ein Schneiden in unendlicher Entfernung; es werde die im Gattungsbegriffe liegende Negation zum Artmerkmal gemacht.

Die richtige Erkenntnis werde gewonnen durch richtige Auffassung der Grenzbegriffe und durch die Methode des Einschliefsens in Grenzen.

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887.

Ich mufs mich begnügen auf diese Arbeit hinzuweisen, da ein Zitieren aus ihr nicht gut angängig ist. Für unsere Frage kommen in Betracht § 111 u. f. § 118 bringt die appellative Definition:

„Geraden der Ebene, welche sich nicht schneiden, heifsen Parallelen."

Von Bedeutung sind ferner § 131 u. f., besonders § 136.

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

Nach einer wertvollen, historischen Einleitung behandelt § 1 die Definitionen Euklids, § 2 die Forderungen und Axiome Euklids. Dieser Paragraph ist es, der unser besonderes Interesse in Anspruch nimmt.

Schon die alten Philosophen gingen in ihren Ansichten über Axiome und Forderungen weit auseinander.

Verfasser bezeichnet mit Liebmann die Axiome als Denknotwendigkeiten, die Forderungen als Anschauungsnotwendigkeiten. Zwei Fundamentalsätze, über deren Einordnung die verschiedenen Ausgaben Euklid's schwanken, will er näher betrachten:

1) das sogen. elfte Axiom,

2) den Satz: Zwei Geraden schliefsen keinen Raum ein.

Beez beginnt mit Satz 2, den Proklus unter die Axiome gerechnet habe. Dafür gelte es noch heute; Zweifel sei aber nicht ausgeschlossen, da es sich um Unendliches handle, das der Anschauung verschlossen sei. Eine logische Notwendigkeit sei der Satz nicht, eine Anschauungsnotwendigkeit nur innerhalb des eng begrenzten Gebietes unsrer Anschauung. (Analogie mit den gröfsten Kreisen auf der Kugelfläche.) — Es wird dann auf den Zusammenhang mit dem ersten Satze

eingegangen, dessen merkwürdige Stelle im System betont wird. Auch er sei keine Denknotwendigkeit, aber auch, dafs er eine Forderung sei, werde von Proklos bis auf Gauss bestritten. An seine Stelle liefse sich setzen „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden kann nur eine Parallele gezogen werden“ oder „die Winkelsumme im Dreieck beträgt $2R$.“ Man habe andere Definitionen der Parallelen aufgestellt, aber immer wieder sei man auf einen Satz gestofsen, der nicht bewiesen werden konnte, obwohl Jeder ihn für richtig halten mufste. Verfasser verweist auf den Artikel „Parallel“ von Sohnke in der Encyklopädie von Ersch und Gruber, in der von Proklus bis auf Gräf (1837) 92 verschiedene Schriftsteller aufgeführt würden. Sohnke mache drei Kategorieen: 1) Neue Definition; 2) Neues Axiom; 3) Besondere Auffassung der Geraden und des Winkels.

Zum Schlufs dieses Paragraphen spricht sich Beez noch gegen die Definition der Parallelen als Geraden von gleicher Richtung aus.

Im § 3 behandelt Beez „die Nicht-Euklidische Geometrie.“ Hier sind die ersten Ausführungen noch für uns von Interesse.

Von Gauss datiere eine neue Auffassung der Sache, dafs nämlich die Versuche, das elfte Axiom zu beweisen, deshalb ohne Erfolg bleiben müfsten, weil durch dasselbe den übrigen Axiomen eine Voraussetzung beigefügt werde, die nicht notwendig mit ihnen verbunden zu sein brauche.

Verfasser geht näher auf die absolute Geometrie ein (zwei Parallelen durch einen Punkt möglich), kommt auf die Flächenuntersuchungen und das Krümmungsmafs zu sprechen und würdigt ausführlicher Beltrami's Arbeiten. Er schliefst diese Erörterungen mit den Worten:

„Durch das Vorhergehende ist die Möglichkeit einer Geometrie, in welcher das Euklidische Axiom keine Geltung hat, dargethan und damit erwiesen worden, dafs dasselbe nicht als eine Folge der übrigen Euklidischen Axiome d. h. als ein Theorem anzusehen ist, wie Gauss zuerst erkannt hat. Wir können den betreffenden Satz aber auch nicht für eine Forderung d. h. eine Anschauungsnotwendigkeit halten, ebenso

wenig für ein Axiom d. h. eine Denknotwendigkeit; er ist vielmehr, ganz so wie der andere Satz „zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein“ eine Voraussetzung, zu welcher uns die spezifische Beschaffenheit des empirischen Raumes nötigt.“

Prof. Dr. Lindemann, Über die Hypothesen der Geometrie. Separat-Abdr. a. d. Schriften d. Physik.-ökon. Gesellsch. zu Königsberg in Pr. Bd. XXXII. 1891. Sitzungsber. p. 20.

Nach unseren Anschauungen schneiden sich in der Ebene gerade Linien in einem Punkte oder sie sind parallel. Hat aber die Fläche, auf der wir zeichnen, eine Krümmung wie die Erdoberfläche, so schneiden sich Linien, die den Geraden entsprechen, z. B. Meridiane in zwei Punkten (z. B. den Polen) und es giebt keine Parallelen. Dadurch tritt neben der gewöhnlichen oder euklidischen Planimetrie die Zeichnung auf der sphärischen Fläche mit ganz anderen, aber ebenso widerspruchsfreien Resultaten auf. Eine dritte neue Auffassung erhalten wir, wenn wir auf einer sattelförmigen Fläche zeichnen. Der Vortragende erläuterte solche Betrachtungen an Modellen und knüpfte daran die folgenden Erörterungen.

Das sogenannte Parallelenaxiom (eigentlich das fünfte Postulat in Euklids Elementen) hat schon seit dem Altertum die Mathematiker und Philosophen vielfach beschäftigt. Die aufgeworfene Frage ist die, ob dieses Postulat eine logische Folge der übrigen von Euklid aufgestellten Definitionen, Postulate und Axiome sei, oder nicht, d. h. ob der Inhalt dieses Postulates nicht vielmehr unter die Lehrsätze, als unter die Postulate (bezw. Axiome) gehöre. Die Versuche, einen Beweis für das Postulat zu erbringen, sind fast ebenso zahlreich gewesen, wie diejenigen, welche zur geometrischen Lösung der Quadratur des Kreises gemacht wurden, und ebenso vergeblich. Erst durch die Arbeiten von Gauss, Bolyai, Lobatschewsky (ca. 1835), Riemann (1854), v. Helmholtz (1870) ist man in unserem Jahrhundert sich darüber vollkommen klar geworden. Da alle versuchten Beweise mifsglückt waren, lag es nahe, einen indirekten Weg einzuschlagen: War das fragliche Postulat ein Lehrsatz, so stand zu erwarten, dafs man zu inneren Widersprüchen geführt werde, falls man

dasselbe durch ein anderes Postulat ersetzte und auf Grund eines solchen mathematische Schlüsse zu machen suchte.

Eine unmittelbare Folge des fünften Postulates von Euklid ist der Satz, dafs man in der Ebene durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen könne. Gauss, Bolyai und Lobatschewsky nahmen im Gegensatze dazu an, dafs zwei solche Parallelen möglich seien, und zeigten, dafs die dann zu ziehenden Folgerungen zwar mit unserer Anschauung, aber nicht unter sich in Widerspruch stehen. Die so aufzubauende, in sich konsequente Geometrie, welcher in der Wirklichkeit die uns bekannten Figuren nicht entsprechen, ist unter dem Namen der absoluten oder nichteuklidischen Geometrie besonders durch die populären Vorträge von v. Helmholtz allgemein bekannt geworden. Bei dem nicht mathematischen Publikum ist sie gleichzeitig nur allzu oft verkannt worden; insbesondere haben zahlreiche und angesehene Philosophen ihretwegen den Mathematikern den Vorwurf eines unklaren Mystizismus gemacht, aber nur deshalb, weil sie nicht die nötigen Vorkenntnisse besafsen, um Zweck und Sinn der nichteuklidischen Geometrie zu verstehen. Ob der Inhalt eines Satzes beweisbar oder nicht beweisbar ist, mufs für die Mathematik als eine Frage fundamentalster Wichtigkeit erscheinen. Wenn wir zur Entscheidung dieser Frage etwas Unmögliches voraussetzen (nämlich durch die erwähnte Abänderung des Parallelenaxioms), so thun wir nichts anderes, als in der Mathematik bei jedem indirekten Beweise geschieht; und nur offenbarer Unverstand kann ein solches Vorgehen bei dieser einen Frage verwerfen, während es bei so vielen anderen in Gebrauch ist. Das Wesen der indirekten Beweise beruht darauf, dafs aus einer gemachten Annahme mathematische Schlüsse gezogen werden, deren Inhalt mit bereits sonst bewiesenen mathematischen Sätzen im Widerspruche steht, so dafs dadurch die Unzulässigkeit der gemachten Voraussetzung erhellt. Man hätte also erwarten müssen, dafs auch die nicht euklidische Geometrie zu einem mit den sonstigen Voraussetzungen der Geometrie nicht verträglichen Resultate führe. Dem ist aber nicht so; allerdings könnte man denken, dafs bei hinreichend weit fortgesetzter

Ausführung dieser Geometrie sich ein solcher Widerspruch ergeben müsse, dafs diese Ausarbeitung bis heute nur noch nicht weit genug geführt sei; denn der aus einer unmöglichen Voraussetzung zu folgernde Widerspruch braucht nicht sogleich auf der Hand zu liegen, wird vielmehr oft erst durch sehr weitläufige Schlüsse erkennbar. Derselbe darf aber auf keinen Fall aus der Anschauung entnommen werden; denn die wissenschaftliche Geometrie hat eben die Aufgabe, aus wenigen unbewiesenen (meist der Anschauung entnommenen) Sätzen durch logische Verknüpfung dieser Sätze neue Resultate abzuleiten, ohne von neuem sich auf die Anschauung zu berufen.

Thatsächlich liegt die Frage nach neueren Untersuchungen aber so, dafs man in der nichteuklidischen Geometrie nie zu einem solchen Widerspruche gelangen kann. Es ist das grofse Verdienst Felix Klein's, hierauf hingewiesen zu haben; nach ihm nämlich läfst sich jedem Satze der nichteuklidischen Geometrie ein anderer (aus dem Parallelenaxiom ableitbarer) Satz unserer gewöhnlichen Euklidischen Geometrie derartig an die Seite stellen, dafs der letztere notwendig falsch sein müfste, wenn ersterer einen Widerspruch enthielte. Sollte daher die nichteuklidische Geometrie nicht in sich widerspruchsfrei sein, so müfste auch unsere gewöhnliche Geometrie falsch sein; es würde dann alle geometrische Forschung unmöglich. Hiermit ist endgültig bewiesen, dafs es unmöglich ist, das sogenannte Parallelenaxiom zu beweisen; und dieses mit Hülfe der viel geschmähten nichteuklidischen Geometrie gewonnene Resultat giebt uns erst definitiv die unentbehrliche feste Grundlage aller geometrischen Untersuchung. Leider scheint es noch immer nicht hinreichend bekannt zu sein, denn es giebt noch immer elementare Lehrbücher, in denen falsche Beweise des Parallelenaxioms reproduziert werden.

Auch auf Grund der Untersuchungen von Riemann und Beltrami über das sogenannte Krümmungsmafs des Raumes kann man ähnliche Folgerungen ziehen; dieselben sind aber insofern nicht einwurfsfrei, als es bei ihnen an einer rein geometrischen Definition der dabei benutzten Koordinaten

fehlt; gleiches gilt in Bezug auf die Helmholtz'schen Entwickelungen.

Es ist ferner von Klein darauf hingewiesen worden, dafs man unter Anlehnung an gewisse Betrachtungen v. Staudt's zur direkten Begründung der analytischen Geometrie gelangen kann, ohne dabei irgend welche metrischen Sätze zu benutzen. Vom Vortragenden ist dieser Gedanke neuerdings eingehend durchgeführt, und mag deshalb auf die kürzlich von ihm herausgegebenen „Vorlesungen über Geometrie, zweiter Band, erster Teil" verwiesen werden. Die Klein'sche Methode führt direkt zur Begründung aller „rein projektivischen" Sätze, von denen auch sonst bekannt war, dafs sie in der nicht euklidischen Geometrie unveränderte Gültigkeit haben. Erst in der metrischen Geometrie, das heifst bei Einführung der für jene Gesetze notwendigen Begriffe der Entfernung und des Winkels beginnt der Unterschied beider Arten von Raumlehre.

Wenn man daran festhält, dafs bei einer „Bewegung" jeder Punkt wieder in einen Punkt, jede gerade Linie wieder in eine gerade Linie übergehen soll (womit auch ausgesagt ist, dafs die unendlich fernen Elemente auch unendlich fern bleiben sollen), so bleiben (vergl. die Ausführungen a. a. O.) drei Möglichkeiten übrig, die miteinander gleich berechtigt sind, und zwischen denen nur eine neue Erfahrungsthatsache entscheiden kann, nämlich: 1. die gewöhnliche Euklidische Geometrie, 2. die schon von Gauss studierte nicht euklidische Geometrie und 3. eine zweite Abart der letzteren, deren Möglichkeit von Riemann zuerst bemerkt wurde, und bei welcher die Existenz einander paralleler Linien überhaupt geleugnet wird.

Besonders hervorzuheben ist, dafs man bei letzterer Geometrie den Satz, dafs zwei Punkte eine Gerade immer fest bestimmen, nicht notwendig fallen zu lassen braucht, wie von Helmholtz, Benno Erdmann und vielen anderen irrtümlicher Weise behauptet ist; es sind vielmehr zwei weitere Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem man diesen Satz beibehalten will oder nicht.

So sind wir jetzt nach Jahrtausenden fortgesetzter Arbeit endlich zu der sicheren Erkenntnis gekommen, dafs an den

Grundlagen der Geometrie, wie sie Euklid festgelegt hat, nicht zu rütteln ist, dafs er mit bewundernswertem Scharfsinn richtig handelte, indem er den Inhalt des fünften Postulates eben als Postulat und nicht (wie unzählige seiner Nachfolger) als Lehrsatz gab.

Ergänzend mag hier bemerkt werden, dafs die Parallelentheorie in den beiden elementaren Lehrbüchern von Mehler (6. Auflage 1889) und Baltzer (5. Auflage, Leipzig 1878), welche in unserer Provinz vorwiegend in Gebrauch zu sein scheinen, der Hauptsache nach richtig behandelt ist. Bei Mehler geschieht dies allerdings in so knapper Form, dafs die richtige Erfassung des Sachverhaltes besondere Aufmerksamkeit erfordert; wenigstens habe ich bei den Prüfungen der Lehramtskandidaten die Erfahrung gemacht, dafs die betreffende Stelle bei Mehler nur selten richtig verstanden wird. In § 9 nämlich (Seite 6) wird durch das bekannte Umlegungs-Verfahren der Satz bewiesen, dafs die beiden von einer dritten geschnittenen Linien parallel sind, wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, wodurch (gemäfs der in § 8 gegebenen Definition paralleler Linien), nur ausgesagt ist, dafs sich die beiden Linien, beliebig weit verlängert, nicht schneiden. Es wird meist übersehen, dafs dieser Satz nicht umkehrbar ist; erst durch den bei Mehler im § 10 aufgestellten Grundsatz, nach welchem man durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine (nicht unendlich viele, wie nach § 9 noch denkbar wäre) Parallele ziehen kann, wird die Umkehrbarkeit des Satzes erreicht. Der im § 9 gegebene Beweis involviert gleichwohl noch eine nicht ausdrücklich hervorgehobene Voraussetzung, nämlich (wie ich a. a. O. p. 550 näher erörtert habe) diejenige, dafs die Ebene durch eine beliebige gerade Linie in zwei völlig getrennte Teile zerlegt werde. Nur durch das stillschweigende Hinzufügen dieser Annahme gelingt es bei Mehler, die oben erwähnte dritte Möglichkeit (die elliptische Geometrie) auszuschliefsen, während die zweite Möglichkeit (die hyperbolische Geometrie) durch den angeführten Grundsatz beseitigt wird.

Bei Baltzer (a. a. O. p. 12) ist der Gedankengang ein ganz analoger. Nur ist die Definition von Parallelen eine andere und in sofern weniger gute, als die Worte „unendlich

ferne Punkte“ in ein Elementarbuch nicht hineingehören; sie richten hier nur, wie ich bei den Prüfungen zur Genüge erfahren habe, Verwirrung an. Die zuletzt erwähnte stillschweigende Voraussetzung ist auch bei Baltzer gemacht; da durch diese die elliptische Geometrie schon ausgeschlossen ist, hat man nur noch die Wahl zwischen zwei (nicht, wie auf S. 13 behauptet wird, zwischen drei) verschiedenen Geometrieen.

M. Simon, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. — Strafsburg 1891.

Verfasser kommt in § 8 seiner höchst lesenswerten und gediegnen Arbeit, die volle Vertrautheit mit seinem Gegenstande erkennen läfst, auf „das Parallelenaxiom“.

Von den zahllosen Versuchen es zu beweisen will Simon nur die vier verbreitetsten besprechen von Legendre, Thibaut, Bertrand und den direkten.

Legendre gehe von der stillschweigenden Voraussetzung aus, dafs die gerade Linie unendlich lang sei und dafs daher zwei Gerade nur einen Punkt gemeinsam hätten. Die Annahme, dafs man durch jeden Punkt im Innern eines Winkels eine Gerade ziehen könne, welche beide Schenkel schneidet, sei nur eine andere Form des Parallelenaxioms.

Der Thibaut'sche Beweis sei von Günther[1]) als eine Folge des Parallelenaxioms nachgewiesen.

Der Bertrand'sche Beweis, der wohl die meisten Anhänger gefunden, sei von Schmitz[2]) in einer Unhaltbarkeit schlagend nachgewiesen worden.

„Der direkte Beweis aus der „unmittelbaren Anschauung“ ist derselbe, der auf der Kugel zeigt, dafs das sphärische Dreieck seinem Exzefs gleich ist.“

„Aus seiner Umkehrung ist unzweifelhaft das Parallelenaxiom bei Euklid hervorgegangen.“

„Dafs der Schein auch bei diesem Beweis trügt,“ weist der Verfasser in längerer Betrachtung nach.

---

[1]) Vergleiche unser Zitat.

[2]) Vergleiche unser Zitat.

Hiermit will ich die Zitate aus besondren Werken schliefsen, denn das Eingehen auf verschiedene andere Arbeiten, besonders — neben den Originalarbeiten — auf die Veröffentlichungen von Pietzker würde mich zu weit führen und von dem eigentlichen Zwecke des vorliegenden Werkes zu weit entfernen. Doch will ich nicht unterlassen, gerade auf die Arbeiten Pietzkers besonders hinzuweisen: ist er ja doch zur Zeit wohl der energischste Vertreter der Richtung, die sich mit den Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht befreunden kann. Allerdings wird ihm von gegnerischer Seite der Vorwurf nicht erspart, sich in Mifsverständnissen zu befinden: aber dieser Vorwurf ist jener Seite so geläufig [1]), dafs Jemand geneigt sein könnte, die vielen Mifsverständnisse als Beweis anzusehen, dafs ein rechtes Verständnis überhaupt nicht möglich ist.

Ich lasse übrigens, ehe ich die Zitate aus den Lehrbüchern bringe, hier noch ein Verzeichnis von Schriften folgen, die sich besonders den neueren, an Parallelentheorien anknüpfenden Ansichten widmen, wobei ich von den Aufsätzen in den Mathematischen Annalen und Crelle's Journal, sowie in den eigentlichen mathematischen Zeitschriften des Auslandes absehe. Zu nennen sein würden hier besonders Klein, Killing, Schur, Lipschitz, Beltrami, Lie, Engel.

Das Verzeichnis macht durchaus keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

P. Duchemin, Des parallèles dans l'espace. Droites et plans parallèles. — Avranches.

P. Duchemin, Théorie des parallèles et certitude de la géométrie — Coutances.

P. Duchemin, Théorie des parallèles sans postulatum et certitude de la géométrie. — Coutances.

L. C. Dadgson, Curiosa Mathematica. Part. I.: A new theory of parallels. — London.

---

[1]) Man lese nur die Schriften von Klein, Lie, Lindemann etc., so wird man mit Erstaunen wahrnehmen, wie oft diese Vertreter der Nicht-Euklidischen Geometrie sich gegenseitig — aber auch noch andern z. B. Helmholtz — den Vorwurf machen, mifsverstanden worden zu sein.

L. Liard, Des définitions géométriques et des définitions empiriques. — Nouvelle édition. — Paris.

A. Sannia ed. E. d'Ovidio, Elementi di Geometria. — Napoli.

R. Betazzi, I postulati e gli enti geometrici. — Roma.

H. Poincaré, Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. — S. M. F. Bull. XV.

J. Petersen, Om Mathematikers Grundbegreber. Bewis for Sätningen om Trekantens Winkelsum. Tidskrift for Math. — Kopenhagen.

J. Carbonelle, Les incertitudes de la géométrie. — Revue de qu. sc. 14.

H. Wehr, Die Subjektivität des Raums und des 11. Axioms Euklids. — Wien.

E. Beltrami, Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euklidea. — Napoli 1868.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. (Angefügt von J. Hoüel seiner Übersetzung von Lobatschewsky's Parallelentheorie.) — Paris 1866.

E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie. — Paris 1883. — p. 553. Note II: „Sur la géométrie non euclidienne.“ (Besonders wertvoll auch die reiche Litteraturangabe.)

La science absolue de l'espace. Indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome 11 d'Euclide par J. Bolyai. Précédé d'une notice sur la vie et les traveaux de W. et de J. Bolyai par M. Fr. Schmidt. — Paris 1868.

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. II. Bd. — Leipzig.

Frischauf, Absolute Geometrie nach Bolyai. — Leipzig 1872.

N. Lobatschewsky, Theorie der Parallellinien. 2. Aufl. — Berlin 1887.

M. Simon, Die Elemente der Geometrie, mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. — Strafsburg 1890.

Hauff, Lehrbegriff der reinen Mathematik. — Frankfurt a/M. — 1803.

p. 155 wird der Satz von der Winkelsumme im Dreieck aufgestellt und weitläufig indirekt bewiesen, wobei natürlich versteckte Axiome unterlaufen.[1])

In einer Anmerkung (p. 163) bemerkt der Verfasser, dafs dieser Lehrsatz der Grundstein der Euklidischen Geometrie sei. Euklid habe an Stelle seines 16. Satzes den Beweis vom 32. gesucht und darin gefehlt, dafs er ein unberechtigtes Axiom aufgestellt und einen Satz von einem andern hergeleitet habe, während gerade das umgekehrte stattfinden müsse.

p. 193—202 wird auf die Parallelenlehre näher eingegangen.

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 6: „Die Richtung einer Linie, in Beziehung auf die Richtung einer andern Linie gedacht, wird ihre Lage genannt. Diese kann nun eine solche sein, dafs sich die Linien .... nicht durchschneiden .... die parallele Lage.“

Richtungsbeweis.[2])

Bertrand, Élémens de Géométrie. — Paris 1812.

p. 12: „Théorème: Lorsque les angles intérieurs sont égaux à deux droits, les droites qui les font sur une troisième, ne se rencontrent pas.“

Beweis durch Kongruenz der Halbstreifen.[3])

„Premièrement, on dit de deux lignes, qui tracées sur le même plan ne s'y rencontrent pas, qu'elles sont Parallèles.“

---

[1]) Das ist überhaupt der Fehler aller sogenannten Beweise, dafs sie an irgend einer Stelle ein Axiom enthalten, das an sich ebensowenig anschaulich ist wie das von Euklid aufgestellte.

[2]) Unter „Richtungsbeweis“ verstehe ich den Gang, dafs zwei Richtungen gleich sind, wenn sie gegen eine dritte gleichen Richtungsunterschied haben oder umgekehrt.

[3]) Dieser Beweis wird vielfach angefochten, weil man offene Figuren nicht zur Deckung bringen dürfe. Mir scheint dieser Einwand hinfällig, denn dann dürfte man ja auch Winkel nicht zur Deckung bringen und

Bézout, Cours de Mathématiques. — Paris 1812.

p. 16: „Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites parallèles, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre; car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvaient plus près qu'en un autre, elles seraient inclinées l'une à l'autre, et que par conséquent elles pourraient enfin se rencontrer.“

Es folgen dann die Sätze über die Winkel bei Parallelen. —

In den angefügten Noten bemerkt Reynaud p. 7: „Bézout donne une définition exacte des parallèles, mais il ne demontre pas rigoureusement les propriétés de ces lignes. De sorte que les démonstrations des nos 36 .. 42 et 74 (Beweis für die Winkelsumme im Dreieck) ne sont pas très-exactes. Nous allons suivre une marche inverse; nous démontrerons d'abord le principe du no. 74; nous en déduirons la théorie des parallèles.“

Es wird zuerst direkt bewiesen, dafs der gröfsern Seite des Dreiecks der gröfsere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt; dann indirekt, dafs die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt. (Der Beweis (?) ist zu lang, um ihn hier wiederzugeben.) Daran schliefsen sich dann die Sätze von den Parallelen.

---

damit wäre die ganze Kongruenzlehre hinfällig. Aber es zeigt sich hier wieder, wie an so manchen andern Stellen der Geometrie, dafs oft bei irgend einem Beweise Bedenken auftauchen über einen Punkt, der an andrer Stelle ohne jeglichen Skrupel hingenommen worden ist. Eines der eklatantesten Beispiele hierfür ist, dafs sehr viele Lehrbücher den Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, der sich auf die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze stützt, nicht anerkennen, weil man noch nicht gelernt habe einen Winkel zu halbieren. Dieselben Lehrbücher aber geben den Beweis für die Winkelsumme im Dreieck mittels einer Parallelen ohne jegliches Bedenken, obwohl das Ziehen einer Parallelen auch nicht gelehrt worden ist.

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien.[1]) — Mainz 1815.

Verfasser glaubt natürlich das Problem gelöst zu haben, das aus den folgenden zwei Aufgaben bestehe:

„1) zu beweisen, dafs die Winkelsinusse, bei entfernteren Punkten vom Winkels-Scheitel, immer gröfser werden und jede gegebene Linie übertreffen können; 2) dafs die Parallelsinusse überall gleich und der senkrechten Normale gleich werden.“

Der Beweis gründet sich auf den Begriff: „Wenn zu einer Gröfse nach und nach angebliche gleichartige Teile gesetzt oder: Wenn von einer Gröfse nach und nach angebliche Teile weggenommen werden und dieses Verfahren so weit getrieben werden kann als man will, so mufs im ersten Falle eine Gröfse entstehen, die gröfser ist, im andern Falle: die kleiner ist, als jede angebliche Gröfse.“

Auf den Inhalt näher einzugehen verbietet die Weitläufigkeit, mit der die Abhandlung angelegt ist.

Rezensionen finden sich in den Heidelberger Jahrbüchern der Litteratur (April 1815) und in den Göttinger Anzeigen (April 1816).

Crelle, Ueber Parallelentheorieen und das System in der Geometrie. — Berlin 1816.

Der schwache Punkt in der Euklidischen Geometrie ist das Parallelentheorem.

„Die Parallelentheorie beruht auf zwei Sätzen:

1) Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dafs die beiden innren an einer Seite liegenden Winkel zusammen zwei rechte ausmachen, treffen sich, so weit man sie verlängert, nirgends.“

Für diesen Satz giebt es einen strengen Beweis.

---

[1]) In der Vorrede werden erwähnt:

J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallel-Theorie. Erster Teil, welcher die Darstellung und Prüfung von siebzehn verschiednen Systemen enthält; Jena 1807. — Eine Abhandlung von Karsten über diesen Gegenstand.

2) „Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dafs die beiden innern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner sind, als zwei rechte, treffen genugsam verlängert an derselben Seite zusammen."

Dieser Satz bei Euklid Grundsatz. Hier die Schwäche der alten Geometrie.

„Alle diejenigen nämlich, die eine Parallelentheorie nach Euklidischen Begriffen von der Raumgröfse zu geben versucht haben, alle die das elfte Axiom nach Euklidischen Grundsätzen zu beweisen versucht haben, haben wie es scheint etwas eben so Unmögliches versucht .... als diejenigen, die den Kreisumfang oder die Quadratwurzel aus 2 und dergleichen in rationalen Zahlen auszudrücken sich bemühten. Dies läfst sich, dünkt mich, sogar beweisen."

Die Euklidische Geometrie habe es nur mit begrenzten Räumen zu thun; da man aber den Durchschnittspunkt nicht kenne, so handle es sich bei unsrer Frage um unbegrenzten Raum.

„Der Gegensatz des elften Axioms lautet:

Zwei Gerade, die sich nicht begegnen, machen mit einer dritten zwei innere Winkel, die zusammen zwei rechte sind."

Wäre dies bewiesen, dann auch das Axiom. Aber „Wie soll nun mit begrenzten Räumen Etwas für unbegrenzte Räume bewiesen werden?"

„Das elfte Axiom ist, wie es scheint, einer der Übergänge von dem Endlichen der geometrischen Vorstellung in das Unendliche, aus welchem die Vorstellung die endlichen Räume absondert."

Euklid wollte im Endlichen bleiben; daher das Axiom. Daher die alte Geometrie, so lange man bei ihren Ansichten stehen bleibt, etwas Vollendetes.

Die Vernunft sträubt sich gegen das Axiom. Mit ihm würde aber alles fallen, was sich darauf stützt. Das Bestreben zur Überzeugung zu gelangen darf nicht aufhören.

Mit begrenzten Räumen ist nichts auszurichten, daher andrer Weg. Es handelt sich darum einen vernunftgemäfsen Übergang aus dem Unendlichen in das Endliche zu finden.

„Statt eines plötzlichen, gleichsam einen allmählichen Übergang von dem Unbegrenzten zu begrenzten Gröfsen zu versuchen, ist das Mittel, zur Überzeugung zu kommen.“

Es wird der Begriff zum Teil unbegrenzter Figuren, der Winkelräume und der Räume zwischen Parallelen eingeführt. Etwas Ähnliches findet sich bei Bertrand u. a. Winkel und Parallelenstreifen sind Gröfsen, denn sie lassen sich halbieren etc., kurz mit ihresgleichen vergleichen. Der Unterschied zwischen endlich und unendlich mufs dabei immer scharf im Auge behalten werden. Es handelt sich aber hier trotzdem um dasselbe, da wir endliches mit endlichem, unendliches mit unendlichem vergleichen, was bei beiden mit völliger Klarheit möglich ist. Zurückweisung der Ansicht, als wenn Winkelräume und Parallelstreifen keine Gröfsen wären.

Die Verwertung giebt der Verfasser nun in dem systematischen Gang der Geometrie.

p. 42: „Erklärung. Gerade Linien, die einander in ihrer ganzen Ausdehnung nicht begegnen, heifsen Parallellinien.“

p. 44: „Erklärung. Der zum Teil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Parallelen liegt, soll Parallel-Raum heifsen.“

„Lehrsatz. Wenn man zwei oder mehrere und so viel man will Parallelräume aneinanderfügt, so entsteht wieder ein Parallel-Raum.“

p. 45: „Lehrsatz. Durch Aneinanderfügen von Parallelräumen kann der ganze unbegrenzte Raum nicht ausgefüllt werden.“

Nachdem hierauf die Erklärung des Winkels gefolgt ist (s. Kapitel III) und über die Kongruenz gleicher Winkel gesprochen ist, kommt der dem zuletzt zitierten Lehrsatz entsprechende.

p. 47: „Jeder Winkel ist ein gewisser Teil des unbegrenzten Ebenenraums und durch Aneinanderfügen von Winkeln gleicher Gröfse kann der ganze Ebenenraum entweder genau oder soweit ausgefüllt werden, dafs weniger übrig bleibt als der einfache Winkel.“

p. 48: „Jeder Parallelraum ist kleiner als ein Winkel.“[1])

Beweis leicht auf Grund der vorher zitierten Lehrsätze.

p. 49: „Jeder ganz begrenzte Raum ist kleiner als ein Winkel.“

Darauf folgen Winkelsätze (Scheitelwinkel, Nebenwinkel) und Begriffsfestsetzungen (Winkelpaare bei geschnittnen Geraden).

p. 54: „Lehrsatz I a: Umkehrung des 11. Axioms. — Voraussetzung die Geraden scheiden sich.

Beweis. Denn der innere Neigungswinkel ist um den begrenzten Raum (des Dreiecks) gröfser, um den (Aufsen)winkel aber kleiner als der äufsere Neigungswinkel. Nun ist jeder begrenzte Raum kleiner als ein Winkel, folglich der innere Neigungswinkel kleiner als der äufsere.“

II b: „Wenn Neigungs- und Wechselwinkel gleich sind oder . . . . ., so sind die Schenkel parallel.“

Beweis indirekt mit Satz I.

II a: Das 11. Axiom. — Beweis geht darauf zurück, dafs ein Winkelraum nicht innerhalb eines Parallelraums liegen kann, weshalb die betreffenden Geraden sich schneiden müssen.[2])

Hieran schliefsen sich die Sätze über die Winkel bei geschnittnen Parallelen.

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817.

p. 291: „Zwei gerade Linien in derselben Ebene sind ihrer Lage nach parallel, wenn sie in immer gleicher Entfernung von einander bleiben[3]) oder nie zusammentreffen, soweit sie auch nach der einen oder andern Seite hin verlängert werden.“

---

[1]) Dieser Gedanke ist es, der sehr vielen sogenannten Beweisen des Parallelenaxioms zu Grunde liegt. Ob er von Crelle herrührt, wage ich nicht zu entscheiden, jedenfalls ist er aber hier ausführlich begründet resp. abgeleitet.

[2]) Der Verfasser glaubt damit einen völlig strengen Beweis des Parallelenproblems geliefert zu haben.

[3]) Dies dürfte das älteste Lehrbuch sein, in dem sich eine von der Euklidischen abweichende Definition der Parallelen findet und zwar also diejenige, die von dem gleichen Abstand aller Punkte ausgeht.

Blasche, Grundrifs der Elementar-Geometrie. — Reval 1819.

p. 19: „Erklärung. Zwei gerade Linien AB, CD sind gleichliegend oder haben einerlei Lage gegen eine dritte sie schneidende Linie EF, wenn sie mit dieser gleiche, übereinstimmig liegende Winkel EGB, EHD machen."

p. 21: „Gleichliegende Linien können, soweit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch nirgends zusammentreffen, und sind daher, wie man kurz zu sagen pflegt, parallel."

p. 22: „Wenn zwei gerade Linien AB, CD gegen irgend eine dritte einerlei Lage haben, so sind alle Punkte der einen Linie in gleicher Entfernung von der andern."

Brewer, Lehrbuch d. Geometrie. — Düsseldorf 1822.

p. 4: „Gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und sich unendlich verlängert nicht schneiden, heifsen parallele oder gleichlaufende Linien."

p. 15: „Wenn zwei Linien, welche in einer Ebene liegen, von einer dritten so geschnitten werden, dafs pp. Winkel gleich sind, so sind die Linien parallel."

Beweis durch Kongruenz der Halbstreifen. Wenn also auf der einen Seite ein Schnittpunkt dann auch auf der andren, was unmöglich ist.

Montanus, Handbuch der Geometrie. — Berlin 1822.

p. 22: „Zwei gerade Linien in einer Ebene heifsen parallel zu einander, wenn sie in allen Punkten gleichweit von einander entfernt bleiben, soweit man sich dieselben verlängert denken mag d. h. wenn alle Senkrechten gleich sind. Dafs eine solche Lage einer Geraden gegen eine andre möglich sei, wird hier als Grundsatz angenommen, den gewifs jeder vernünftige Mensch vermöge seiner innern Anschauungskraft als gültig anerkennt, die aber dennoch dem spekulierenden, ich möchte sagen dem gelehrten Verstande noch Bedenklichkeiten übrig läfst."

Verfasser weist dann auf den Artikel Parallelen in Klügel's Wörterbuch hin.

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

p. 230: „Zwei gerade Linien werden parallel untereinander genannt, wenn sie nach keiner Seite hin, verlängere man sie soweit man will, zusammenstofsen können."

Die Entwicklung der Sätze bei geschnittnen Parallelen folgt aus der Winkelsumme des Dreiecks, die Thibaut bekanntlich mit Hülfe der Drehung als zwei Rechten gleich nachweist.

p. 184: „... tritt das allgemeine Prinzip einer völligen gegenseitigen Unabhängigkeit der progressiven und drehenden Bewegung ein. Insofern ein Punkt in gerader Linie fortschreitet, behält er durchaus die nämliche Richtung. Wenn also durch Drehung an einem Scheitelpunkte ein Winkel beschrieben worden und auf dem letzten Schenkel desselben beliebig fortgeschritten wird, ehe man aus seiner Richtung zu einer neuen drehend fortgeht, so ist die dadurch im ganzen bewirkte Änderung der Richtung völlig dieselbe, als wenn beide Drehungen, ohne durch eine progressive Bewegung unterbrochen zu werden, an dem nämlichen Scheitelpunkte vorgenommen wären."[1])

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 12: „Zwei gerade Linien werden entweder .... oder in einer und derselben Ebene so gezogen sein, dafs sie nirgends zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern mag: solche Linien heifsen in Beziehung zu einander parallel oder Parallellinien."

p. 29 wird die Parallelenlehre eingeleitet durch den Satz: „Gegen eine Gerade läfst sich aus einem bestimmten Punkte nur eine einzige parallele Gerade ziehen." Dann folgen die Winkelsätze und ihre Umkehrungen mit indirekten Beweisen.

Köberlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Sulzbach 1824.

p. 40: „Linien, welche in einer Ebene überall gleichweit

[1]) Man vergl. Günther's oben zitierte Programmabhandlung über den Thibaut'schen Beweis.

von einander abstehen, werden parallel oder gleichlaufend genannt.

Parallellinien können sich nirgends einander nähern oder von einander entfernen, und niemals zusammenlaufen."

„Konzentrische Kreise sind parallel."

„Die gerade Linie, welche die Endpunkte aller gleich grofsen Senkrechten, die auf einer geraden Linie nebeneinander errichtet werden können, mit einander verbindet, ist von der letzteren überall gleichweit entfernt und daher zu dieser parallel."

Crelle, Lehrbuch der Elemente d. Geometrie. — Berlin 1826.

p. 13: „Gerade Linien, welche mit einer beliebigen dritten an einerlei Seite gleiche Winkel machen, heifsen Parallelen."

Auf das Weitere will ich hier nicht eingehen, da es schon in der diesem Gegenstand gewidmeten besondren Schrift des Verfassers genügend geschehen ist. Der Beweis des 11. Axioms ist hier im wesentlichen derselbe, wie dort: ähnlich in seiner Anlage denen von Bertrand und Schulz.

---

v. Forstner, Grundrifs d. Elem. d. r. Math. — Berlin 1826.

p. 449: „Zwei gerade Linien in einer und derselben Ebene, welche unendlich verlängert in keinem Punkte zusammentreffen, heifsen parallele Linien oder blofs Parallelen."

Daran schliefst sich die Konstruktion von Parallelen durch Konstruktion zweier Senkrechten auf einer Geraden. Diese keinen Punkt gemeinsam, sonst Dreieck mit zwei rechten Winkeln. Dies nicht möglich. Beweis dafür stützt sich auf den Satz, „dafs der Aufsenwinkel gröfser ist als ein innerer von ihm getrennt liegender."

Förstemann, Lehrbuch der Geometrie. — Danzig 1827.

p. 13 nach Aufstellung und Besprechung der Winkelrelationen heifst § 45: „Findet eine der 16 Gleichungen des vorigen §, und finden also alle 16 statt, so sind die beiden

Geraden, welche von der dritten geschnitten werden, parallel, d. h. sie treffen sich nirgends, selbst unbegrenzt gedacht.

Indirekter Beweis, gestützt auf 1) die aus der Deckung der gleichartigen Wechselwinkel folgende Kongruenz der beiden Hälften des Konstrukts, welche durch die schneidende Gerade gebildet werden, und 2) den Satz, dafs zwei Gerade nicht mehr als einen Punkt gemeinsam haben können.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

p. 4: „Zwei gerade Linien, die in einer Ebene sich befinden und so liegen, dafs sie nicht übereinander weggehen, selbst wenn sie unendlich gedacht würden, heifsen Parallellinien."

„Grundsatz. Schneiden sich zwei gerade Linien, so giebt es keine dritte, die parallel ist mit einer jeden von ihnen."

Winkelsätze mit indirektem Beweis.

Bürger, Theorie der Parallellinien. — Heidelberg 1833.[1])

Der Verfasser glaubt den Beweis für das elfte Axiom Euklids gefunden zu haben und feiert den Sieg seines Nachdenkens über ein durch zwei Jahrtausende nicht gelöstes Problem in überschwenglicher Weise.

Die eigentliche Abhandlung leitet er mit dem Satze selbst (11. Axiom) ein. Der Beweis hat folgenden Gang. Es wird ein Dreieck (rechtwinkl.) angenommen; die Hypotenuse wird parallel mit sich verschoben, vor der Bewegung aber werden alle Strecken verlängert gedacht; daraus folgert der Verfasser, dafs immer ein Schnittpunkt vorhanden ist, weil der Endpunkt der Hypotenuse einmal unterhalb der einen Kathete liege und dann oberhalb, also notwendig während des Verschiebens einmal auf der Kathete liegen müsse. Man sieht, dafs der Kern der Frage gar nicht getroffen ist; aufserdem leidet aber der Beweis an dem Fehler, an dem alle angeblichen Beweise leiden, dafs nämlich Axiome zu Hülfe genommen werden, die

---

[1]) Der Verfasser erwähnt in einer Anmerkung eine zweite Auflage vom Jahre 1820 und setzt als Jahr seiner Erfindung 1815 fest., wo also wahrscheinlich auch die erste Auflage erschienen ist.

viel weniger oder wenigstens um nichts einleuchtender sind als unser Axiom selbst.

Der Abhandlung folgt sodann eine Zusammenstellung von Urteilen, die der erste Versuch erfahren z. B. in den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur. 1818. p. 849.

Die aus dem Hinaufbewegen des Winkels folgenden Fehlschlüsse werden aufgedeckt, wogegen Bürger remonstriert.

Auch andere Rezensenten erkennen zwar die Bemühungen des Verfassers an, vermissen aber in den sogen. Beweisen das eigentlich Beweiskräftige.

Interessant ist übrigens, dafs ein Rezensent 1826 diese Schrift nicht besprechen will, „da dieser Gegenstand in unserer Zeit bereits bis zum Ekel besprochen und bestritten worden ist."

E. G. Fischer, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Berlin 1833.

p. 12: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche ohne sich zu decken, gleiche Richtung haben, heifsen parallele oder gleichlaufende Linien."

Die Parallelensätze werden dann auf grund gleichen Richtungsunterschiedes bewiesen. Von den übrigen Definitionen findet sich noch die Euklidische.

---

van Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. — Jena 1834.

p. 9: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie gegen eine dritte Linie, die sie schneidet, dieselbe Neigung haben d. h. mit dieser an der einen Seite einen äufseren Winkel bilden, der so grofs ist als der innere Gegenwinkel an eben dieser Seite ist."

In einer Anmerkung weist der Herausgeber hin auf d'Alembert, Melanges etc. V. p. 202, Taquet[1]) und Clavius.[2])

---

[1]) A. Taquet, Elem. (Euclideae) Geometriae planae ac solidae, quibus accedunt Selecta ex Archimede theoremata etc. ed. nova Amstelod. 1783. — Weitere Ausgabe, Rom 1745.

[2]) Euclidis Elem. Libri XV auctore C. Clavio, Francofurti 1607.

Euklids Definition, sowie die, welche sich auf den gleichen Abstand stützt, werden angeführt.

Euklids XI. Axiom wird zum teil indirekt bewiesen, zum teil mit Hülfe einer weiteren Parallelen.

Jacobi nennt König[1]) und Taquet und führt an, dafs Montucla (Histoire des Mathem. I. p. 209) mit Recht vermutet, dafs der betr. Satz ursprünglich ein Zusatz zu Satz 28 des ersten Buches gewesen sei und durch Nachlässigkeit eines Abschreibers aus seiner früheren Stelle gerückt sei. Fernere Literatur:

Nasser-eddin-Al-Tussi arabische Übersetzung des Euklid. Wallis, Opera Mathematica[2]) II, 667 u. 672.

Castillon in Mémoires de l'Academie de Berlin von den Jahren 1786 u. 1788.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 427 wird der Satz von der Winkelsumme im Dreieck folgendermafsen bewiesen: „Es werde der Winkel NCQ so, dafs sein Schenkel CQ in der Linie PQ bleibt, an PQ von C bis B verschoben, wodurch der Schenkel CN in die Lage BN' kommt. Es ist offenbar, dafs BN' zwischen den Linien BQ und BM liege, denn da W. $ACQ >$ W. ABC ist, so ist $2R - ACQ < 2R - ABC$, oder $NCQ < MBQ$, mithin, weil $N'BQ = NCQ$ ist, $N'BQ < MBQ$. Da

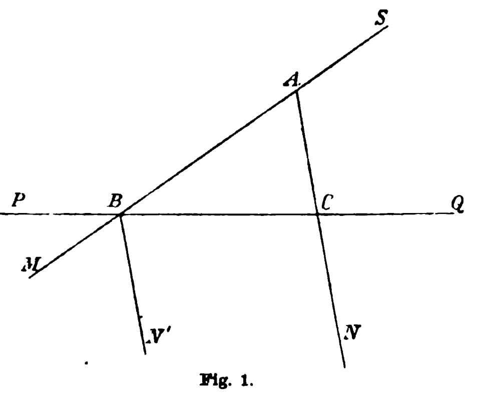


Fig. 1.

nun die Linien BN' und ACN an derselben Seite von PQ mit dieser die gleichen Winkel an B und C einschliefsen,

---

[1]) Koenig Elemens de Geometrie contenant les six premiers livres d'Euclide etc. à la Haye 1762.

[2]) Oxford, 1693.

also in gleichem Lagenverhältnis gegen PQ stehen, so sind auch — wie früher bewiesen — die Winkel dieser Linien gegen irgend eine andere Richtung MS, nämlich $N'BS$ und NAS, folglich auch deren Nebenwinkel MBN' und MAN einander gleich.

Demnach ist

$$PBM = ABC,$$
$$MBN' = BAC,$$
$$N'BC = NCQ = ACB;$$

addiert man diese Gleichungen zusammen, so folgt

$$PBM + MBN' + N'BC = ABC + BAC + ACB.$$

Die Winkelsumme im ersten Teile dieser Gleichung beträgt aber $2R$, folglich ist auch

$$ABC + BAC + ACB = 2R.“$$

p. 441 folgt die Lehre von den Parallellinien. Die Erklärung lautet: „Zwei gerade Linien in derselben Ebene, die obschon sie beliebig verlängert gedacht werden mögen, sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien.“

Die nötigen Beweise stützen sich im wesentlichen auf den Dreieckssatz resp. werden ähnliche Betrachtungen wie dort angestellt.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

p. 10: „Gegenseitige Lage zweier Geraden. Betrachtet man die Gerade ihrer Lage und Richtung nach gegeben, so kann man die Lage und Richtung der andern mit denen der ersten vergleichen. Bei dieser Vergleichung sind nur zwei Fälle möglich: die Geraden haben entweder verschiedene oder sie haben dieselbe Richtung.

Von solchen Linien sagt man im gewöhnlichen Sprachgebrauche, sie neigen sich zu einander oder sie sind gleichlaufend, parallel.

Der Begriff der Neigung beruht auf dem der Annäherung, des endlichen Zusammentreffens, so dafs Verschiedenheit der Richtung, Neigung, Zusammentreffen nur verschiedene Ausdrücke ein und derselben Bedingung sind, und Gleichheit der

Richtung, Parallelität, Nichtzusammentreffen verschiedene Ausdrücke des Gegensatzes."

Hieran schliefst sich unter dem Titel „Von der geneigten Lage" die Lehre vom Winkel.. — Dann heifst es p. 15: „Von der parallelen Lage. Haben *CD* und *FG* gleiche Richtungen unter sich, so bilden sie auch gleiche Richtungen mit *AB* und es ist $BED = EHG$." Damit ist sofort die Überleitung zu den bekannten Sätzen von den Winkeln bei geschnittenen Parallelen gegeben.

Dann heifst es p. 16: „Man erkennt also die Gleichheit der Richtungen an diesen drei Eigenschaften der Winkel, man erkennt sie aber auch an dem Nichtzusammentreffen der beiden Geraden, da hierin eben der Charakter der Gleichheit der Richtungen liegt und die angegebenen Eigenschaften der Winkel darauf beruhen, daher eine nicht minder wichtige Wahrheit wie die vorhergehende, die folgende ist:

„13) Sind zwei Linien *AB* und *CD* zu einander parallel, und zieht man die Linien *KL*, *MN*, *OP*, *QR* u. s. w. nach einer beliebigen aber unter einander gleichen Richtung, so müssen die Entfernungen der Punkte *L*, *N*, *P*, ... von *K*, *M*, *O*, ... oder die Geraden *KL*, *MN*, *OP*, ... sämtlich einander gleich sein oder die beiden Parallelen müssen in dieser Richtung immer die gleiche Entfernung behalten."

Hierzu wird ein indirekter Beweis gegeben.

Euklid, Elemente ed. Dippe. — Halle 1840.

p. 2: „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und auf keiner der beiden Seiten zusammentreffen, soweit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag."

p. 3: „Grundsatz 11: Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, dafs die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen diese beiden Linien, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen."

Hierzu bemerkt der Herausgeber, dafs Peyrard, der Mehrzahl der Handschriften folgend, in seinen „Oeuvres d'Euclide. Paris 1814" diesen Grundsatz als Forderung aufführe.

Wunder, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Leipzig 1840.

p. 14: „Haben zwei Strahlen einerlei Richtung, aber es ist keiner nach dem Anfangspunkt des andern hin gerichtet, so können sie nie zusammentreffen und heifsen dann parallel.“ Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

§ 15: „Parallellinien sind Linien, welche in ein und derselben Ebene liegen und nie zusammentreffen.“

Nach der Dreieckslehre findet sich § 68 Lehrsatz: „Sind zwei Linien senkrecht auf einer dritten, so sind sie parallel,“ § 69 die Erklärung der Namen Wechselwinkel etc.

§ 70: Lehrsatz: „Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und beträgt die Summe der zwei inneren anliegenden Winkel $2R$, so sind diese Linien parallel.“

Analog werden die andern Sätze behandelt. Dann folgen von § 75 an die Umkehrungen.

§ 79: „Parallelen sind überall gleich weit von einander entfernt.“

Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842.

p. 69: „Die gerade Linie bezieht sich auf sich selbst als auf sich aufserhalb ihrer, sie ist, sie wird ihre Parallele. Als Parallele ist sie aufser sich gekommen und kommt sie aufser sich.“

p. 116 äufsert sich der Verfasser gegen Legendre, indem er den Nachweis zu bringen versucht, dafs der Satz von der Winkelsumme erst nach der Parallelentheorie folgen dürfe. Legendre's Beweis leide an dem Fehler, dafs er eine unendliche Reihe von Konstruktionen fordere. Die Unbeweisbarkeit des elften Axioms liege in der falschen Definition des Parallelismus.

Es mufs definiert werden: „Eine gerade Linie ist einer andern parallel, wenn sie in allen ihren Punkten von derselben gleichweit absteht.“

Dafs sich aus der Konstruktion der gleichweit entfernten

Punkte eine Gerade ergebe, liege in der Definition der Geraden. Danach ergebe sich folgender Gang der Parallelen theorie:

„a. Lehrsatz. Ist eine gerade Linie von einer andern in allen Punkten gleichweit entfernt, so hat auch diese von jener in allen Punkten gleiche und dieselbe Entfernung.

b. Lehrsatz. Eine gerade Linie, die in zwei Punkten von einer andern auf derselben Seite gleichweit absteht, ist derselben parallel.

c. Lehrsatz. Die bekannten Winkelrelationen, das elfte Axiom etc.

d. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, dann auch untereinander.

e. Die Winkelsumme im Dreieck."

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. Ed. Külp. — Bern 1843.

p. 25: „Zwei gerade Linien, welche, obgleich in einer Ebene liegend, einander nie begegnen, so weit man sie auch nach einer oder der andern Seite hin verlängern mag, heifsen Parallellinien."

Die Sätze werden bewiesen durch Vergleichung von Winkelräumen und Parallelstreifen.

In einer Anmerkung wird auf die Identität dieser Sätze mit dem elften Axiom hingewiesen; ein besonderes Axiom ist nötig. Es wird hier folgendermafsen geformt:

Wenn eine Linie A auf einer Linie B senkrecht steht und die Linie C trifft dieselbe unter einem spitzen Winkel, so müssen A und C gehörig verlängert sich schneiden.

Der Beweis ist oben angedeutet.

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

p. 36: „Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF so geschnitten, dafs unter den dadurch entstehenden acht Winkeln eine der zwölf Grundgleichungen[1]) stattfindet, so

[1]) Diese Gleichungen sind im vorhergehenden Paragraphen aufgestellt; es sind die bekannten.

nennt man die geschnittenen Linien parallel oder auch Parallellinien oder kurz Parallelen.“

„Parallellinien können sich niemals schneiden, soweit sie auch verlängert werden mögen.“

Beweis durch Kongruenz von Hülfsdreiecken. Es folgen dann die Sätze über das Schneiden von Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel kleiner als zwei Rechte ist.

Dazu bemerkt der Verfasser p. 41: „Es ist bereits oben bemerkt, dafs dieser Satz nicht streng bewiesen sei. Soll dies geschehen, so hat man folgenden Weg einzuschlagen.

Wenn man in der Lehre von den Parallelen soweit gediehen ist, so schalte man folgende Sätze ein:

1) Eine halbbegrenzte Gerade erleidet keine Veränderung ihrer Gröfse, wenn man eine vollbegrenzte zu ihr hinzufügt oder von ihr wegnimmt.

2) Ein Winkelblatt erleidet keine Veränderung seiner Gröfse, wenn man durch eine Gerade, die dem einen seiner Schenkel parallel ist, einen halbbegrenzten Streifen zu ihm hinzufügt oder von ihm wegnimmt.

3) Nie kann ein Winkelblatt, sei der zugehörige Winkel noch so klein, ein blofser Teil eines halbbegrenzten Streifens sein, der letztere sei so breit als man wolle.“

Hierauf stützt sich dann der Beweis in der bekannten Weise.

Schliefslich geht der Verfasser noch auf den Abstand der Parallelen ein.

Legendre, Elemente der Geometrie. ed. Crelle.[1]) Berlin 1844.

---

[1]) Aus der Vorrede zur zwölften Auflage des Originals:

„Da der Beweis der Theorie der Parallelen, so wie er sich in der dritten bis achten Auflage findet, nicht ganz frei von Einwendungen war, so hatte man sich entschlossen, diese Theorie in der neunten Auflage wiederum beinahe ganz nach Euklid vorzutragen. Fernere Untersuchungen über diesen Gegenstand hatten zu zwei neuen Beweisen des Lehrsatzes von der Summe der Winkel eines Dreiecks geführt, die ohne Hülfe irgend eines Postulats gegeben werden.

Von diesen ist der, der sich am wenigsten von der gewohnten Ansicht entfernt, hier aufgenommen.“

p. 16: Wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks durch Konstruktion von Hülfsdreiecken bewiesen, indem gezeigt wird, dafs die Winkelsumme immer die gleiche bleibt, während ein Winkel des neuen Dreiecks kleiner als die Hälfte eines des alten Dreiecks wird. Die Schwäche des Beweises liegt darin, dafs diese Konstruktion unendlich oft angestellt werden mufs.

p. 20 folgt dann das elfte Axiom als Lehrsatz mit einem ähnlichen Beweise, woran sich die Winkelsätze anschliefsen.

In einer Anmerkung p. 23 geht Crelle auf das Parallelenproblem näher ein und legt Legendre's Beweis, dafs die Winkel-

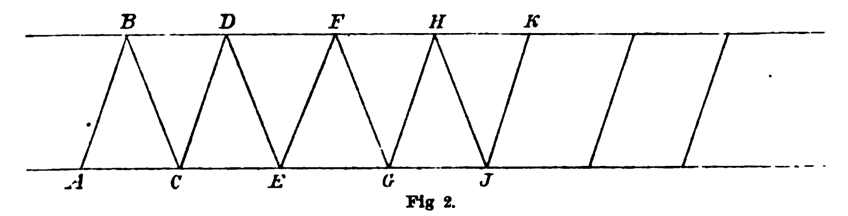


Fig 2.

summe nicht gröfser und nicht kleiner als $2R$ sein kann „des Interesses wegen" dar. Der Vollständigkeit wegen soll dieser Beweis hier mitgeteilt werden.

ABC sei das geg. Dreieck und ACJ eine gerade Linie. Man mache $CE = AC$, $DCE = BAC$ und $DC = AB$: so ist das Dreieck DCE dem Dreiecke ABC gleich. Wäre nun $BAC + ABC + BCA > 2\varrho$ (ϱ bedeute einen rechten Winkel), so wäre $BAC + ABC + BCA > BCA + DCE + BCD$, weil die letzten drei Winkel zusammen gleich zwei rechten sind. Nimmt man also auf beiden Seiten den Winkel BCA und dann den Winkel $BAC = DCE$ weg, so bleibt $ABC > BCD$. Da aber die Winkel ABC und BCD von gleichen Seiten $BC = BC$ und $AB = CD$ eingeschlossen sind, so folgt daraus, dafs $BD < AC$ sein müfste.[1]) Man mache auf dieselbe Weise das Dreieck EFG dem Dreiecke CDE oder ABC gleich: so wird eben so gezeigt, dafs $DF < CE$ oder $< AC$ sein müfste; und zwar ist zugleich $DF = BD$, weil $\triangle BCD = \triangle DEF$. Eben das läfst sich von FH und HK zeigen; so weit man will. Der Unterschied von BD und

[1]) Legendre stützt sich hierbei auf Sätze, die unabhängig von Parallelen bewiesen sind.

AC mag nun so klein sein als man will, so kann doch ein beliebiges Vielfache desselben, welches der Unterschied der ganzen Linie $BDFHK$ von der Linie AJ sein würde, jede Gröfse erreichen, und folglich gröfser werden als die Summe der beiden Linien am Ende, AB und JK; folglich würde unter der Voraussetzung, dafs $A + B + C > 2\varrho$ sein kann, worauf alles dieses beruht, die gebrochene Linie $ABKJ$ kürzer sein können als die gerade AJ. Da dieses unmöglich ist, so ist die Voraussetzung unstatthaft. Folglich kann die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht gröfser sein, als zwei rechte.

Um zu zeigen, dafs auch die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als zwei rechte, lege

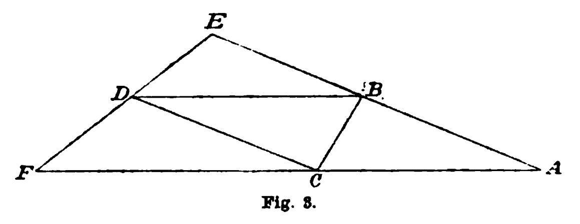


Fig. 8.

man, sagt Legendre, an die, dem kleinsten Winkel A eines Dreiecks ABC gegenüberliegende Seite BC ein Dreieck DBC, welches ABC gleich ist, auf die Weise, dafs man $DBC = BCA$ und $DCB = CBA$ macht; und ziehe durch D eine beliebige gerade Linie, die die verlängerten AB und AC in E und F schneidet.

Wäre nun die Summe der drei Winkel in dem Dreiecke ABC kleiner als zwei Rechte, und zwar $= 2\varrho - \delta$, so wäre auch die Summe der Winkel von $DBC = 2\varrho - \delta$, weil die Dreiecke einander gleich sind. Da nun die Summe der drei Winkel in jedem der beiden übrigen Dreiecke DEB und FDC, wie vorhin bewiesen, wenigstens nicht gröfser sein kann als zwei Rechte: so ist die Summe der 12 Winkel, in allen vier Dreiecken der Figur, höchstens

$$\left.\begin{array}{r} 4\varrho \\ +\,2\varrho - \delta \\ +\,2\varrho - \delta \end{array}\right\} = 8\varrho - 2\delta.$$

Nun ist die Summe der drei Winkel an jedem der drei Punkte B, C, $D = 2\varrho$. Zieht man diese neun Winkel, die also zu-

sammen 6ϱ ausmachen, von jenen zwölf Winkeln ab, so bleiben die drei Winkel A, E und F des Dreiecks AEF übrig, die also höchstens $= 2\varrho - 2\delta$ sind. Daraus folgt, dafs, wenn die drei Winkel in dem kleinen Dreieck ABC um δ weniger betragen als zwei Rechte, die drei Winkel in dem gröfseren AEF schon (mindestens) um das Doppelte, 2δ, von zwei Rechten verschieden sind. Wiederholte man also die Zusammensetzung, so ginge das so weiter. So klein aber auch δ sein mag: so kann ein beliebiges Vielfaches desselben doch jede beliebige Gröfse und also selbst 2ϱ übersteigen; woraus folgen würde, dafs die Summe der Winkel eines hinreichend grofsen Dreiecks $= 0$, oder selbst weniger als 0 sein könne. Da dieses unmöglich ist, so ist die Voraussetzung, dafs die Winkel im Dreieck kleiner sein können als zwei Rechte, unstatthaft.

Damit wäre also gezeigt, dafs die Summe der Winkel gleich zwei Rechten sein mufs.

Der erste Teil des Beweises ist einwurfsfrei; „der andere Teil aber hat eine schwache Stelle, nämlich da, wo verlangt wird, dafs durch D eine gerade Linie gezogen werden soll, die E und F zugleich schneidet. Diese Forderung stimmt im wesentlichen mit dem zu beweisenden Axiom überein.[1])

Crelle giebt dann noch eine Vereinfachung des auf S. 16 bewiesenen Satzes, erkennt aber Legendre's Versuch, das berühmte Problem zu lösen, als der vollständigen Lösung möglichst nahe an; er verweist ferner auf den Beweis in seinem Lehrbuch. Vergl. Zitat aus Crelle p. 274.

p. 26 folgt der Lehrsatz: „Zwei Parallelen sind überall gleichweit von einander entfernt.“

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie. — Halle 1844.

Es werden zuerst die Winkelerklärungen durchgenommen. Dann heifst es p. 21: „Haben zwei von einer dritten m halbbegrenzte Linien eine solche Lage, dafs eine derselben, wenn

---

[1]) Hiernach ist das elfte Axiom identisch mit dem folgenden: „Liegt zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen ein Punkt, so läfst sich immer durch ihn eine Gerade legen, die die beiden Strahlen zugleich schneidet.“

nennt man die geschnittenen Linien parallel oder auch Parallellinien oder kurz Parallelen."

„Parallellinien können sich niemals schneiden, soweit sie auch verlängert werden mögen."

Beweis durch Kongruenz von Hülfsdreiecken. Es folgen dann die Sätze über das Schneiden von Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel kleiner als zwei Rechte ist.

Dazu bemerkt der Verfasser p. 41: „Es ist bereits oben bemerkt, dafs dieser Satz nicht streng bewiesen sei. Soll dies geschehen, so hat man folgenden Weg einzuschlagen.

Wenn man in der Lehre von den Parallelen soweit gediehen ist, so schalte man folgende Sätze ein:

1) Eine halbbegrenzte Gerade erleidet keine Veränderung ihrer Gröfse, wenn man eine vollbegrenzte zu ihr hinzufügt oder von ihr wegnimmt.

2) Ein Winkelblatt erleidet keine Veränderung seiner Gröfse, wenn man durch eine Gerade, die dem einen seiner Schenkel parallel ist, einen halbbegrenzten Streifen zu ihm hinzufügt oder von ihm wegnimmt.

3) Nie kann ein Winkelblatt, sei der zugehörige Winkel noch so klein, ein blofser Teil eines halbbegrenzten Streifens sein, der letztere sei so breit als man wolle."

Hierauf stützt sich dann der Beweis in der bekannten Weise.

Schliefslich geht der Verfasser noch auf den Abstand der Parallelen ein.

Legendre, Elemente der Geometrie. ed. Crelle.[1]) Berlin 1844.

---

[1]) Aus der Vorrede zur zwölften Auflage des Originals:

„Da der Beweis der Theorie der Parallelen, so wie er sich in der dritten bis achten Auflage findet, nicht ganz frei von Einwendungen war, so hatte man sich entschlossen, diese Theorie in der neunten Auflage wiederum beinahe ganz nach Euklid vorzutragen. Fernere Untersuchungen über diesen Gegenstand hatten zu zwei neuen Beweisen des Lehrsatzes von der Summe der Winkel eines Dreiecks geführt, die ohne Hülfe irgend eines Postulats gegeben werden.

Von diesen ist der, der sich am wenigsten von der gewohnten icht entfernt, hier aufgenommen."

p. 16: Wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks durch Konstruktion von Hülfsdreiecken bewiesen, indem gezeigt wird, dafs die Winkelsumme immer die gleiche bleibt, während ein Winkel des neuen Dreiecks kleiner als die Hälfte eines des alten Dreiecks wird. Die Schwäche des Beweises liegt darin, dafs diese Konstruktion unendlich oft angestellt werden mufs.

p. 20 folgt dann das elfte Axiom als Lehrsatz mit einem ähnlichen Beweise, woran sich die Winkelsätze anschliefsen.

In einer Anmerkung p. 23 geht Crelle auf das Parallelenproblem näher ein und legt Legendre's Beweis, dafs die Winkel-

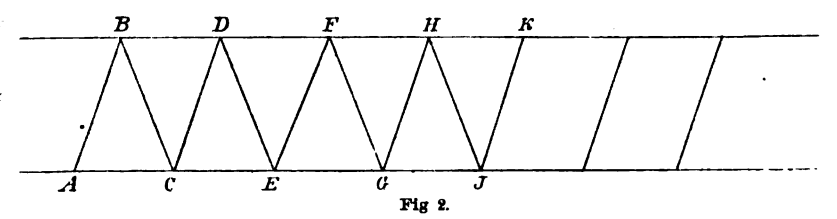


Fig 2.

summe nicht gröfser und nicht kleiner als $2R$ sein kann „des Interesses wegen" dar. Der Vollständigkeit wegen soll dieser Beweis hier mitgeteilt werden.

ABC sei das geg. Dreieck und ACJ eine gerade Linie. Man mache $CE = AC$, $DCE = BAC$ und $DC = AB$: so ist das Dreieck DCE dem Dreiecke ABC gleich. Wäre nun $BAC + ABC + BCA > 2\varrho$ (ϱ bedeute einen rechten Winkel), so wäre $BAC + ABC + BCA > BCA + DCE + BCD$, weil die letzten drei Winkel zusammen gleich zwei rechten sind. Nimmt man also auf beiden Seiten den Winkel BCA und dann den Winkel $BAC = DCE$ weg, so bleibt $ABC > BCD$. Da aber die Winkel ABC und BCD von gleichen Seiten $BC = BC$ und $AB = CD$ eingeschlossen sind, so folgt daraus, dafs $BD < AC$ sein müfste.[1]) Man mache auf dieselbe Weise das Dreieck EFG dem Dreiecke CDE oder ABC gleich: so wird eben so gezeigt, dafs $DF < CE$ oder $< AC$ sein müfste; und zwar ist zugleich $DF = BD$, weil $\triangle BCD = \triangle DEF$. Eben das läfst sich von FH und HK zeigen; so weit man will. Der Unterschied von BD und

[1]) Legendre stützt sich hierbei auf Sätze, die unabhängig von Parallelen bewiesen sind.

Ebensperger, Gemeinfafsliche Geometrie. — Nürnberg 1850.

p. 12: „Zwei oder mehrere Linien, in derselben Ebene liegend, welche in allen Punkten gleichweit von einander entfernt bleiben und, selbst wenn sie unendlich verlängert würden, nie zusammentreffen, heifsen Parallellinien. Diese können sowohl von Geraden, als von krummen Linien gebildet werden."

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Hamburg 1850.

p. 50: „Zwei gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heifsen parallel."

Dann folgen die Winkelsätze.

p. 53: „Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleichweit von einander entfernt."

Durch Kongruenz von Dreiecken bewiesen.

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

p. 14. § 25: „Die Möglichkeit sich nicht schneidender Geraden ist nur eine logische, denn wir wissen noch nicht, ob es wirklich Gerade giebt, welche sich nicht schneiden, ..."

p. 42. § 63: „Wir haben jetzt zu den sich nicht schneidenden Geraden überzugehen. Wir bekümmern uns nur um diejenigen, welche in derselben Ebene liegen. Sie heifsen Parallellinien oder Parallelen. Parallelen sind also solche Gerade in der Ebene, welche sich nirgends schneiden.

Durch diese Erklärung ist der Begriff der Parallelen nur negativ bestimmt, und die Realität derselben noch nicht erwiesen. Wir haben deshalb die doppelte Aufgabe: 1) aus der negativen Erklärung der Parallelen eine positive abzuleiten, 2) die Wirklichkeit der Parallelen nachzuweisen.

§ 64. „Parallelen treffen nie zusammen, also bilden sie keinen Winkel, mithin kann kein Unterschied ihrer Richtungen

gedacht werden, folglich haben sie dieselbe Richtung. Mithin sind Parallelen solche Gerade, welche dieselbe Richtung haben.

Parallelen sind inbezug auf die Richtung dieselbe Linie. —"

§ 65 löst dann die Aufgabe 2 des § 63.

§ 66 faſst den Parallelstreifen auf und weist nach: „Parallelen sind solche Gerade, welche eine Fläche einschlieſsen, welche inbezug auf die Halbebene gleich Null oder verschwindend klein ist."

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 37: „Eine Linie von der Beschaffenheit, daſs alle ihre Punkte in einerlei Ebene von einer Geraden gleichweit abstehen, heiſst eine Parallellinie oder eine Parallele zu derselben."

„Grundsatz. Die Parallele zu einer Geraden ist selbst eine Gerade."

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851.

Zu der p. 45—49 ganz in Euklidscher Weise dargestellten Parallelenlehre heiſst es in einem Anhange p. 66: „Die Erklärung der Parallelen enthält bloſs negative Merkmale; man erfährt durch dieselbe, „daſs es Linien in einer Ebene sind, die nicht zusammentreffen" und daher bietet diese Erklärung direkt kein Mittel dar, woraus sich erkennen lieſse „ob zwei geg. Linien parallel oder nicht"." Die Frage nach den Merkmalen erledige sich durch eine dritte Linie und die Sätze über die Winkel.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

p. 35: „Zwei gerade Linien heiſsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und zu beiden Seiten, so weit man will, verlängert nie zusammentreffen."

Diese Erklärung folgt nach der Lehre von der Kongruenz. Daran schlieſsen sich zwei (resp. drei) Lehrsätze, wie der folgende:

„Wenn bei zweien von einer dritten durchschnittenen Linien die inneren Winkel auf einer der schneidenden Linie zusammengenommen zwei rechte betragen; so ist dies auch

auf der andern Seite der Fall und die Gegenwinkel und Wechselwinkel sind überall gleich."

Dann heifst es: „Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten werden, dafs beide innere Winkel . . . . . . gleich sind, so sind die Linien parallel."

Als Umkehrung dieses Satzes folgt „Grundsätzlicher Lehrsatz: Zwei Linien, die mit einer durchschneidenden auf einer Seite innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei rechte sind, treffen sich gehörig verlängert auf dieser Seite."

Es wird hervorgehoben, dafs dieser Lehrsatz aus den dagewesenen Grundsätzen und Lehrsätzen sich nicht streng beweisen lasse. Euklides habe ihn daher als Grundsatz aufgestellt. Viele Beweise. Es folgt dann als angeblich einfachster ein indirekter Beweis, der sich auf den Hülfssatz stützt, dafs jedes beliebige Winkelblatt gröfser ist als jeder beliebige Parallelstreifen."

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852. (Progr.)

p. 19: „Parallele Linien sind solche, welche dieselbe Richtung haben. Solche Linien werden ihrer Natur nach, soweit man sie auch verlängern mag, nie zusammentreffen." Winkelsätze mit Richtungsbeweis. — Umkehrungen.

Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. Frankfurt a. M. 1853.

p. 40: „Lassen wir zwei Punkte sich mit gleicher Richtung bewegen, doch nicht so, dafs der eine in der Richtung des andern liegt, sondern nach irgend einer andern Seite hin, so erhalten wir zwei gleichgerichtete oder parallele Linien.

Zwei mit gleicher Richtung bewegte Punkte können nie zusammentreffen. Sonst müfsten sie ja auch umgekehrt aus einem Orte herkommen können, was für zwei gleiche Richtungen eine Unmöglichkeit ist."

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

p. 8: „Werden gerade Linien, welche in einer und derselben Ebene liegen, bezüglich ihrer Richtung mit einander verglichen, so sind zwei Fälle möglich; sie haben entweder dieselbe Richtung oder verschiedene Richtung.“ (Namen.)

p. 9: „Aus der Einerleiheit der Richtungen paralleler Linien ergiebt sich folgende Grundeigenschaft derselben: Parallele Linien treffen, beliebig weit verlängert, nie zusammen.“

Der Beweis der Winkelsätze stützt sich natürlich auf die „gleiche Abweichung der Richtungen.“

Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857.

p. 18: „Zwei gerade Linien können so liegen, dafs sie, selbst ins Unendliche nach beiden Seiten verlängert, sich nicht schneiden. In diesem Falle heifsen die Linien gleichlaufend oder parallel.“

Die Winkelsätze werden mit Richtungsbeweis gegeben.

Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1858.

p. 14: „Linien heifsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und verlängert sich nie treffen.“

Beweis mittelst Parallelverschiebung.

F. W. Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. Oppenheim a. R. 1859.

p. 4: „Liegen zwei Gerade so, dafs sie sich nicht schneiden, wenn man sie auch noch so weit verlängert, so heifsen sie gleichlaufend oder parallel.“

Heidenreich, Die Elemente der niederen Geometrie. — Leipzig 1859.

§ 5 handelt von den Winkeln, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden und weist die Beziehungen unter diesen nach.

§ 6: „Zwei gerade Linien, welche, soweit man sie auch verlängern mag, sich nicht treffen, oder, was dasselbe sagt, zwei gerade Linien, die gleiche Richtung haben, heifsen Parallellinien."

„Man kann die eine oder andere Erklärung von Parallellinien wählen; im wesentlichen stimmen beide mit einander überein. Denn gleich gerichtete Linien können sich nie treffen, da sie in diesem Falle einen Winkel bilden, also verschiedene Richtung haben müfsten."

Franke, Die Elemente der eb. Geometrie. — Hannover 1860.

p. 11: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie sich nicht schneiden, wie weit sie auch verlängert werden. Da zwei parallele Gerade sich nicht schneiden, so erleidet die eine gegen die andere keine Ablenkung, es haben daher beide Gerade gleiche Richtung."

Der Beweis stützt sich auf dieselbe Ablenkung.

Giffhorn, Leitfaden der eb. Geometrie etc. — Braunschweig 1862.

p. 11: „Zwei Linien können nicht nur ihrer Gröfse, sondern auch ihrer Richtung nach mit einander verglichen werden und sind dann entweder gleichgerichtet, gleichlaufend (parallel) oder ..... Um über die Parallelität zweier Linien urteilen zu können, müssen ihre Richtungen mit der Richtung einer dritten sie durchschneidenden Linie verglichen werden."

Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863.

p. 22: „Zwei Linien, welche ohne zusammenzufallen eine und dieselbe Richtung haben, nennt man gleichlaufend oder parallel."

„Lehrsatz. Parallele Linien schneiden einander niemals und nirgends, soweit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag" und Umkehrung.

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Dronke, Die Elemente der eb. Geometrie. — M. Gladbach 1864.

p. 4: „Zwei gerade Linien, die ins Unendliche verlängert sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien und man sagt, die eine sei parallel der andern.“

„Der von zwei Parallelen eingeschlossene Raum wird Parallelraum genannt.“

„Jeder Winkel nimmt einen gröfseren Flächenraum ein, als jeder Parallelraum.“

„Schneidet eine Gerade eine von zwei Parallellinien, so schneidet sie bei gehöriger Verlängerung auch die andere.“ Auf diese Sätze stützt sich dann der Beweis des elften Axioms; den wichtigsten habe ich durch den Druck hervorgehoben.

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

p. 3: „Parallellinien sind Linien, die in einer Ebene liegen, und, wenn auch noch so weit nach beiden Seiten verlängert, sich niemals schneiden.“

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864.

p. 19: „Wenn zwei Gerade gleiche Richtung haben, so sagt man, sie sind Parallellinien.“

„Grundsatz. Zwei parallele Gerade können sich nie schneiden, wenn man sie auch noch so weit verlängert. Und umgekehrt. Wenn sich zwei Gerade in derselben Ebene nirgends schneiden, auch nicht, wenn sie noch so weit verlängert werden, so sind sie parallel.“

Die Winkelsätze werden mit Hülfe des gleichen Richtungsunterschiedes bewiesen.

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865.

p. 11: „Zwei Gerade haben dieselbe Richtung, so heifsen sie parallel.“

„Zwei Linien sind parallel, wenn sie noch so weit verlängert sich nie treffen.“

„Zu einer gegebenen Geraden kann durch einen aufser derselben liegenden Punkt nur eine Parallele gelegt werden."

Sonnenburg, Ebene Geometrie. Bremen 1868.

p. 10: „Zwei unendliche, gerade Linien in der unbegrenzten Ebene, welche nicht konvergieren, also sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien."

„Schneiden sich zwei gerade Linien, so giebt es keine dritte, welche mit einer jeden von beiden parallel ist." Beweis indirekt.

Die Winkelsätze werden durch Deckung der Halbstreifen bewiesen.

Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868.

p. 13: „Zwei in einer Ebene liegende gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne ineinander zu fallen, heifsen parallel."

„Man erkennt leicht, dafs zwei solche Gerade immer in derselben Entfernung von einander bleiben und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern mag."

„Zu einer Geraden läfst sich daher durch einen aufserhalb derselben liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine Parallele ziehen."

Das elfte Axiom wird ebenfalls als Grundsatz ausgesprochen.

Adam, Lehrbuch der eb. u. körperl. Geometrie. Berlin 1869.

p. 12: „In jeder Fläche des Würfels bleiben je zwei gegenüberstehende Kanten, soweit man sie auch verlängert denkt, in stets gleicher Entfernung von einander. Ebendasselbe nimmt man wahr an den gegenüberstehenden Kanten eines viereckigen Tisches etc.

Linien dieser Art heifsen gleichlaufend oder parallel. Hieraus folgt:

Parallele Linien liegen in einer und derselben Ebene und behalten auch bei unendlicher Verlängerung stets die gleiche Entfernung von einander bei."

Daran schliefsen sich Übungen und dann Auseinandersetzungen über Konvergenz und Divergenz.

Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869.

p. 23: „Zwei Gerade, die, soweit man sie auch verlängert, einander nie schneiden, heifsen parallel.“

Hieran schliefsen sich Erklärungen und Lehrsätze.

p. 26: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine Parallele zu derselben möglich.“

Indirekter Beweis.

Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869.

p. 2: „Zwei gerade Linien haben gleiche Richtung, dann nennt man sie gleichlaufende oder Parallellinien.“

Die Winkelsätze werden p. 4 in bezug auf Parallelen ausgesprochen und sind der Erklärung gemäfs mit Richtungsbeweis versehen.

Fr. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. (Progr.)

p. 22: „Der gemeinsame Punkt zweier Geraden kann auch in unendlicher Ferne liegen, man sagt dann, die Geraden schneiden sich gar nicht. Die Geraden heifsen in diesem Falle parallel.“

„Lehrsatz. Wenn ein Kreuz durch eine Transversale ebenbildlich geschnitten wird, so kann dieselbe die zweite Gerade des Kreuzes selbst bei weitester Verlängerung nicht treffen und ist ihr parallel. (Gewöhnlich lautet dieser Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dafs die entstehenden korresp. und Weckselwinkel gleich oder die inneren und äufseren entgegengesetzten Winkel supplementär sind, so sind die Geraden parallel.)“

Hierzu bemerkt Becker: „Ein solches Geschnittenwerden ist aber nur dann möglich, wenn die Geraden schon parallel sind, und findet in diesem Falle die Gleichheit der erwähnten Winkel für jeden beliebigen Schnitt statt. Es sollte daher der Satz also lauten: Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dafs gleiche .... Winkel entstehen, so ist die Schneidende der einen der beiden Geraden parallel; oder er sollte lauten: Wenn zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten werden, so zu einander

liegen, dafs die durch diesen Schnitt entstehenden korresp. Winkel gleich sind, so sind diese Geraden parallel."

Als Beweis des Lehrsatzes wird der durch Deckung gegeben. Ebenfalls als Lehrsatz folgt dann der Satz, dafs durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden möglich ist.

Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

p. 5: „Sind zwei in einem Punkte S sich schneidende Gerade a und b gegeben, und dreht man (in derselben Ebene) die Gerade b um einen in ihr befindlichen Punkt B derart, dafs ihr Durchschnitt mit a immer weiter und weiter rückt, so kann man schliefslich eine Lage der Geraden b erhalten, für welche der Durchschnitt verschwindet: man nennt diese Lage der beiden Geraden die parallele, und beide Gerade zu einander parallel. Wird die Drehung weiter fortgesetzt, so erscheint der Durchschnittspunkt auf der entgegengesetzten Seite der Geraden a."

„Von einem Punkte aufserhalb einer gegebenen Geraden läfst sich nur eine Gerade ziehen, welche zur gegebenen Geraden parallel ist."[1])

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenberg a/H. 1870.

p. 48: „Zwei in einer Ebene, ohne sich zu decken, nach ein und derselben Richtung hin sich erstreckende oder gegen einander, wie weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, immer völlig ein und dieselbe Lage habende gerade Linien heifsen einander parallel."

In einer Anmerkung (nicht für Schüler) legt der Verfasser dar, warum seiner Ansicht nach das vorliegende Problem ein eigentümliches Axiom erfordert. Als solchen Grundsatz stellt er auf: „Zwei gerade Linien, deren jede einer gewissen dritten geraden Linie parallel ist, sind einander parallel."

Daran schliefsen sich die Winkelsätze.

---

[1]) Hierzu sagt eine Anmerkung: Dieser Satz wird als Axiom berachtet.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1870.

Die Parallelenlehre geht aus von den Winkeln beim Durchschnitte zweier geraden Linien mit einer dritten.

p. 11: „Parallele Linien heifsen solche Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag."

Dann folgt der Satz, dafs wenn die besondern Winkelbeziehungen eintreten, die Geschnittnen parallel sind.

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Hierauf die Umkehrung des 11. Axioms mit indirektem Beweis, dann das elfte Axiom selbst ohne Beweis, aber in einem Anhange, p. 299, der Bertrand-Schulz'sche Beweis.[1])

Joh. Müller, Lehrbuch der element. Planimetrie. — Bremen 1870.

p. 21: „Wie die Lage zweier Punkte gegen einander aus der Bewegungsgröfse erkannt wird, welche erforderlich ist um die beiden Punkte zum Zusammenfallen zu bringen, so ist auch mit der Lage zweier Geraden gegen einander kein andrer Begriff zu verbinden. Da aber in der Geraden die veränderlichen Grundvorstellungen beide enthalten sind, so sind für die Gerade zwei einfache Bewegungen möglich: Verschiebung und Drehung (aufserdem, im Raume, eine Kombination beider Bewegungen)."

„Zwei Geraden, welche sich durch Verschiebung ohne Richtungsänderung zur Deckung bringen lassen, werden parallel genannt."

„Man erhält also zwei parallele Geraden, wenn man von zwei sich deckenden Geraden die eine ohne Richtungsänderung verschiebt."

„Da parallele Geraden ohne Richtungsänderung zur Deckung gebracht werden können, so haben sie dieselbe Richtung; man nennt sie deshalb auch gleichgerichtete Geraden. Eine be-

---

[1]) Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathematiques. 4. Genève 1778.

Schulz, Entdeckte Theorie der Parallelen. Königsberg 1784/86.

stimmte Richtung ist nicht an einen bestimmten Ort gebunden, sondern an jedem Orte existiert dieselbe Richtung.“

„Parallele Geraden laufen nebeneinander her, ohne jemals zusammenzutreffen.“

Die Winkelsätze werden p. 30 unter der Bezeichnung „das offene Dreiseit“ behandelt. Ihre Behandlungsweise geht aus den Erklärungen hervor.

Brockmann, Lehrbuch der element. Geometrie. — Leipzig 1871.

p. 9: „Aufser der Lage, in welcher zwei Gerade sich schneiden und Winkel bilden, ist noch eine Lage zweier Geraden in der Ebene möglich, nämlich die, in welcher sie sich, selbst bei unendlicher Verlängerung, niemals schneiden.

Linien, welche in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich haben, heifsen parallele Linien, Parallelen.

Die Parallelen bilden also mit einander keine Winkel, oder es besteht keine Abweichung der Richtung derselben von einander. Da nun jede andere Linie, welche von einem Punkte einer dieser Parallelen aus gezogen ist, mit dieser einen Winkel macht und daher von der Richtung dieser abweicht, so mufs sie auch von der Richtung der andern abweichen d. h. mit ihr einen Winkel bilden oder sie schneiden. Es folgen daher als Grundsätze: 1) Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich; und 2) Eine Linie, welche eine von zwei Parallelen schneidet, schneidet auch die andere.“

Hartmann, Geometrischer Leitfaden. — Bautzen 1872. — In Form von Fragen und Anweisungen.

p. 2: „Jede bestimmte Richtung einer Geraden nennen wir Lage.

Welche zwei Hauptfälle sind zu unterscheiden, wenn man zwei Geraden nach ihrer Lage mit einander vergleicht?“

p. 3: „Welche Geraden nennt man parallel?“

„Wie viele Geraden kann man durch einen Punkt zu einer

davon entfernt liegenden Geraden legen? Warum können parallele Gerade einander niemals schneiden?“

Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872.

p. 4: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, keinen oder einen unendlich weit entfernten (fallende Körper, Sonnenstrahlen) Punkt gemeinschaftlich haben.“

p. 24: Die Winkelsätze stützen sich auf den Begriff der Richtung. — Daran schliefsen sich direkt die Sätze vom Aufsenwinkel und der Dreieckswinkelsumme.

Sadebeck, Elemente d. e. Geometrie. — Breslau 1872.

p. 11: „Zwei gerade Linien, welche beliebig verlängert nirgends zusammentreffen, heifsen parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer geraden Linie ist zu dieser nur eine einzige parallele Linie möglich.“

Die Winkelsätze durch Deckung der Halbstreifen bewiesen.

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

p. 23: „Ein von zwei Geraden mit verschiedner Lage eingeschlossner Teil der Ebene heifst Ebenenstreifen. Seine Gröfse ist unbestimmt; denn da die Gerade nicht begrenzt ist, so ist auch ein durch ihre Bewegung erzeugtes Gebilde nicht vollkommen begrenzt.“

„Zwei Geraden nach verschiedner Lage aber gleicher Richtung heifsen parallel.“

Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873.

Nach der Erklärung des Begriffes Wechselwinkel heifst es p. 16: „Hat man eine gerade Linie und aufserhalb derselben einen Punkt und zieht man von demselben nach irgend einem Punkte der geg. Geraden eine zweite Gerade, so läfst sich immer durch den Punkt eine Gerade von solcher Beschaffenheit legen, dafs die entstandnen Wechselwinkel gleich sind.“

Beweis mittelst Drehung.

„Werden zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten, daſs gleiche Wechselwinkel entstehen, so treffen sich dieselben nicht, man mag sie verlängern so weit als man will.“

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

„Zwei gerade Linien, die mit einer Durchschneidenden gleiche Wechselwinkel bilden, nennt man Parallellinien.“

Man kann sie auch definieren

1) als Nichtschneidende,
2) als Linien gleicher Richtung.“

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Wenn zwei gerade Linien, so weit man sie verlängert, nicht zusammentreffen, so sind sie parallel.“

p. 8: „Um die Eigenschaften der Parallellinien zu untersuchen, vergleicht man die Winkel untereinander, welche eine gerade Linie mit ihnen macht, wenn sie beide Parallelen schneidet.“

Erster Satz: „Bei Parallellinien ist jeder äuſsere Winkel seinem inneren Gegenwinkel gleich.“ Richtungsbeweis.

Nach dem Satze von der Dreieckswinkelsumme folgen dann die Umkehrungen.

Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873.

p. 11: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche ohne sich zu decken gleiche Richtung haben, heiſsen parallel.“

„Parallelen schneiden sich auch bei unbegrenzter Verlängerung nicht.“

Dann folgt die Umkehrung.

Die Winkelsätze haben den Richtungsbeweis.

Baltzer, Die Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874.

p. 31: „Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden Winkel bilden, die gleich oder um 180° verschieden sind — jede Gerade in einer bestimmten Richtung, die Winkel in ·rlei Sinn genommen, so schneiden sie sich nicht.“

Indirekter Beweis durch Kongruenz der beiden Parallel-:n.

Hinweis auf den Mangel des Bertrand'schen Beweises.

p. 12: „Wenn in einem Dreieck ABC ein Winkel BAC und eine an demselben liegende Seite CA unverändert bleibt, und die andere daranliegende Seite AB zu wachsen beginnt, so beginnt der ihr gegenüberliegende Winkel ACB zu wachsen. Wenn es nun einen bestimmten Winkel ACD giebt, welchem der Winkel ACB bei hinreichender Gröfse der Seite AB bis auf eine beliebig kleine Differenz sich nähert, so heifst der Schenkel CD, welcher nach einem unendlich fernen Punkt (dieser Ausdruck ist von Desargues 1630 und in weiterem Umfange von Newton 1687 gebraucht worden) des Schenkels AB gerichtet ist und letzteren nicht schneidet, während alle von C ausgehenden und in dem Winkel ACD enthaltnen Schenkel ihn schneiden, parallel mit AB.

Der Winkel ACD kann das Supplement des Winkels BAC erreichen, aber nicht überschreiten. Wenn NC normal zu AB ist, wenn NB und NB' entgegengesetzte Richtungen haben und wenn der Winkel $D'CN = NCD$ ist, so folgt aus der Kongruenz der (offnen) Figuren $BNCD$ und $B'NCD'$, dafs auch CD' parallel mit NB'. Wenn insbesondre der Winkel NCD recht ist, so ist $D'CN + NCD = 180^0$, und die beiden Parallelen CD und CD' liegen auf einer Geraden.

Wenn aber eine solche Grenze ACD des Winkels ACB nicht existiert, wenn die Gerade eine geschlossene Linie ist, auf der man von A über B in derselben Richtung weitergehend nach A gelangt, so sind die Parallelen nicht konstruierbar.

Den Parallelen entsprechend werden einer Geraden entweder zwei getrennte unendlich ferne Punkte (real oder nicht real), oder ein unendlich ferner Punkt zugeschrieben.

Welcher von den drei möglichen Fällen stattfindet, kann weder empirisch (durch Beobachtung) noch theoretisch (spekulativ) entschieden werden. Auf die Voraussetzung eines unendlich fernen Punktes der Geraden ist die gemeine, Euklidsche Geometrie gegründet, der die Erfahrung nicht widerspricht und die im Folgenden entwickelt wird; auf die Voraussetzung eines Paares unendlich ferner Punkte der Geraden wird die allgemeine, Nicht-Euklidsche Geometrie gegründet."

Hieran schliefst sich in einer Anmerkung eine wertvolle historische Darstellung (verbunden mit Angabe der älteren Litteratur), von der wir hier das Wichtigste geben wollen.

Gauss 1792 ist von der Unbeweisbarkeit des 11. Axioms überzeugt. Bestätigung dieser Überzeugung durch die von Gauss, J. Bolyai, Lobatschewsky aufgestellte widerspruchsfreie Geometrie, indem sie die Möglichkeit geradliniger Dreiecke mit verschiednen Winkelsummen (unter 180°) zuliefsen. Diese erhält den Namen Nicht-Euklidsche (imaginäre) Geometrie, Astralgeometrie, Pangeometrie. — Diese Arbeiten fallen in die erste Hälfte dieses Jahrhunderts.

Die Möglichkeit einer Geometrie bei Negation unendlich ferner Punkte der Geraden ist von Riemann 1854 erkannt worden.

Der Übergang der allgemeinen Untersuchung zu der Euklidschen findet sich nun im folgenden Satze:

„Wenn die Schenkel CD mit NB, CD' mit NB' parallel sind, wenn die Winkel NCD, $D'CN$ recht sind, und daher CD und CD' auf der Geraden DD' liegen (Axiome der gemeinen Geometrie), so sind die Geraden BB', DD' parallel und . . . . ."

Helmes, Planimetrie. — Hannover 1874.

Nach Erledigung der Winkelsätze bei drei Geraden wird p. 31 der Satz aufgestellt, dafs wenn die bekannten Bedingungen stattfinden „die beiden geraden Linien nie zusammentreffen oder nie in einem Punkte sich schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag, oder parallel sind."

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Der umgekehrte Satz jedoch, das elfte Axiom (oder fünfte Postulat), bedarf eines neuen Grundsatzes.

Vergl. Klügel, math. Wörterbuch, p. 728. — Ersch und Gruber, Encykl. „Parallell".

Einfach und natürlich der Grundsatz: „Zwei gleich gerichtete Linien bilden mit jeder beliebigen Transversalen gleiche korrespondierende Winkel." (Thibaut.)

Hieraus ergiebt sich der Satz, dafs durch einen Punkt eine Parallele möglich ist zu einer Geraden.

Helmes selbst giebt dann folgenden Gang an:

„Grundsatz: Wenn zwei Gerade in einer Ebene einer und derselben dritten parallel sind, so sind sie auch untereinander parallel.

Folgerung: Durch einen Punkt ist nur eine Parallele zu einer Geraden möglich.

Folgerung: Schneidet eine Gerade eine von zwei Parallelen, so schneidet sie auch die andere.

Lehrsatz: Wenn zwei Gerade parallel sind, so gelten die bekannten Winkelbeziehungen. Beweis indirekt.

Folgerung: Das elfte Axiom Euklids."

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

p. 8: „Zwei gerade Linien können gemein haben die Richtung; dann heifsen sie parallel. Parallele Linien können einander nie treffen, sonst hätten sie aufser der Richtung noch einen Punkt gemein und müfsten zusammenfallen."

p. 10 folgen die Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Hub. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie.[1]) — Leipzig 1874.

p. 8:

„Erklärung. Zwei Linien sind parallel, wenn sie sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich nur eine Parallele zu derselben ziehen.

Lehrsätze.

a. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittnen Linien parallel.

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

α. Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten, so sind Wechselwinkel gleich."

Beweis indirekt.

Es folgen dann die übrigen Winkelsätze.

---

[1]) In der dritten Auflage, 1889, findet die Parallentheorie eine von der hier zitierten so verschiedne Behandlung, dafs ich sie ebenfalls zitieren werde.

Schlömilch, Geometrie des Maſses. — Leipzig 1874.

p. 10: „Zwei gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne ineinander zu fallen, heiſsen Parallelen. Man bemerkt leicht, daſs zwei solche Gerade immer nebeneinander herlaufen und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge.“

„Zu einer gegebnen Geraden läſst sich durch einen auſser ihr liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine, Parallele ziehen.“

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

p. 33 giebt Wagner den Nachweis der Winkelsumme im Dreieck, auf Grund der Aufgabe, ein Dreieck in ein andres von gleicher Winkelsumme zu verwandeln; des Lehrsatzes, jedes Dreieck läſst sich allmählich in ein andres von gleicher Winkelsumme verwandeln, in welchem die Summe zweier Winkel beliebig klein ist; und der sich daran anschlieſsenden Lehrsätze.

Die Parallelenlehre schlieſst sich dann an.

Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874.

p. 10: „Axiom 11. Es giebt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel kleiner wäre, als ein beliebig klein gegebener Winkel.

Scholie. Die Grundeigenschaften der Figuren, insofern man sie bloſs als Örter auffaſst, sind durch die bisher aufgezählten 11 Axiome erschöpft. (Unser 11. Axiom vertritt das gleichnummerierte Euklidische, vor welchem es u. a. die gröſsere Evidenz und auch den Vorzug voraus hat, daſs man keiner langen Entwicklungen zu seinem Verständnis bedarf.)“

Nach diesem Axiom ist der Beweis für die Dreieckswinkelsumme klar (durch fortgesetzte Konstruktion gleicher Dreiecke); ebenso die Entwicklung der Parallelenlehre.

Hablützel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 35: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche bei verschiedner Lage eine gleiche Richtung haben, werden parallele ... genannt.“

Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875.

p. 20 wird die Winkelsumme des Dreiecks mittelst Drehung als gleich zwei Rechten bewiesen. Daran schliefsen sich die Winkelsätze bei geschnittnen Geraden.

p. 22: „Zwei Gerade einer Ebene, welche niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge, heifsen parallel."

p. 23: „Da zwei parallele Gerade keinen Punkt gemein haben, so kann die eine derselben nicht durch Drehung in die Lage der andern gebracht werden; sie bilden also auch keinen Winkel miteinander."

Parallelenverschiebung.

Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876.

p. 3: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche beliebig verändert sich nicht schneiden, heifsen parallel."

Die Beweise der Winkelsätze indirekt.

Zmurko-Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876.

p. 29 wird durch Verschiebung eines Dreiecks, das am Schnittpunkt zweier Geraden konstruiert wird, eine dritte Gerade gewonnen, die mit der einen der beiden ersten keinen Punkt gemein hat.

„Solche Gerade heifsen parallele Geraden, und damit sie parallel seien ist nur erforderlich, dafs der Winkel beim Verschieben sich gleich bleibe."

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

p. 59: „Bilden zwei gerade Linien einer Ebene mit einer dritten in derselben Ordnung dieselben Winkel, so haben sie in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemeinsam."

p. 67: „Aus den Lehrsätzen (33 und) 58 folgt unmittelbar, dafs man durch jeden Punkt einer Ebene in derselben immer eine Gerade ziehen kann, welche mit einer beliebigen Geraden

in derselben Ebene keinen Punkt gemein hat. Man sagt dann, die Geraden seien parallel oder gleichlaufend und nennt jede eine Parallele zur andern, beide auch zwei parallele Gerade oder zwei Parallele."

Lehrsatz: „Man kann durch jeden Punkt einer Ebene zu jeder in derselben liegenden Geraden eine und nur eine Parallele ziehen."

Beweis aus der Gleichheit zweier gleichliegenden Winkel indirekt. — Der Einwand, dafs Winkelflächen, weil unendlich, nicht miteinander verglichen werden können, wird zurückgewiesen. Dann schliefsen sich eine Reihe von Sätzen an. Schliefslich kommt Becker noch auf den unendlich fernen Schnittpunkt zu sprechen.

J. K. Becker, Lehrbuch der Elem.-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 8: „Dreht sich eine Gerade a um einen Punkt A so, dafs sie dabei eine nicht durch A gehende Gerade b schneidet, fortwährend nach derselben Seite, so rückt der Schnittpunkt mit b immer weiter fort und zuletzt gelangt a, ohne die Ebene, welche sie beschreibt zu verlassen, in eine Lage, in welcher sie mit b keinen Punkt mehr gemein hat.

Befindet sich a in dieser Lage zu b, so sagt man, a sei parallel zu b, oder a und b seien parallele Gerade oder Parallele. Wird jedoch a in der Ebene noch weiter gedreht so schneidet sie die Gerade b wieder, aber der Schnittpunkt erscheint zuerst in weiter Ferne auf der andern Seite und kommt bei fortgesetzter Drehung dem Punkt A immer näher.

Wir können also definieren:

Eine Parallele zu einer gegebnen Geraden ist eine Gerade, welche mit derselben Geraden in derselben Ebene liegt, ohne einen Punkt damit gemein zu haben.

Zugleich ist zu merken:

Durch jeden Punkt einer Ebene geht zu jeder durch ihn gehenden Geraden in derselben immer und nur eine Parallele.

Von zweien parallelen Geraden sagen wir, sie haben gleiche Stellung. Zwei Punkte, die sich auf parallelen Geraden bewegen, bewegen sich in gleicher oder entgegengesetzer Richtung."

„Da zwei sich nicht schneidende Gerade nur dann in einer Ebene liegen, wenn sie parallel sind, zwei sich schneidende aber immer in einer Ebene liegen, so zählt man auch die parallelen Geraden zu den sich schneidenden und sagt:

Parallele Gerade sind gerade Linien, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben.

Dieser unendlich ferne Punkt ist aber nur eine Fiktion, kein wirklicher Punkt. Denn „unendlich ferne" heifst eben nichts anderes, als „nirgends vorhanden".

Was irgendwo sich befindet, ist immer in endlicher Ferne, wenn auch in noch so grofser."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. — Köln und Neuss 1877.

p. 6: „Haben zwei Gerade keinen Punkt gemeinsam, so haben sie gleiche Richtung; haben zwei Gerade gleiche Richtung, so sind sie gleichlaufend und werden Parallelen genannt."

Diese Erklärung findet sich p. 18 wiederholt.

Daran schliefsen sich die Folgerungen:

„Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche unbegrenzt weit verlängert sich nicht schneiden, sind parallel."

„Zwei parallele Linien in einer Ebene können, soweit man sie auch verlängern mag, einander nicht schneiden."

„Zwei gerade Linien, welche beide einer und derselben dritten parallel sind, sind unter sich parallel."

Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877.

Nach zusammenfassenden Lagenbetrachtungen heifst es p. 8: „Haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam, so nennt man dieselben, wenn sie beide in einer und derselben Ebene liegen, parallele Linien."

p. 9 folgt die „fruchtbarere Betrachtungsweise."

„Der Ausgangspunkt zweier Geraden ist verschieden, die Richtung dieselbe."

Parallelverschiebung und Deckung.

„Solche Linien können keinen Punkt gemeinschaftlich haben."

„Gerade Linien, welche dieselbe Richtung haben, heifsen Parallelen."

Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

p. 37: „Die in zwei Punkten *a, d* auf einer Geraden errichteten Perpendikel (*ab, dc*), welche in jeder beliebigen gleichen Länge das identische Rechteck (*abcd*) geben, haben überall eine der *ad* gleiche senkrechte Entfernung von einander und heifsen Parallellinien."

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1877/78. (Progr.)

p. 15[1]): „Zwei Gerade, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, ohne einander zu schneiden, heifsen parallele Gerade oder Zeillinien (Zeilen)."

Zusätze. „Gerade Linien, deren Richtungen einander decken, sind unter sich parallel.

Jede Gerade ist sich selbst parallel.

Zwei verschiedne Richtungen, von welchen die eine ganz auf einerlei Seite der andern liegt, sind parallel."

Erklärung von „ebener Strahlbündel", „Streifen", „Winkelabschnitt", „Streifenabschnitt".

---

[1]) Verfasser weist auf einen Artikel von sich hin über „Parallelen-Theorie" im 8. Hefte des 13. Bandes der „Blätter für das Bair. Gymnasial- und Realschulwesen" 1877, worin er dem 9. Axiom Euklids eine Fassung gegeben, „durch deren Anerkennung jeder Widerspruch auf dem neueren Standpunkte der Geometrie ausgeschlossen wird".

Er glaubt, dafs durch seine Arbeit der Standpunkt der sogenannten „Pangeometrie" überwunden, „welcher auf der Grundlage der Resignation erwachsen, in der jüngsten Zeit vorzugsweise als streng wissenschaftlich gegolten habe".

Die Annahme eines besondern Axioms sei notwendig. Die revierte Fassung des 9. Axioms löse die Aufgabe.

„Lehrsatz. Die Richtung einer jeden von zwei verschiednen parallelen Geraden liegt ganz auf einerlei Seite der Richtung der andern.“ Der indirekte Beweis stützt sich auf den dritten der zitierten Zusätze.

p. 23—41 behandelt das dritte Kapitel „Theorie der Konvergenz und des Parallelismus“. Auf die Winkeldefinitionen folgen die Kriterien der Konvergenz, die wiederum im wesentlichen mit Hülfe des dritten Zusatzes indirekt bewiesen werden. Das fünfte Kriterium ist identisch mit dem 11. Axiom. Dann schliefsen sich die Kriterien des Parallelismus an.

Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877.

p. 4: „Zwei Gerade gleicher Richtung nennt man parallel.“

„Da alle Geraden, die von einem Punkte auslaufen, verschiedne Richtungen haben, so ergiebt sich, dafs zwei Gerade gleicher Richtung niemals zusammentreffen können.“

p. 6: „Aus dieser Fundamentaleigenschaft ergiebt sich aus dem Begriffe des Parallelismus ohne Weiteres, dafs zwei Geraden in eine Ebene, die beide zu einer dritten parallel laufen, auch untereinander parallel sein müssen, sowie ferner, dafs man durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine einzige Parallele ziehen kann.“

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Develey, Anfangsgründe der Geometrie. — Stuttgart 1878.

p. 31: „Indem wir von geraden Linien ausgingen, die sich schneiden, haben wir erkannt, dafs es Linien gebe, die sich nicht schneiden z. B. zwei Senkrechte auf derselben Geraden.

Zwei gerade Linien aber, die sich nicht schneiden können, soweit man sie auch als verlängert annimmt, heifsen Parallellinien.“[1]) „Ebene der Parallellinien.“

„Zwei Parallellinien bestimmen die Lage einer Ebene.“

Sätze und Beweise werden nach Bertrand gegeben, d. h. also durch Vergleichung von Parallelräumen und Winkelräumen.

---

[1]) Diese Worterklärung nach Lacroix und Legendre.

Focke und Krass, Lehrbuch der Geometrie. — München 1878.

p. 7: „Gerade Linien, die sich nicht schneiden, soweit man sie sich auch verlängert denkt, heifsen parallel."

Dann folgen die Winkelsätze. Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Schmitz-Dumont, Die math. Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 278: „Parallele Richtungen nennt man solche, welche zu einer beliebigen andern Richtung als der obigen denselben Richtungsunterschied haben, welche also auf sich selbst bezogen keinen Richtungsunterschied ergeben.

Parallele Richtungen können keinen gemeinsamen Ausgangspunkt haben, weil sie dann nicht verschiedne Richtungen wären, oder aber einen Richtungsunterschied hätten. Anschaulich spricht man dies aus, indem man sagt „Parallele Linien schneiden sich nicht". Parallele Linien darf man deshalb nicht Linien von gleicher Richtung nennen."

Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1879.

p. 9: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen, ohne einander zu decken, und sich niemals schneiden, soweit man sie auch verlängert."

„. . haben zwei Gerade gleiche Richtung, so schneiden sie sich nicht, soweit man sie auch verlängert, und werden parallel genannt."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu ihr nur eine Parallele möglich."

Es folgen hierauf die Winkelsätze mit den üblichen Beweisen, die sich auf den Grundsatz stützen: „Verschiebt man einen Winkel längs seines einen Schenkels, so ändert der andere Schenkel seine Richtung nicht."

Als weiterer Grundsatz folgt:

p. 13: „Zieht man aus dem Scheitel des einen von zwei -ren entgegengesetzten Winkeln an parallelen Linien einen

Schenkel, so mufs dieser hinreichend verlängert die andere Parallele schneiden."

Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879. (Progr. 125.)

p. 21: „Hat ein Punkt A von einer Geraden eine bestimmte Entfernung h, so kann man ihn in der Ebene so bewegen, dafs seine Entfernung von der Geraden immer $= h$ ist. Die entstehende Linie mufs eine gerade sein; denn läfst man die gleich bleibende Entfernung h immer kleiner werden, bis sie ganz verschwindet, so fällt die entstehende Linie mit der gegebenen Geraden zusammen und ist also ebenfalls eine Gerade."

„Wenn eine Gerade in allen ihren Punkten von einer andern Geraden gleich weit entfernt ist, so heifsen die Geraden einander parallel. Da ...., so können sie auch in ihrer unendlichen Ausdehnung keinen gemeinsamen Punkt haben, einander nie schneiden."

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879.

p. 6: „Haben zwei Gerade einen gemeinschaftlichen Punkt, so sagt man von ihnen, sie schneiden sich (treffen sich) in diesem Punkte. Jede der beiden Geraden hat dann eine andere Richtung nach diesem Punkte hin. Rückt der gemeinsame Punkt in immer gröfsere Entfernung, so nimmt der Unterschied in der Richtung beider Geraden immer mehr ab, bis einmal kein Unterschied mehr vorhanden ist, die Geraden also gleiche Richtung haben. Der gemeinsame Punkt ist dann in unendliche Ferne gerückt, für unsere Vorstellung also nicht mehr vorhanden. Solche Gerade heifsen gleichlaufend (parallel)."

p. 10 findet sich der Grundsatz: „Ist die Summe der innren gemischt liegenden Winkel zweier von einer Transversale geschnittnen Geraden gröfser oder kleiner als $2\ R$, so konvergieren die Geraden nach der Seite, auf welcher die Summe kleiner als $2\ R$ ist."

stimmte Richtung ist nicht an einen bestimmten Ort gebunden, sondern an jedem Orte existiert dieselbe Richtung.“

„Parallele Geraden laufen nebeneinander her, ohne jemals zusammenzutreffen.“

Die Winkelsätze werden p. 30 unter der Bezeichnung „das offene Dreiseit“ behandelt. Ihre Behandlungsweise geht aus den Erklärungen hervor.

Brockmann, Lehrbuch der element. Geometrie. — Leipzig 1871.

p. 9: „Aufser der Lage, in welcher zwei Gerade sich schneiden und Winkel bilden, ist noch eine Lage zweier Geraden in der Ebene möglich, nämlich die, in welcher sie sich, selbst bei unendlicher Verlängerung, niemals schneiden.

Linien, welche in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich haben, heifsen parallele Linien, Parallelen.

Die Parallelen bilden also mit einander keine Winkel, oder es besteht keine Abweichung der Richtung derselben von einander. Da nun jede andere Linie, welche von einem Punkte einer dieser Parallelen aus gezogen ist, mit dieser einen Winkel macht und daher von der Richtung dieser abweicht, so mufs sie auch von der Richtung der andern abweichen d. h. mit ihr einen Winkel bilden oder sie schneiden. Es folgen daher als Grundsätze: 1) Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur **eine** Parallele möglich; und 2) Eine Linie, welche eine von zwei Parallelen schneidet, schneidet auch die andere.“

Hartmann, Geometrischer Leitfaden. — Bautzen 1872. — In Form von Fragen und Anweisungen.

p. 2: „Jede bestimmte Richtung einer Geraden nennen wir Lage.

Welche zwei Hauptfälle sind zu unterscheiden, wenn man zwei Geraden nach ihrer Lage mit einander vergleicht?“

p. 3: „Welche Geraden nennt man parallel?“

„Wie viele Geraden kann man durch einen Punkt zu einer

davon entfernt liegenden Geraden legen? Warum können parallele Gerade einander niemals schneiden?"

Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872.

p. 4: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, keinen oder einen unendlich weit entfernten (fallende Körper, Sonnenstrahlen) Punkt gemeinschaftlich haben."

p. 24: Die Winkelsätze stützen sich auf den Begriff der Richtung. — Daran schliefsen sich direkt die Sätze vom Aufsenwinkel und der Dreieckswinkelsumme.

Sadebeck, Elemente d. e. Geometrie. — Breslau 1872.

p. 11: „Zwei gerade Linien, welche beliebig verlängert nirgends zusammentreffen, heifsen parallel."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer geraden Linie ist zu dieser nur eine einzige parallele Linie möglich."

Die Winkelsätze durch Deckung der Halbstreifen bewiesen.

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

p. 23: „Ein von zwei Geraden mit verschiedner Lage eingeschlossner Teil der Ebene heifst Ebenenstreifen. Seine Gröfse ist unbestimmt; denn da die Gerade nicht begrenzt ist, so ist auch ein durch ihre Bewegung erzeugtes Gebilde nicht vollkommen begrenzt."

„Zwei Geraden nach verschiedner Lage aber gleicher Richtung heifsen parallel."

Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873.

Nach der Erklärung des Begriffes Wechselwinkel heifst es p. 16: „Hat man eine gerade Linie und aufserhalb derselben einen Punkt und zieht man von demselben nach irgend einem Punkte der geg. Geraden eine zweite Gerade, so läfst sich immer durch den Punkt eine Gerade von solcher Beschaffenheit legen, dafs die entstandnen Wechselwinkel gleich sind."

Beweis mittelst Drehung.

man durch ihre Verlängerung in der einen und andern Richtung zu einem einzigen bestimmten Punkte gelange, durch welchen die gedrehte Gerade in der parallelen Lage gehe. Man spricht daher auch von den Parallelen zu einer Geraden als von der Geraden nach dem unendlich fernen Punkt der letzteren, eine Redeweise, welche nur den engen Anschlufs der Parallelen zu einer Geraden an die die letztere schneidenden Geraden ausdrücken soll."

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.

p. 5: „Die Geraden, welche nie zusammentreffen, heifsen parallele Gerade. Durch einen aufserhalb einer Geraden liegenden Punkt läfst sich nur eine Parallele mit derselben ziehen. Zwei parallele Gerade haben entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung."

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 23: „Zwei Gerade, welche dieselbe Richtung haben, heifsen parallel."

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881.

Nach dem Beweis für die Dreieckswinkelsumme und den Aufsenwinkel mittelst Drehung wird die Erklärung gegeben p. 18: „Zwei Linien heifsen parallel, wenn die gleichliegenden Winkel, welche sie mit einer sie schneidenden Geraden bilden, gleich grofs sind."

Darauf wird der Satz bewiesen: „Sind die gleichliegenden Winkel für eine schneidende Gerade gleich grofs, so sind sie es für jede."

Darauf folgt der Winkelsatz in folgender originellen Fassung:

„Bei jedem Durchschnittspunkte hat man vier Winkel; die Linien parallel, so ist jeder spitze Winkel der einen e gleich jedem spitzen Winkel der andern Gruppe und

Supplement jedes der stumpfen Winkel. Umgekehrt sind die Linien parallel, wenn eine von diesen Bedingungen erfüllt ist.“

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

p. 7: „Gerade in einer Ebene, welche bei beliebiger Verlängerung sich nicht schneiden, heifsen parallel.“

„Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden eine Parallele ziehen“ mit Beweis. Dann als Axiom:

„Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen.“

Die Winkelsätze werden mit Hülfe kongruenter Dreiecke bewiesen.

„Denkt man sich die Parallelen und die Transversale unbegrenzt verlängert und die Figur mit allen Punkten in grofse Entfernung gerückt, so erscheinen die dreierlei Winkelpaare allmählich als Scheitelwinkel, kongruente Winkel und Nebenwinkel.

Am leichtesten wird dieser Hauptsatz der Parallelentheorie bewiesen mit dem Axiome: Der Parallelstreifen ist im Vergleich zur Ebene verschwindend klein.“

Féaux, Lehrbuch der elem. Planimetrie. — Paderborn 1882.

p. 13: „Zwei Linien werden parallel genannt, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und sich niemals schneiden, wofern sie auch ins Unendliche verlängert werden. Da solche Linien gleiche Richtung haben, da mit andern Worten ein Unterschied der Richtung bei ihnen nicht besteht, so sagt man auch wohl, parallele Linien seien solche, welche den Winkel Null bilden.“

Als Hülfssatz folgt dann der bekannte Winkelsatz.

p. 14: „Axiom. Durch einen aufserhalb einer Linie AB gelegnen Punkt P ist nur eine Parallele zu AB ziehbar.“

Daran schliefst sich eine ausführliche Behandlung der Parallelenlehre.

In einem Rückblicke konstatiert der Verfasser, dafs alle Versuche, das elfte Axiom Euklids zu beweisen, vergeblich gewesen sind und einfach darin bestehen, an Stelle dieses Axioms ein anderes zu setzen. So sei auch sein Axiom eigentlich ein Lehrsatz, der zu beweisen sei.

Die absolute und relative Null werden unterschieden:

$$(0 = a - a) \qquad \left(0 = \frac{1}{\infty}\right).$$

„Dem entsprechend giebt es auch einen zweifachen Parallelismus, einen absoluten und einen relativen. Das Wesen des absoluten (ideellen) Parallelismus besteht darin, dafs der Winkel zweier Geraden einer Ebene absolut 0 sei. Solche Linien schneiden sich nicht, selbst wenn man sie unendlich lang denkt; denn wenn sie sich schnitten, so bildeten sie einen gewissen, wenn auch noch so kleinen Winkel. — Das Wesen des relativen Parallelismus besteht darin, dafs zwei Linien einer Ebene sich im Unendlichen oder, was auf dasselbe hinauskommt, unter einem unendlich kleinen Winkel treffen.

Wegen der durch das Anschauungsvermögen gesteckten Grenzen fallen beide Parallelismen dem Wesen nach zusammen."

Heger, Leitfaden für den geometr. Unterricht. — Breslau 1882.

p. 7: „Unter den durch einen Punkt A gehenden Geraden giebt es eine, aber auch nur eine, die eine gegebne Gerade nicht schneidet (Axiom)."

„Zwei Gerade einer Ebene, die einander nicht schneiden, heifsen parallel."

Die Winkelsätze werden durch Deckung bewiesen, ihre Umkehrungen zum Teil indirekt.

Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

p. 6: „Stimmen zwei oder mehrere Gerade in ihren Richtungen vollkommen überein, so heifst man sie parallel.

Wenn man eine Gerade so verschiebt, dafs sie ihre ursprüngliche Richtung unverändert beibehält, so kann man sie in die Lage jeder ihr parallelen Geraden bringen.

Zwei sich schneidende Gerade zielen nach dem Schnittpunkt hin; parallele Gerade zielen nach einem gemeinsamen Punkt in gröfster Entfernung d. h. in unendlich grofser Entfernung hin: sie schneiden sich in unendlicher Entfernung. Parallele Gerade einer Ebene zielen sämtlich nach demselben unendlich enfernten Punkt hin."

„Zwei parallele Gerade haben keinen Richtungsunterschied, ihr Winkel ist gleich Null."

„Schreitet eine Gerade parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort, so mufs ihr Winkel mit einer andern festen Geraden eine unveränderliche Gröfse behalten und umgekehrt.

Daraus folgt: Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel."

p. 12 folgen die Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Löser, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Wiesbaden 1882.

p. 23: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz I. Zu einer gegebnen Geraden ist durch einen aufser ihr liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine Parallele möglich.

Grundsatz II. Zwei Gerade von verschiednen Richtungen in einer Ebene müssen hinreichend verlängert sich treffen, sie haben dann einen, aber auch nur einen Punkt mit einander gemein."

Die Winkelsätze werden als Kriterium der parallelen Lage bezeichnet, da es praktisch unausführbar ist, die Geraden ins Unendliche zu verlängern.

J. K. Becker, Die Math. als Lehrgegenstand der Gymnasien. — Berlin 1883.

p. 56: „Dabei können zwei Gerade etwa als parallel de-

Behl, Die Darstellung der Planimetrie. — Hildesheim 1886.

p. 10 werden die Möglichkeiten der Lagen zweier Geraden erörtert; „3) sie können keinen Punkt mit einander gemein haben und in ihrer Verlängerung auch keinen Punkt mit einander gemein bekommen, dann sagt man von den Linien: sie sind parallel.

Grundsatz: Parallele Linien können, soweit sie auch verlängert werden, sich niemals schneiden."

Kröger, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886.

p. 4: „Gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, soweit man sie auch nach beiden Seiten verlängern möge, heifsen gleichlaufend oder parallel."

p. 91: „Lehrsatz. Durch einen Punkt kann zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden." Beweis indirekt.

Stegmann, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. — Kempten 1886.

Nach Erledigung der Winkelsätze heifst es

p. 18: „Gerade, welche sich nicht schneiden, heifsen parallel."

„Grundsatz. Zu einer Geraden kann durch einen Punkt (aufserhalb derselben) nur eine Parallele gezogen werden."

Anwendung der Winkelsätze und Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

F. Fischer, Anfangsgründe der Math. II. — Leipzig 1887.

p. 19: „Zwei Gerade in einer Ebene können drei verschiedene Lagen haben. Sie haben entweder zwei Punkte gemeinsam und damit alle, sie fallen zusammen; oder sie haben nur einen Punkt gemeinsam, in welchem sie sich schneiden; oder sie haben keinen Punkt gemeinsam und sind parallel."

„Decken sich zwei Gerade oder sind sie parallel, so haben sie gleiche Richtung. Damit haben sie auch gegen jede dritte Gerade denselben Richtungsunterschied."

Lieber u. von Lühmann, Planimetrie. — Berlin 1887.

p. 6: „Gerade Linien, welche gleiche Richtung haben, nennt man parallel.“

Folgerungen:

1) „Parallele Linien können sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.“

2) „Durch einen Punkt läfst sich zu einer Geraden nur eine einzige Parallele ziehen.“

3) „Zwei Linien, die einer dritten parallel sind, sind einander parallel.“

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Rausenberger, Die Elementargeometrie. — Leipzig 1887.

p. 27: „Während sich zwei Punkte immer durch eine Gerade verbinden lassen, ist es bei zwei Geraden, auch wenn sie in einer Ebene liegen, nicht notwendig, dafs sie einen Punkt gemeinsam haben. Zwei in derselben Ebene liegende Gerade, welche keinen Punkt gemeinsam haben, heifsen parallel. Dafs parallele Gerade wirklich existieren, wird später nachgewiesen werden.“

„Die gegebene Definition der Parallelen ist wesentlich identisch mit der Euklid'schen; auf die Bolyai'sche kommen wir später zu sprechen. Die landläufige, dafs zwei Gerade parallel heifsen, wenn sie dieselbe Richtung haben, ist nichtssagend, da der Begriff der Richtung nicht vorher festgesetzt wird; aufserdem nimmt sie eine später zu erörternde Thatsache als selbstverständlich an, die in Wirklichkeit unerwiesen ist.“

p. 36 folgt die Behandlung des Parallelenproblems, eingeleitet durch die Winkelsätze. Dann folgt der Beweis, dafs die Geraden sich nicht schneiden können unter den bestimmten Bedingungen (Beweis von Ptolemäos). — Damit ist auch die Existenz von parallelen Geraden nachgewiesen. — Die Dreieckssätze schliefsen sich an.[1])

---

[1]) Die Behandlung des Parallelenaxioms, die sich auf Seite 48 ff. findet, werde ich an anderer Stelle zur Erörterung bringen.

Seeger, Die Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.

p. 4: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie keinen Punkt der Ebene mit einander gemein haben."

p. 13: Parallelentheorie. Winkelsätze. p. 15. XI. Axiom, Beweis ohne Zuziehung unendlicher Flächenräume unmöglich.[1])

Feld und Serf, Leitfaden f. d. geometr. Unterricht. — Wiesbaden 1888.

p. 3: „Geraden heifsen parallel, wenn sie bis ins Unendliche verlängert werden können, ohne dafs sie sich schneiden."

Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888.

p. 7 werden zwei Gerade betrachtet, von denen die eine sich um einen Punkt dreht. Die Lage der Schnittpunkte wird erörtert, das Überspringen von der einen Seite zur andern.

„Unter allen den verschiedenen Lagen befindet sich nun eine, welche zwischen dem Übergange des Schnittpunktes vom einen nach dem andern Ende liegt. In dieser Lage haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam und heifsen parallel."

„Grundsatz: Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele legen."

p. 13 folgen die Winkelbetrachtungen bei zwei geschnittenen Geraden in der üblichen Weise mit indirekten Beweisen.

Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888.

p. 2: „Zwei gerade Linien einer Ebene haben entweder gleiche Richtung mit einander, dann können sie, soweit man sie auch verlängern mag, sich nicht schneiden, weil sie sonst zusammenfallen müfsten,[2]) und solche Linien nennt man parallele Linien oder . . . ."

---

[1]) In einem Anhange, p. 138, teilt Seeger den Bertrand'schen Beweis mit. (Parallelstreifen und Winkelblatt.)

[2]) Es geht der Satz voraus: Haben zwei gerade Linien einen Punkt und die Richtung gemeinschaftlich, so fallen sie mit allen ihren Punkten zusammen.

Die Winkelsätze bei Parallelen werden durch Deckung der Schenkel bewiesen.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888.

p. 20: „Schneiden zwei in einer Ebene liegende Gerade eine beliebige dritte Gerade in zwei verschiedenen Punkten und man denkt sich die eine Gerade längs der geschnittenen Geraden so hinbewegt, dafs jede Drehung ausgeschlossen bleibt, so wird dieselbe . . . oder mit der andern zusammenfallen. Dann sagt man, die beiden Geraden seien parallel oder gleichlaufend; die Art der gedachten Bewegung heifst Parallelbewegung."

„Lehrsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele ziehen."

Beweis indirekt. — Der Beweis der Winkelsätze ergiebt sich aus der Erklärung.

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

p. 6: „Haben zwei Gerade keinen Punkt gemein, so sind sie entweder parallel oder kreuzend."

p. 16: „Zwei Parallelen teilen die Ebene in drei Felder; der von den Parallelen eingeschlossene Teil der Ebene heifst Streifen. Da zwei Parallelen keinen Punkt gemeinsam haben, so müssen sie die nämliche Richtung bestimmen, d. h. ihr Richtungsunterschied ist gleich Null."

p. 17: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine Parallele mit der Geraden möglich."

Indirekter Beweis.

Koch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ravensburg 1889.

p. 53: „Grundsatz. Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich."

p. 54: „Liegt ein Punkt aufserhalb einer Geraden und dreht man eine durch den Punkt gehende Gerade um den Punkt, so rückt der Schnittpunkt der beiden Geraden ins Unendliche; nur einmal existiert kein Schnittpunkt; bei

Hierzu bemerkt der Verfasser:

„Um sich ein Bild von der Richtigkeit dieses Grundsatzes zu machen, denke man sich eine von zwei durch eine Transversale geschnittnen parallelen Geraden um ihren Schnittpunkt gedreht.“

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879.

p. 5: „Gerade Linien, die noch so weit verlängert sich nicht schneiden, sind parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich.“

p. 9 werden dann die Winkelsätze auf die Parallelen angewendet und das Verfahren der Deckung der Halbstreifen angewendet.

Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879.

p. 19: „Eine Gerade hat die Merkmale der Lage und Richtung.“

„Verschiebung einer Geraden ist Änderung ihrer Lage mit Beibehaltung ihrer Richtung. — Zwei Geraden mit verschiedner Lage aber gleicher Richtung heifsen parallel.“

„Durch einen aufserhalb einer Geraden gegebnen Punkt kann man nur eine Parallele zu der Geraden ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebnen Punkt und ihre Richtung durch die gegebne Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Parallele selbst vollkommen bestimmt.“

Winkelsätze p. 40 f. mit Richtungsbeweis.

Schweder, Lehrbuch d. Planimetrie. — Riga 1879.

p. 5: „Zwei nicht zusammenfallende Gerade, welche gleiche Richtung haben, heifsen parallel.

Parallele Gerade können, soweit man sie auch verlängert, nie einander schneiden, da sie sonst einen Punkt und die Richtung gemein hätten, also zusammenfallen müfsten.

Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind es auch untereinander.

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich stets eine, aber auch nur eine Parallele zu dieser ziehen.“

Für die Winkelsätze natürlich Richtungsbeweis.

Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 4: „Geschieht die Drehung einer Geraden um einen Drehpunkt *S* derart, dafs sie mit einer festen Geraden, Leitlinie, einen Punkt gemeinsam behält, so kann diese drehende Bewegung von einer Anfangslage der Geraden und des Schnittpunktes aus so vor sich gehen, dafs der Schnittpunkt den einen Halbstrahl oder dessen Gegenstrahl durchläuft; hiernach unterscheidet man die Drehung in dem einen Drehungssinn (dem Uhrzeiger entsprechend, Rechtsdrehung) oder in dem entgegengesetzten (Linksdrehung). — Der Schnittpunkt rückt dabei in der einen Richtung oder in der Gegenrichtung immer weiter, unbegrenzt weit hinaus. Die Gerade hat nun, wie die Anschauung zeigt, als Leitlinie die Eigenschaft, dafs durch die Drehungen in entgegengesetztem Sinne beide sich drehende Strahlen mehr und mehr in entgegengesetzte Richtungen kommen, und zwar in die Richtungen einer Geraden, welche die Leitlinie nicht schneidet. Über diese Lage hinaus kann die Drehung in demselben Drehungssinn so fortgesetzt werden, dafs der Schnittpunkt von der andern Seite wieder in seine ursprüngliche Lage rückt. Wir gelangen hiernach zu folgendem Grundsatz (Axiom der Parallelen): Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es immer eine einzige Gerade, welche erstere nicht schneidet, aber durch die geringste (eine unbeschränkt kleine) Drehung um den Punkt in eine Lage gebracht werden kann, in welcher sie die erstere Gerade bei gröfster (unbeschränkt grofser) Verlängerung nach der einen oder andern Seite schneidet. Diese Gerade heifst parallel zu ersterer."

„Thatsächlich kann ein erreichbarer Teil der Parallelen nicht von einem solchen Teil derjenigen Geraden unterschieden werden, welche die Leitlinie bei sehr weit fortgesetzter Verlängerung in der einen oder andern Richtung schneidet."

„Wird eine Gerade um einen Punkt gedreht, während sie mit einer geschlossenen Linie stets einen Punkt gemein hat, so kehrt sie schliefslich in ihre Anfangslage zurück. Dies ist nun auch bei der vollen Umdrehung längs einer Geraden der Fall; die Gerade verhält sich dabei als Leitlinie so, als ob

„Gleichlaufende gerade Linien haben keinen Punkt mit einander gemeinsam, auch wenn man sie beliebig weit verlängert denkt.“

Beweis der Winkelsätze durch Deckung der Parallelstreifen.

Herm. Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890.

p. 5 u. 6 die Winkelsätze.

p. 6: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche mit einer dritten gleiche korrespondierende Winkel bilden, heifsen parallel.“

„Lehrsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es zu dieser stets eine und nur eine Parallele.“

„Parallele Gerade können sich nicht schneiden.“ Beweis indirekt. Zweiter Teil der Winkelsätze nebst Folgerungen.

Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 50: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, die sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängert, heifsen parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu derselben immer eine einzige Parallele ziehen.“

„Je weiter der Schnittpunkt zweier konvergenter Strahlen sich entfernt, um so mehr nähert sich die Lage der von parallelen Geraden. Man sagt daher auch von parallelen Geraden, sie hätten einen unendlich fernen Schnittpunkt.“

„Parallele Geraden haben einerlei Richtung.“

Die Winkelsätze werden durch Deckung der Halbstreifen bewiesen, die Umkehrungen indirekt.

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. Schneeberg 1890. (Progr. 537.)

p. 35: Das 11. Axiom Euklids.

„Es zeigte schon Legendre, dafs hiermit identische Voraussetzungen sind:

Die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden beträgt zwei Rechte.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine einzige die gegebene Gerade nicht schneidende Gerade möglich."

p. 36: „In dem 11. Axiom Euklids oder einem der oben als äquivalent bezeichneten Axiome liegt die Charakteristik der ebenen Geometrie Euklids gegenüber einer pseudosphärischen."

Nach einer kurzen Erörterung der einschlägigen Arbeiten von Donadt und Günther[1]) giebt R. das phoronomische Axiom Günther's wieder und formt danach den Thibaut'schen Beweis etwas um, indem er zugleich seine Übereinstimmung mit Günther konstatiert.

Es wird dann auf Petersen's Versuch[2]) eingegangen; „Petersen definiert zunächst: Unter Verschiebung einer Ebene will ich eine solche Bewegung einer Ebene in sich selbst verstehen, bei der eine Gerade längs sich selbst verschoben wird. Hiernach lautet sein Axiom: Wenn ein Punkt nach mehreren Verschiebungen einer Ebene in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so befindet sich die ganze Ebene in ihrer ursprünglichen Lage."

Raschig giebt dem Günther'schen Axiom den Vorzug, weil „es besonders anschaulich und evident sei, so dafs es nicht einen Beweis zu suchen gewissermafsen von selbst herausfordere."

Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890.

p. 2: „Zwei Gerade in derselben Ebene haben entweder dieselbe Richtung und dann nennt man sie Parallelen oder gleichlaufende Linien oder . . . ".

Die Winkelsätze stützen sich demgemäfs auf den Richtungsbeweis.

---

[1]) Man vergl. die betreffenden Zitate.

[2]) Petersen, Math. Annalen 29: Über die Winkel des Dreiecks.

Scholim, Lehrbuch der Geometrie. — Kreuzburg O. S. 1890.

p. 5: „Zwei gerade Linien, welche keinen Punkt gemeinsam haben, aber nach derselben Richtung laufen, heifsen parallel. Dieselben bleiben, soweit wir sie uns vorstellen können, gleich weit von einander entfernt und begegnen sich daher nirgends.“

p. 11 folgen die Winkelsätze, die durch Verschiebung und Deckung bewiesen werden.

E. Fischer, Die Geometrie. — Berlin 1891.

p. 5: „Wegen der völligen Gleichheit sämtlicher Raumpunkte geht durch jeden derselben stets eine Gerade, welche mit irgend einer andern Geraden im Raume dieselbe Richtung hat. Linien gleicher Richtung heifsen parallele Linien.“

Der Beweis der Winkelsätze stützt sich auf die Gleichheit der Richtungsunterschiede.

Holl, Lehrbuch d. Geometrie. — Stuttgart 1891.

p. 8: „Gerade liegen in gleicher Richtung d. h. sie sind gleichlaufend oder parallel, wenn sie einander nie schneiden, soweit man sie auch verlängert. — Parallelen haben stets gleiche Entfernung von einander.“

p. 21 folgen auf die Winkelsätze zwei Zusätze:

„1) Sind zwei Gerade mit einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel.

2) Durch einen Punkt läfst sich mit einer Geraden nur eine Parallele ziehen.“

Hočevar, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1891.

p. 10: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden, heifsen parallel oder gleichlaufend.“

Beweis der Winkelsätze durch Deckung der Halbstreifen.

H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. — Berlin 1891.

p. 23 werden die Winkel zweier Geradenpaare ausführlich erörtert. Daran schliefsen sich die Winkel bei

Parallelen, indem angenommen wird, dafs das eine Geradenpaar sich so bewege, bis sein einer Schenkel mit einem des andern Paares zusammenfalle. Es wird dann gesagt, p. 27: „Die Beobachtung führt demnach bei Benutzung der Erklärung: Haben zwei gerade Linien keinen Punkt mit einander gemein, so werden sie parallel genannt, zu dem Lehrsatz: Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zwei gleichliegende Winkel oder zwei Wechselwinkel einander gleich oder zwei Ergänzungswinkel supplementär, so sind die geschnittenen Geraden parallel."

Beweis durch Kongruenz der beiden Halbstreifen.

Rossmanith, Die Elemente der Geometrie. — Wien 1891.

p. 24: „Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen und nie zusamentreffen, soweit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängert, werden gleichlaufend oder parallel genannt."

„Parallele unbegrenzte Gerade (Strahlen) haben nach beiden Seiten hin gleiche Richtungen."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich."

„Bei zwei Parallelen haben alle Punkte der einen gleiche Abstände von der andern."

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 16: „Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien eine dritte so schneiden, dafs die korrespondierenden Winkel gleich sind, so haben die schneidenden Linien gleiche Richtung. Solche Linien werden Parallellinien genannt."

Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892.

p. 5: „Zwei gerade Linien haben keinen Punkt mit einander gemein, so weit man sie auch verlängern mag, oder sie sind parallel."

„Grundsatz. Zu einer geraden Linie kann durch einen aufserhalb derselben gegebenen Punkt nur eine Parallele gezogen werden."

Beweis der Winkelsätze indirekt.

Päd. Arch. — 34. Jahrg. — 1892.

p. 545: Schur, Die Parallelenfrage im Lichte der neueren Geometrie.

„Die neueren Forschungen haben erst die wahre Bedeutung der Erörterungen zu klarem Bewufstsein gebracht."

Philosophische Verquickung.

„Möglichst wenige, der unmittelbaren Anschauung entlehnte Grundbegriffe, genaue Definitionen, strenge Deduktionen."

„Die negative Definition giebt keine unmittelbare Evidenz."

Alle Beweise, aufser Legendre's, haben das Ziel verfehlt.

„Erst seit Gauss wirklicher Einblick in das Problem, weil sich mit den übrigen Axiomen sehr wohl die Negation der Parallelen vertrage."

Bolyai, Lobatschewsky. In sich widerspruchsfreie Geometrie unabhängig vom V. Postulat.

Bis jetzt wohl kein Widerspruch, fände sich vielleicht noch.

„Man hielt doch an der unendlichen Länge der Geraden fest, die (nach Riemann) keine Folge der übrigen Axiome sei."

„Zusammenhang zwischen Hauptsätzen und Postulaten."

„Riemann's Koordinatenausdruck für den Komplex der Postulate."

Quadrat der Entfernung zweier unendlich naher Punkte. Winkel. Das sind doch alles Euklidische Begriffe. —

„Daher unter Riemann'schen Voraussetzungen Gültigkeit der Euklidischen Geometrie in jedem unendlich kleinen Teile des Raumes."

Geodätische Linien und Flächen. — Riemann'sches Krümmungsmafs.

Freie Beweglichkeit der starren Körper = überall gleiche Beschaffenheit des Raumes = Raum konst. Riem. Krümmungsmafses.

Felix Klein: bestimmtes, vorher abgegrenztes Gebiet. — Unabhängigkeit der projekt. Geometrie vom Parallelenaxiom.

Sophus Lie — Helmholtz.

Hercher, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1893.

p. 5: „Es lassen sich auch verschiedene Gerade in einer Ebene zeichnen, welche gleiche Richtung haben. Solche Linien können sich, soweit man sie auch verlängern mag, niemals schneiden, denn sie müfsten sonst als Gerade, die einen Punkt und die Richtung gemein haben, zusammenfallen. Solche gleichgerichtete Gerade nennt man parallele Gerade oder Parallelen."

p. 10: „Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu derselben nur eine Parallele ziehen."

Die Winkelsätze werden durch Deckung der Parallelen mittelst Parallelverschiebung bewiesen.

Die vorliegenden Zitate aus den Lehrbüchern haben gezeigt, dafs die verbreitetste der Definitionen von Parallelen diejenige ist, die sich auf den Begriff der Richtung stützt. Und dies ist, wie ich auch schon am Anfang des Kapitels bemerkte, wohl dem Umstande zuzuschreiben, dass einer oberflächlichen Betrachtung der sogenannte Richtungsbeweis — d. h. also der auf den Richtungsunterschied sich gründende Beweis — äufserst bequem und treffend erscheint. Ich möchte, da ich mich über diese Frage schon am Anfang des Kapitels ausgesprochen habe, hier nur noch folgendes zur Erwägung anheim geben. Macht man die mögliche Bewegung einer Geraden zum Ausgangspunkt der Betrachtung, so kann man drei Fälle unterscheiden:

1. Die Gerade bewegt sich in allen ihren Punkten und zwar

a) so, dass alle Punkte Nachbarpunkte ihrer ursprünglichen Lage bleiben (diese Bewegung heifst schieben),

b) so, dass alle Punkte eine neue Lage bekommen ohne einschränkende Bestimmung (desgl.).

2. Ein Punkt bleibt fest (diese Bewegung heifst drehen).

3. Zwei Punkte bleiben fest. (Bewegung = Drehung in sich; doch dürfte es richtiger sein, unter dieser Voraussetzung überhaupt keine Bewegung mehr als möglich anzuerkennen.)

Beschränken wir uns auf 1. und 2. und wählen die kurzen

— und wie ich glaube auch völlig deutlichen — Namen Schieben und Drehen, so würde man zum Begriff der parallelen Lage der Geraden im ersten Falle, zum Begriff des Winkels im zweiten Falle gelangen und so gleich einen Zusammenhang dieser beiden Gebilde erhalten. Bei beiden Bewegungen ändert sich die Richtung; es ist nicht richtig zu sagen: in dem einen Falle ändert sich die Richtung und ein Punkt bleibt fest, im andern wechseln alle Punkte ihre Lage und die Richtung bleibt fest. Wenn es z. B. in dem Zitat p. 317, Zeile 1 v. o. heifst: „Wenn man eine Gerade so verschiebt, dass sie ihre ursprüngliche Richtung unverändert beibehält, so kann man sie in die Lage jeder ihr parallelen Geraden bringen", so ist dieser Ausdruck entschieden falsch. Behält eine Gerade bei einer Bewegung ihre ursprüngliche Richtung unverändert bei, so ist nur eine Verschiebung in sich möglich, nichts anderes. Ich bin gewifs, dass man mir hierin zustimmen wird. Die ungenügende Erkenntnis der wesentlichen Verhältnisse erzeugt denn auch solche verworrenen Definitionen, wie die folgende (s. S. 318): „Parallelverschiebung einer Geraden heifst die Bewegung einer Geraden ohne eigne Richtungsänderung in der Richtung einer andern Geraden." Die beiden Bewegungen Schieben und Drehen sind deutlich aufzufassen und deutlich auseinander zu halten.

Gewissenhafte Bearbeiter haben übrigens für nötig befunden bei der Erklärung der Parallelen des Umstandes zu gedenken, dass in jeder Geraden zwei Richtungen zum Ausdruck kommen, und haben deshalb folgende Definition aufgestellt: „Gerade von gleicher oder entgegengesetzter Richtung heifsen parallel." So kommt es denn, dass sie konsequenterweise folgenden Satz aussprechen (vergl. p. 307): „Zwei Punkte, die sich auf parallelen Geraden bewegen, bewegen sich in gleicher oder entgegengesetzter Richtung." Hier tritt die Unnatur der Parallelendefinition, die sich auf den Begriff der Richtung stützt, recht in Evidenz.

Zum Schluss möchte ich noch das eine erwähnen, dass es nicht heifsen darf: „Gerade, welche ...., sind parallel," sondern dass es lauten muss: heissen parallel.

IV. Kapitel.

Anwendungen zur Winkel- und Parallelenlehre.

Sind dem Schüler anschauliche Definitionen vom Winkel und von den Parallelen gegeben, so handelt es sich nun darum, mit diesen Begriffen zu operieren, Begriffen, die im wesentlichen ja nur eine Erweiterung der ursprünglichen Begriffe Richtung und Abstand sind. Gleich damals hatten wir an diese beiden ersten Begriffe Untersuchungen angeschlossen „Lagenbetrachtungen", auch hier schliefsen sich direkt an die Definitionen Untersuchungen über die wesentlichen Beziehungen an. Ich hatte am Anfang des § 3 im ersten Kapitel auf die Wichtigkeit der Kombinationslehre, insbesondere auf ihre praktische Anwendung hingewiesen, indem ich zugleich betonte, dafs wir auf diese Weise ein Gerippe für den Unterricht gewinnen, das dem Schüler leicht im Gedächtnis haftet und deshalb vorzüglich geeignet ist, ihn bei Wiederholungen nicht nur zu unterstützen, sondern überhaupt zur Festigung seines Wissens beizutragen. Eine gute Disposition ist die halbe Arbeit. Dieser Satz, der für den deutschen Aufsatz wohl allgemeine Anerkennung gefunden hat, gilt meiner Ansicht nach nicht weniger bei der Behandlung des mathematischen Lehrstoffs. Den Hauptvorzug einer guten Disposition aber bildet jedenfalls der organische Zusammenhang der einzelnen Teile, gewissermafsen die natürliche Ausbildung und Gestaltung, Nicht nur mufs die Anordnung eine naturgemäfse sein, die sich von Begriff zu Begriff ohne Gedankensprünge aufbaut, es mufs vor allem gleich bei Aufstellung der Disposition darauf geachtet werden, dafs sie als Repetitionsschema gelten kann.[1])

---

[1]) Derartige Repetitionsschemata pflege ich auch in den andern Disziplinen zu geben und zwar nach Durchnahme irgend eines Abschnittes, da natürlich die wesentlichen Elemente dazu nicht von vornherein bereit liegen, wie hier in der Planimetrie. Es mufs sich daher das Repetitionsschema erst an das Pensum anschliessen. Sorgt man dafür, dafs dieses Schema sich dem Gedächtnis der Schüler sicher ein-

Die Untersuchungen des § 3 im ersten Kapitel sind ein Beispiel, wie ich mir einen derartigen Aufbau und seine Gestaltung als Repetitionsschema denke. Durch die einfache Kombination der Elemente Punkt, Gerade, Kreis zu je zweien ergab sich ein einfaches, dem Gedächtnis leicht einzuprägendes Gerippe, das jederzeit bereit liegt und nur der Ausführung harrt. Jedoch befanden wir uns dort in einer günstigen Lage, die Kombination war eine sehr einfache, die Darstellung gestaltete sich demgemäfs auch aufserordentlich einfach. Im vorliegenden Falle bieten sich eine Reihe gleichwertiger Dispositionen, die je nach dem Geschmack des Lehrenden oder nach den Fähigkeiten der Lernenden mit einander wechseln können. Eine so völlig einartig sich darbietende Gestaltung der Untersuchungen wie dort ist an dieser Stelle nicht mehr möglich. Dagegen haben wir hier den grossen Vorteil, die Untersuchungen von verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten zu können, und ich möchte als ganz besonders vorteilhaft empfehlen — vorausgesetzt dafs die Fähigkeiten der Lernenden dies erlauben — beim ersten Durchnehmen des Lehrstoffs und bei den recht häufig anzustellenden Wiederholungen mit den verschiedenen Dispositionen abzuwechseln. Doch, ich wiederhole dies ausdrücklich, mufs man gewiss sein, durch diesen Wechsel nicht eine Verwirrung hervorzurufen und so grösseren Schaden anzurichten. Allerdings handelt es sich ja auch hier um höchst einfache Betrachtungen, die rein synthetisch anzustellen sind; immerhin bieten sich gegenüber dem ersten Abschnitt Schwierigkeiten, die besonders darin liegen, dafs dem jugendlichen Geiste Beweise zugemutet werden für

prägt, so hat man die Gewähr, dafs auch die Einzelheiten im Anschlufs an die Disposition entweder völlig in dem Gedächtnis haften oder wenigstens jederzeit leicht in das Gedächtnis zurückgerufen werden können. Nicht die Einzelkenntnisse, sondern die Gesichtspunkte, nach denen sie sich ordnen, geben einen wahren Einblick in das Wesen des behandelten Themas und ermöglichen seine Beherrschung. Aus diesem Grunde sind auch Leitfäden zu bevorzugen, die eben nur die Ordnung des Stoffes geben, in allen Einzelheiten aber volle Freiheit der Behandlung gewähren. —

Man vergl. die mathematischen Repetitionshefte von Sänger und ...ne.

Sätze, die er bereitwilligst auch ohne solche als wahr anerkennt; ferner Sätze, deren Mitteilung ihm vorläufig unnötig erscheint, da er noch nicht weiss, was er damit anfangen soll.[1]) Als Hauptgrundsatz mufs ganz energisch festgehalten werden, dafs jedes dogmatische Vortragen, jede analytische Darstellungsweise in diesem Anfangsunterricht vermieden werden mufs. Rein synthetisch muss das Verfahren sein und fortwährend mufs der Schüler zur Mitarbeit herangezogen werden. Nichts muss ihm fertig geboten werden, er mufs sich selbst das Neue erarbeiten[2]); der Lehrende darf nur die Schritte leiten, den Weg zeigen, vor Abirrungen behüten, er darf aber nicht — ich bitte den trivialen Ausdruck zu entschuldigen — vorkauen; der Schüler mufs wissen, wozu er die Zähne hat und mufs sie tüchtig gebrauchen lernen. Ich glaube nicht, dass ein auf diese Weise erteilter Unterricht für den Lehrer besonders bequem ist; aber sicherlich wird er mehr Freude gewähren, da es nicht ausbleiben kann, dafs man das Wachsen der geistigen Kräfte bei den Schülern von Stunde zu Stunde fast, möchte ich sagen, beobachten kann. Ich kann wenigstens nach meinen bescheidenen Erfahrungen[3]) bezeugen, dafs die Schüler mit dem

---

[1]) Ich hoffe allerdings zuversichtlich, dafs durch Anordnung und Behandlung des Stoffes, wie ich sie in Vorschlag gebracht habe, gerade diesen Vorwürfen aufs wirksamste entgegengearbeitet wird. Eine ganze Reihe von Sätzen, die bei der bisherigen Behandlung des Stoffes weitläufige Beweise erforderten, bieten sich in der von uns mitgeteilten Darstellung in so einfacher, natürlicher Weise dar, dafs an einen Beweis gar nicht mehr gedacht zu werden braucht. Ich möchte hier nur als ein Beispiel erwähnen die Beziehungen zwischen Kreis und Tangente, wie ich sie im § 3 des ersten Kapitels vorgetragen habe. Selbst der gewissenhafteste Mathematiker wird, wenn er nicht ein „Fanatiker des Beweisens“ ist, erklären müssen, dafs bei der Entwicklung des organischen Zusammenhangs der verschiedenen Lagen die Wahrheiten der Geometrie sich in so einfacher, überzeugender Weise darbieten, dafs Zweifel überhaupt nicht auftauchen können.

[2]) Ich halte diesen Punkt für einen der wichtigsten und will deshalb nicht verfehlen, noch ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen.

[3]) Die Erfahrungen können naturgemäfs nicht allzu reich sein, da nach den strengen Vorschriften über den Betrieb des Unterrichts, über die Benutzung des Lehrbuchs etc. eine individuelle Behandlung des Lehrstoffs nur in sehr eng bemessenen Schranken sich bewegen kann.

grössten Interesse sich an dem Aufbau des Lehrstoffs beteiligen und dafs man ihnen die reine Freude, wenn sie das Richtige treffen und mit immer grössrer Sicherheit treffen lernen, wohl anmerkt. Die Zeiten, wo man pädagogisches Geschick als reine Naturanlage betrachtete, liegen wohl völlig hinter uns; allgemein wird Pädagogik als eine Wissenschaft betrachtet: aber in gewissem Sinne ist sie doch eine Kunst, und hier gilt, wenn irgendwo, der Satz, dafs höchste Kunst und reinste Natur sich aufs innigste nahe stehen müssen. Von diesem Grundgedanken ausgehend, müssen wir Lehrer bestrebt sein, den Lehrgang zu gestalten; von diesem Grundgedanken ausgehend, habe ich den Gang des geometrischen Anfangsunterrichts so gestaltet, wie ich ihn im vorliegenden Werke der Prüfung der Fachgenossen darbiete.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Motive, die mich bei dem Unterricht beeinflussen, kehre ich zu der speziellen Aufgabe, der dieses Kapitel gewidmet ist, zurück. Zunächst werde ich einige wichtige Dispositionen mitteilen, dann an der Hand eines dieser Entwürfe die Ausgestaltung im Einzelnen darstellen. Diese Einzelausgestaltung wird im allgemeinen nicht wesentlich von einander verschieden sein, wenn wir eine andre Disposition zugrunde legen, und es wird deshalb nicht nötig sein, für jede Disposition eine ausführliche Darstellung zu geben. Ich würde selbst auf die Mitteilung der andern Dispositionen verzichtet haben, wenn ich nicht dadurch dem Vorwurf entgehen zu können glaubte, dafs ich selbst dogmatisch vorginge, indem ich einen bestimmten Gang des Unterrichts vorschriebe. Aber selbst im Einzelnen sollen meine Mitteilungen durchaus nicht etwa bestimmte Vorschriften enthalten oder den Anspruch machen, dafs man sich nun ganz genau darnach richten müsse. Der Einzelunterricht hängt von zu viel Faktoren ab, als dafs sich generelle Vorschriften darüber geben liefsen, hier mufs Jeder den bestehenden Verhältnissen gerecht werden und den Lehrgang den Umständen gemäfs formen. Immerhin wird die Darstellung eines auf grund genauester Studien und reicher Kenntnis einschlägiger Litteratur gewonnenen und durchgearbeiteten Lehrgangs Anspruch auf das Interesse der Fach-

genossen erheben dürfen. Allerdings mufs ich gestehen, dafs ich selbst diesen Lehrgang nicht einseitig benutze, wohl kaum habe ich bis jetzt den Stoff einmal wie ein anderesmal behandelt, und dafs ich künftig ganz genau meine heutige Darstellung beibehielte, glaube ich auch nicht. Aber dafs sie mir als wesentliche Norm beim Anfangsunterricht auch fernerhin vorschweben wird, davon allerdings bin ich fest überzeugt. Denn nur beseelt von einer solchen festen Überzeugung ist man, meiner Meinung nach, befugt, seiner Ansicht Ausdruck zu geben.

Dispositionen zur Winkel- und Parallelenlehre können nun in folgender Weise gestaltet sein.

I. Disposition.

A. Ein Schnittpunkt.

(Winkelmessung, Benennungen, Nebenwinkel, Scheitelwinkel.)

B. Zwei Schnittpunkte.

a) Benennungen.
b) Voraussetzung eine der 16 Bedingungsgleichungen.
c) Zusammenhang mit den Parallelen.
d) Umkehrung der Winkelsätze.
e) Keine der 16 Bedingungen trifft zu. Damit Überleitung zu

C. Drei Schnittpunkte.

(Kombinationsfrage: Wie viel Schnittpunkte überhaupt möglich? Zusammenhang zwischen der Anzahl der Geraden und der Anzahl der Schnittpunkte.)

Die Winkel im und am Dreieck.

Der Grundgedanke aller Betrachtungen ist die Untersuchung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Winkeln.

II. Disposition.

A. Eine Gerade.

Ebensowenig wie bei der Betrachtung eines Punktes bietet sich hier bei der Betrachtung einer Geraden Gelegenheit zu Untersuchungen. Ein Element — als solches wird die Gerade hier angesehen — bietet für sich nichts Merk-

würdiges, erst in seinen Beziehungen zu andern finden wir ein Objekt für unsre Betrachtungen.

B. Zwei Geraden.

(Zusammenhang mit § 3 des I. Kapitels.)

a) Kein Schnittpunkt.
b) Ein Schnittpunkt.

C. Drei Geraden.

a) Kein Schnittpunkt (alle drei Geraden parallel).
b) Ein Schnittpunkt.
c) Zwei Schnittpunkte (zwei Geraden parallel).
d) Drei Schnittpunkte.

III. Disposition.

A. Ein Winkel.

Grösse, Benennungen, Zusammenhang mit dem Kreis.

B. Zwei Winkel

a) an einem Scheitelpunkt.
Nebenwinkel, Scheitelwinkel.

b) an zwei Scheitelpunkten.

1) Komplementwinkel, Supplementwinkel, Vergleichung und Kongruenz.

2) Gleichliegende, Halbgleichliegende, Ungleichliegende.

Zu beachten ist, dafs gleichliegende Winkel dieselben[1]) Winkel, aber an zwei Scheiteln sind; halbgleichliegende: Nebenwinkel an zwei Scheiteln; ungleichliegende sind Scheitelwinkel an zwei Scheiteln.

C. Drei Winkel (und mehr).

Die Winkel in und an Figuren.

---

[1]) Ich gestehe zu, dafs diese Ausdrucksweise inkorrekt, zum wenigsten sehr eigentümlich ist; aber es gelang mir nicht, einen besseren Ausdruck zu finden; auch glaube ich, dafs ein Mifsverständnis ausgeschlossen ist, besonders im Vergleich mit der folgenden Darstellung.

IV. Disposition.

A. Ein Winkel.

B. Winkelpaare.

1) Eins für sich betrachtet.

2) Zwei oder mehrere im Zusammenhang.

C. Die Winkel bei Figuren.

Hiermit sind, soweit ich es übersehen kann, die möglichen Dispositionen für diesen Teil der Planimetrie aufgestellt. Doch müssen wir noch einer weiteren Gestaltung dieses Abschnittes gedenken, die sich durch die duale Gegenüberstellung der beiden Konstruktionselemente Strecke und Winkel ergiebt. Dieser Darstellung werde ich am Schlusse dieses Kapitels noch eine eingehendere Würdigung zuteil werden lassen.

Meinen Ausführungen werde ich an dieser Stelle die dritte Disposition zugrunde legen, mit der übrigens die vierte fast völlig übereinstimmt. Es liegt nur eine Verschiedenheit der Benennung vor, im Gange der Untersuchung herrscht völlige Gleichheit. Übrigens scheint mir die Bezeichnung „Winkelpaare" viele Vorzüge zu besitzen, da in dem Namen zugleich schon die Thatsache liegt, dafs die beiden Winkel, die in Betrachtung kommen, in enger Beziehung zu einander stehen.[1]) Überall aber, wo man schon durch den Namen eine Andeutung geben kann, um was es sich handelt, sollte man die Gelegenheit nicht ungenützt vorüber gehen lassen.

Selbstverständlich ist, dafs man auch in der gewählten Disposition Einzelheiten der Ausführung nach einer andern Disposition gestalten kann. Überhaupt ist aufs energischste zu betonen, dafs dem einzelnen Lehrer volle Freiheit in der Gestaltung des Einzelnen zu gewähren ist — mehr scheint vor der Hand nicht zu erreichen zu sein. Der Unterschied

---

[1]) „Die Ausführung von Winkelmessungen wird oft dadurch erleichtert, dafs man zwei Winkel in ihrer gegenseitigen Beziehung betrachtet, indem man jeden einzelnen als Bestandteil (Element) eines Winkelpaares auffafst."

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. Braunschweig, 1887; p. 38.

zwischen akademischer Lehrfreiheit und dem Zwange des akademisch gebildeten Lehrers der höheren Lehranstalten ist aus Gründen falscher Humanität ein riesengrofser. Es hätte gewifs auch andre Wege gegeben, um mifsbräuchlichen Ausschreitungen entgegen zu wirken. Ein Schlagwort der modernen Pädagogik ist die Individualisierung; aber wehe, wenn darüber die Individualität des Lehrers zugrunde geht. Den besten Erfolg wird doch immer eine kräftige Individualität haben; ihr Einflufs auf die Schüler wird auch methodische Fehler in den Hintergrund treten lassen. Doch zur Sache!

§ 1. Ein Winkel.

Hat man die Definition des Winkels gegeben und auf grund des von uns aufgestellten psychischen Gesetzes[1]) festgelegt, dafs immer der kleinere Winkel gemeint ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, so gilt es nun, die Bestimmungen über die Bezeichnung der Winkel zu treffen.[2]) Zunächst wird aber mitgeteilt, dafs der gemeinsame Ausgangspunkt der beiden Strahlen den Namen „Scheitel“ (Scheitelpunkt) hat, dafs die Strahlen „die Schenkel“ genannt werden. Dafs es auf die Länge der Schenkel gar nicht ankommt, geht aus unserer Definition des Winkels hervor, doch mag es nicht überflüssig sein, ausdrücklich noch darauf aufmerksam zu machen resp. diese Wahrheit von den Schülern selbst finden zu lassen. Die Festsetzung, dafs immer der kleinere Winkel gemeint sei, ist notwendig, da es nicht möglich ist, in der Ebene einen Winkel für sich zu zeichnen, wenn man nicht die zugehörige Fläche schraffieren will. In manchen Fällen

---

[1]) Vergl. Seite 5 u. 43.

[2]) Bürklen (Zur Lehre vom Winkel. — Kor. Bl. f. d. Gel. u. Realsch. 1891) p. 8: „Die Grösse eines Winkels — d. h. das was grofs ist — ist dasjenige der beiden durch die Schenkel bestimmten Ebenengebiete, das kleiner ist als die Halbebene. Soll das andere Gebiet ins Auge gefafst werden, — was z. B. bei dem Zentriwinkel nötig ist, der zu einem stumpfen Peripheriewinkel gehört — so ist dem Wert Winkel „Konvex-“ vorzusetzen.

Wo diese Festsetzung nicht getroffen wird, da bleiben Zweideutign bestehen.“

wird sich dies empfehlen, aber es läfst sich nicht konsequent durchführen; wir befinden uns hier gegenüber der Darstellung des Abstandes zweier Punkte durch die Strecke im Nachteil. Würden wir den Drehungsabstand zweier Strahlen im Raume durch eine Fläche darstellen, so wäre die Eindeutigkeit sofort gewonnen. Aber da wir in der Ebene operieren und in dieser unsere Zeichnungen machen, so ist es unmöglich, einen Winkel für sich allein zu zeichnen. Es ist dies ganz analog dem Falle, dafs wir auf einem Kreise durch zwei Punkte nicht einen Bogen erhalten, sondern zwei: und deshalb auch festsetzen müssen, welchen von ihnen wir meinen. Mit Hülfe eines Blattes wird es also möglich sein, im Raume den Winkel eindeutig darzustellen. Man sollte nicht versäumen, dies den Schülern vorzuführen. Wie nun eine Strecke, wenn wir auf die Richtungen achten, noch doppeldeutig sein kann, so auch der Winkel, wenn wir die Drehungsrichtung in Betracht ziehen. Ob es ratsam sei, hierauf im Anfangsunterricht einzugehen, erscheint mir zweifelhaft. Abgesehen davon nämlich, dafs man mit dem Hinweis auf die Doppeldeutigkeit — sowohl bei der Strecke, wie beim Winkel — an die Auffassungskraft des Schülers schon erhöhte Anforderungen stellt, kommt als gewichtiges Moment in Betracht, dafs in der Behandlung der Planimetrie auf der Schule von dieser Doppeldeutigkeit nirgends eine Anwendung gemacht wird, so dafs man also den Schüler mit etwas belastet, womit er durchaus nichts anzufangen weifs. Ich bin daher dafür, diesen Punkt im Anfangsunterricht unberührt zu lassen und die Begriffe negativer Strecken und negativer Winkel gar nicht zu erwähnen.

Die Bezeichnung der Winkel ist dadurch erschwert, dafs man sich der kleinen griechischen Buchstaben nicht mehr bedienen kann; doch scheint mir ein Ersatz der zu sein, dafs man grofse lateinische Buchstaben mit einem Dächelchen darüber wählt, also z. B.: $\hat{A}$. Es ist damit der Vorteil verbunden, dafs man an den Ecken eine einheitliche Benennung hat. Überall aber, wo an einem Scheitel mehrere Winkel nebeneinander liegen, mufs man unbedingt von dieser Bezeichnung absehen, um jeder Zweideutigkeit aus dem Wege zu gehen. Hier ist es nötig, die Bezeichnung mit Hülfe dreier

Buchstaben zu wählen, so zwar, dafs man den Buchstaben des Scheitels in die Mitte setzt. Auch hier bin ich dafür, um einen Unterschied gegen das Dreieck von vornherein festzulegen, über den Buchstaben des Scheitels ein Dächelchen zu machen, also z. B.: $A\hat{B}C$. Würde man zugleich noch festsetzen, dafs bei der Benennung die Reihenfolge der Buchstaben so gewählt wird, dafs das Winkelfeld zur Linken liegt, — wie das ja auch für alle Figuren wohl allgemein üblich ist — so würde damit eine weitere Sicherheit in der Bezeichnung und eine Übereinstimmung gegeben sein.

Was nun die Einteilung der Winkel betrifft, so sind der Vollständigkeit halber der Vollwinkel und der Nullwinkel, die sich allerdings unter dem Bilde eines Strahles darstellen und zeichnerisch gar nicht von einander unterschieden werden können, nicht zu übergehen. Um so mehr kommt der Vollwinkel in Betracht, als er uns die Mafseinheit liefert; eine natürliche Mafseinheit, nicht eine willkürliche wie bei den Strecken. Hat der Strahl eine Vierteldrehung vollzogen, so heifst der entsprechende Winkel ein rechter Winkel.[1]) Hierfür möchte ich gern den Namen „Richtwinkel" vorschlagen, ein Name, der aus dem praktischen Leben sich ergiebt, z. B. ein Haus richten, d. h. unter rechtem Winkel aufbauen u. a. Es würde sich dies deshalb empfehlen, weil wir dann ein Wort haben, mit dem sich leichter operieren liefse, als mit dem Ausdruck „rechter Winkel". Dreht man weiter, bis eine halbe Drehung vollzogen ist, die beiden Strahlen also vom Scheitel aus nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken (eine Gerade bilden), so hat man den „Flachwinkel". Winkel, die kleiner sind als der Richtwinkel[2]), heifsen „Spitzwinkel"; solche, die gröfser als der Richtwinkel sind, aber kleiner als der Flachwinkel, heifsen „Stumpfwinkel". Alle Winkel, die kleiner als der Flachwinkel sind, haben ausserdem

[1]) Nach unsrer Ansicht besser der rechte Winkel.

[2]) Es wird sich durchaus empfehlen, nur den bestimmten Artikel zu gebrauchen, um auch dadurch schon anzudeuten, dafs es sich um etwas ganz Bestimmtes handelt. Um solche Sätze, wie „alle rechten Winkel sind einander gleich", kommt man dann herum, ja es würde uns geradezu merkwürdig berühren, solche Sätze zu hören.

noch den gemeinsamen Namen „Hohlwinkel". Auf eine besondre Bezeichnung der Winkel, die gröfser sind als der Flachwinkel, kann man eigentlich ganz verzichten, da sie ja fast gar keine Rolle spielen, jedenfalls keine allgemeinen Sätze von ihnen vorkommen. Sie führten bisher den Namen „erhabne Winkel"; auch hier wäre es besser, ein Wort für den Begriff zu haben, ich wage aber keinen Vorschlag, da mir nichts besonders Passendes eingefallen ist.[1]) Der vollen Drehung entspricht „der Vollwinkel".

Von diesem gehen wir aus, wenn wir dazu übergehen, den Winkel als Grösse, als benannte Zahl in die Geometrie einzuführen, so dafs wir mit ihm rechnerisch operieren können.[2])

Die übliche Einteilung des Vollwinkels ist die in 360 gleiche Teile, die wir „Grade" nennen. Über die Veranlassung zu dieser Einteilung ist folgendes zu bemerken, was ich einem Vortrage entnehme, den M. Cantor am 3. Dezember 1891 im historisch-philosophischen Vereine zu Heidelberg gehalten hat, dessen Kenntnis ich der Güte des Herrn Vortragenden zu danken habe. „Zeit und Zeitrechnung" ist das Thema dieses Vortrags.[3]) Es heifst dort p. 192 (Sonderabdruck aus den neuen Heidelberger Jahrbüchern, 1892, Jahrgang II. Heft 2):

„Es mag wesentlich länger gedauert haben, bis das Bewufstsein erwachte, dafs noch ein gröfserer Zeitabschnitt, eine aus 12 Monaten gebildete Dauer, gewisse sich erneuernde Erscheinungen in ihrem Gefolge mit sich führte. Wärmere oder kältere Tage, das neu entstehende, das fallende Laub, das Aufspringen der Blütenknospen, das Reifen der Früchte, mit einem Worte die Jahreszeiten lenkten die Aufmerksamkeit

---

[1]) Vielleicht: Konvexwinkel (s. Bürklen l. c.).

[2]) Vorher müssen natürlich Übungen im Zeichnen der verschiedenen Klassen der Winkel durchgenommen worden sein, um die Schüler mit den Bezeichnungen vertraut zu machen.

[3]) Cantor bemerkt dazu in einer Fufsnote: „Das Material zu dieser Zusammenstellung stammt teils aus dem I. Bande der Vorlesungen über Geschichte der Mathematik des Verfassers, teils aus Abhandlungen von F. Kaltenbrunner in den Sitzungsber. der Wiener Akad. phil.-hist. Klasse LXXXII, 289—414 und LXXXVII, 485—586 und von F. Stieve in den Abhandl. der Bair. Akad. Hist. Klasse XV, 3. Abt., 3—98."

auf sich; der Begriff des Jahres war entstanden, des Jahres von 12 Monaten zu 30 Tagen, also von 360 Tagen.

Diese Jahreslänge ist mindestens mit hohem Grade von Wahrscheinlichkeit bei den ältesten Kulturvölkern nachzuweisen. Wenn in der Genesis (VII, 11 und VIII, 3 und 4) berichtet wird, Noah sei in die Arche gegangen, dann habe es am 17. Tage des II. Monates zu regnen begonnen, am 17. Tage des VII. Monates sei die Arche auf Ararat festgestanden, wenn beigefügt ist, die Wasser hätten sich nach 150 Tagen verlaufen, so entspricht die Gleichsetzung von 150 Tagen mit genau 5 Monaten der dreifsigtägigen Monatsdauer. Der babylonische Sintflutsbericht, den man für die Quelle der biblischen Erzählung hält, hat zwar in der durch Oppelt übersetzten Fassung jene Zeitangaben nicht, gleichwohl ist man berechtigt, den Babyloniern ebenfalls einen 30tägigen Monat, ein 360tägiges Jahr zuzuschreiben. War das Jahr unsrer Auffassung gemäfs irdischen Ursprungs, so gewann es doch nach und nach als Sonnenjahr eine astronomische Bedeutung. Wo allabendlich die Sonne unterging, erschienen, sobald es finster genug geworden war, um schwächere Lichtquellen bemerken zu können, gewisse Gestirne am westlichen Horizonte, und zwar nicht immer dieselben. Erst nach einem Jahre erkannte man die genau gleichen Gestirne wieder an der gleichen Stelle, und man kleidete diese Beobachtung in die Worte, die Sonne habe in Jahresfrist einen Umlauf um das Himmelsgewölbe vollzogen, jeden Tag den gleichen Weg, mithin beim Jahre von 360 Tagen den dreihundertsechszigsten Teil des Kreisumfangs, durchmessend, und so kamen die Babylonier dazu, 360 Grade des Kreises zu unterscheiden."[1])

Cantor fügt hinzu: „Als wir schon vor längerer Zeit diese naheliegende Vermutung veröffentlichten, glaubten wir Neues auszusprechen. Wir täuschten uns. Formaleoni hatte 1788 in seinem „Saggio sulla nautica antica dei Veneziani" bereits den Zusammenhang zwischen der Kreisteilung und der

[1]) Ich habe mir erlaubt, diese Worte wegen der Wichtigkeit für die vorliegende Frage gesperrt drucken zu lassen.

Anzahl der Tage im Jahre hervorgehoben; was er aber nicht wufste, war, dafs aus chinesischer Quelle eine Bestätigung möglich ist. Der oder die Verfasser des Tcheōu pei wissen, dafs das Sonnenjahr $365\frac{1}{4}$ Tage lang ist; sie teilen zugleich den Kreis nicht in 360, sondern in $365\frac{1}{4}$ Grade."

„Vollends gesichert ist das alte Jahr von 360 Tagen bei den Ägyptern."

Ich glaube im Sinne meiner Leser gehandelt zu haben, wenn ich diese Stelle aus dem Vortrage des hervorragendsten unter den Historikern der Mathematik *in extenso* mitgeteilt habe, da wir deutlich den Grund für die sonst merkwürdige Einteilung des Kreises (und damit des Winkels) in 360 Grade erkennen.[1]) Will man den Schüler mit dem historischen Grunde für unsere Kreisteilung (Winkelteilung) bekannt machen, so ist dagegen sicherlich nichts einzuwenden. Ich mufs allerdings gestehen, dafs ich auf dieser Stufe des Unterrichts mir nicht viel davon verspreche, aber in höheren Klassen ist es gewifs auch den Lernenden von Interesse, die Genesis der Winkel- (resp. Kreis-)teilung zu erfahren.

Zu erwähnen ist übrigens, dafs die Franzosen eine gewisse dezimale Teilung auch hier eingeführt haben, indem sie den Richtwinkel in 100 Grade einteilten, so dafs der Vollwinkel 400 Grade zählt.

Jeden Grad teilte man wieder ein in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden.

Auch die Entstehung dieser Bezeichnungen pflege ich gelegentlich den Schülern mitzuteilen. Ich glaube bemerkt zu haben, dafs auch viele Kollegen darüber nicht informiert sind, weshalb ich mir erlaube, kurze Angaben zu machen.

---

[1]) Bürklen, Zur Lehre vom Winkel (Korr.-Bl. f. d. Gel.- u. Realsch. 1891, 5. u. 6. Heft). p. 13: „Endlich wäre es wünschenswert, über den Ursprung der 360-Teilung, die dem Schüler in unsrer dezimalen Zeit doch etwas seltsam erscheinen mufs, mitzuteilen, dafs sie von den Chaldäern herrührt, die glaubten, dafs die Sonne zu ihrem Umlaufe um die Erde 360 Tage brauche; dem Vorwärtsschreiten an einem Tag entspricht also der Bogengrad."

(Hankel, Geschichte der Math., S. 79 und Treutlein u. Henrici, Lehrb. der Geometrie 1881. S. 113.)

minutum primum und *minutum secundum* zum erstenmal geteilt, zum zweitenmal geteilt: das ist die Entstehung der Namen, die konsequenterweise dazu hätte führen müssen, zwischen „Prime“ und „Sekunde“ zu unterscheiden. Ein Zufall hat es anders gefügt, so dafs das *minuere* im Namen der Minute erhalten geblieben ist.

Über die Wahl der Zahl 60 sagt Thieme[1]) (Posen): „Die Leichtigkeit, mit welcher der Kreis sich in sechs Teile zerlegen läfst, brachte bald den sechsten Teil des Vollwinkels und die Zahl 60 in den Vordergrund und gab wohl den Anlafs zur späteren Herrschaft des Sexagesimalsystems. Damit hängt auch die Einteilung des Winkels in 60 Minuten, der Minute in 60 Sekunden zusammen.“

Dieser Vortrag ist für die vorliegende Frage von Wichtigkeit. Es heifst dort weiter: „Die Vorzüge der Zahl 60 sind bekannt; trotzdem pafst die immer noch gebräuchliche Einteilung des Grades in Minuten und Sekunden in unser immer mehr zur Alleinherrschaft[2]) gelangendes Dezimalsystem nicht hinein. Die Schöpfer unsres metrischen Mafssystems hatten auch den Winkel nicht vergessen, sie hatten den rechten Winkel in 100 Grade und den Grad weiter dezimal geteilt; diese Änderung ist aber bisher wenig zur Aufnahme gelangt.“

Im Anschlufs an diesen Vortrag wurde von Thieme der Antrag gestellt, man möge sich für Beibehaltung der Gradeinteilung aussprechen, von der Einteilung des Winkelgrades in Minuten und Sekunden aber absehen und zur Dezimalteilung übergehen, ein Antrag, der von der Versammlung mit grofser Majorität angenommen wurde.[3])

An diese Erörterungen müssen sich nun meiner Ansicht nach reichliche Übungen im Gebrauch des Transporteurs anschliefsen, damit der Schüler auch praktisch mit dem zahlen-

---

[1]) Vortrag auf der Jahresversammlung des „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften“, abgedruckt (im Auszug) in H. Z. XXIV p. 232.

[2]) Und das mit vollem Recht!

[3]) Vergl. Schotten, Bericht über die Versammlung des Vereins etc. in H. Z. XXIV; p. 228. —

mäfsigen Winkel umgehen lernt.[1]) Man lasse Winkel zeichnen und mittelst des Transporteurs ihre Gröfse bestimmen. Sehr empfehlen wird es sich, mit einem grofsen Transporteur zu arbeiten, der an der Tafel Verwendung finden kann. Aber auch in seinem Heft mufs der Schüler solche Übungen anstellen. Man lasse Winkel in Graden nennen und bestimmen, zu welcher Klasse von Winkeln sie gehören, d. h. ob sie spitz oder stumpf sind etc. Auf diese Weise wird man den Schüler nicht nur an die Einteilung in Grade rasch gewöhnen, man wird ihn auch dahin bringen können, mit mehr oder weniger Sicherheit Winkel auf ihre Gröfse in Graden zu taxieren: Übungen also, die dem Taxieren von Strecken, die ja schon lange üblich sind, entsprechen.

Schon bei der Genesis der Einteilung zeigte sich der innige Zusammenhang zwischen der Winkelteilung und der Kreisteilung; die Übungen mit dem Transporteur haben diesen Zusammenhang schon praktisch dargelegt: es ist daher nun Zeit, auf diese Frage näher einzugehen.[2])

Hier ist es wieder ein Aufsatz des verdienstvollen Herausgebers der H. Z., der unsere Aufmerksamkeit besonders beansprucht. Er findet sich in Bd. XVIII der H. Z. p. 344, betitelt: „Winkelgrad und Bogengrad“. Verfasser klagt über die Unklarheit über diese beiden Begriffe. „Man unterscheidet nicht,“ heifst es, „oder nicht streng genug die Winkeleinheit

[1]) Nicht unwesentlich erscheint mir auch folgende Stelle aus Bürklen, Zur Lehre vom Winkel (Korresp.-Bl. f. d. Gel.- u. Realschulen 1891, 5. u. 6. Heft) p. 13: „Bezüglich der Gradeinteilung wird gewöhnlich gesagt: Man teilt den Vollwinkel in 360 gl. Teile und nennt einen solchen Teil Grad. Dies ist kurz und richtig, aber der Schüler wird die Lehrbücher vergeblich durchsuchen, um zu finden, wie diese Konstruktion ausgeführt wird, oder ob sie überhaupt streng ausgeführt werden kann. Es sollte daher beim Unterricht über die Ausführung einer empirischen Teilung etwas gesagt werden.“

Diese Frage scheint mir allerdings wichtig genug, um gründlich erörtert zu werden.

[2]) Vielleicht wird mancher Kollege auch diese Frage vor den Übungen mit dem Transporteur zu erörtern für richtiger halten; da beides unmittelbar aufeinander folgt, so ist die Reihenfolge, in der man diese Fragen behandeln will, selbstverständlich ohne jede wesentliche Bedeutung.

von der Bogeneinheit. Am klarsten ist dem Anfänger natürlich die Bogeneinheit, weil ihm aus der Anschauung oder auch aus seiner Selbstthätigkeit, d. h. aus der der selbstgefertigten Zeichnung des Kreisbogenstücks $\widehat{AB} = \frac{1}{360}$ eines Kreises geläufig ist. Nicht so der Winkelgrad, d. h. die Winkeleinheit oder der spitze Winkel $A\hat{O}B$ als Begrenzungselement eines Kreisausschnitts, zu welchem jener Bogengrad gehört und von denen 360 nebeneinander gelegt den ganzen Raum um den Winkelscheitel oder um den Kreismittelpunkt ausfüllen. (Vgl. die Fufsnote aus Bürklen.) Dieser Winkelgrad als Winkeleinheit aufgefafst ist deshalb dem Schüler nicht geläufig, weil er ihm im Unterricht nicht fest eingeprägt wird. Dies wäre aber um so notwendiger, als diese Winkelform bei ihrer Kleinheit weit schwieriger in der Vorstellung haftet, als die Form eines Bogens."

Hoffmann spricht sich dann dagegen aus, dafs der Bogen als Mafs des Winkels bezeichnet werde. „So verschiedene Gebilde lassen sich doch nicht durcheinander messen! Man kann Gebilde doch nur durch gleichartige messen, also: Winkel durch Winkel, Bogen durch Bogen, Gerade durch Gerade, Fläche durch Fläche u. s. w. Insofern haben diejenigen recht, welche den Ausdruck „der Winkel wird durch den Bogen gemessen" verurteilen."[1])

„Man könnte etwa sagen: dem Winkel entspricht der zugehörige Bogen, der Winkeleinheit die Bogeneinheit, d. i. dem Winkelgrad der Bogengrad."

Hoffmann klagt dann darüber, dafs das Zeichen ° für beide Formen, für Winkel- und Bogengrad gebraucht

---

[1]) Vergl. Bürklen (l. c.) p. 12: „Jede Gröfse kann nur durch eine gleichartige gemessen werden, der Winkel nur durch einen Winkel."

„Dem Vielfachen eines Winkels entspricht das Gleichvielfache des zugehörigen Bogens und zu einem Bogen von bestimmtem Halbmesser gehört immer ein bestimmter Winkel. Es ist deshalb der Bogen ein Mittel, um Winkel zu vergleichen und zu messen. Es sollte aber die Redeweise unterlassen werden, dafs der Bogen ein Mafs des Winkels sei . . . ., so ist auch der Bogen nur Mittel zur Messung, aber nicht selbst Mafs des Winkels — Unterschied zwischen Winkel- und Bogen-
·l —."

wird. Hierbei kommt er auf die Verschiedenheit der Winkeldefinitionen zu sprechen und die daraus resultierende Verwirrung über den Begriff „Grad", wofür er aus einer Reihe von Lehrbüchern Belege anführt. Bei der von uns vorgeschlagenen Winkeldefinition würde Winkelgrad einfach den 360sten Teil einer vollen Drehung bezeichnen resp. ihm entsprechen, womit u. A. nach jede Unklarheit vermieden wird.

Zur Vermeidung von Irrtümern schlägt Hoffmann vor, für den Winkelgrad das Wort „Off" einzuführen. So wertvoll die vorliegende Behandlung der Frage und die Anregung Hoffmanns ist, so glauben wir doch kaum, dafs er mit diesem Vorschlage besondres Glück haben wird.

Was wir für nötig halten zu betonen ist das, dafs der Winkelgrad eine ganz bestimmte Gröfse ist, die ein- für allemal denselben Wert hat, während der Bogengrad mit dem Radius des Kreises sich ändert. Darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen, und dies kann man auch schon dem Anfänger klar machen. Wenn er sich aber darüber klar ist, so wird auch keine Verwechslung mehr möglich sein und jede Verwirrung ist aus der Welt geschafft.

Der Zusammenhang des Winkels mit dem Kreis mufs, wenn man in der Behandlung der Winkellehre so weit fortgeschritten ist, gründlich erörtert werden. Die gemeinsame Entstehung beider Gebilde durch Drehung liefert uns das Gemeinsame, die Veränderlichkeit des Bogengrades mit dem Radius des Kreises und die stetige Gröfse des Winkelgrades als des 360sten Teiles einer vollen Drehung liefert uns das trennende, das unterscheidende Merkmal. Beides mufs zur klaren Darstellung des Verhältnisses zwischen diesen beiden Begriffen kräftig betont und anschaulich dargestellt werden. Hier ist es besonders zu empfehlen, einen Winkel im Zusammenhang mit mehreren konzentrischen Kreisen zeichnen zu lassen, um so zu einer richtigen Erkenntnis der Beziehungen zu gelangen.

Noch eine Frage gilt es nun bei der Betrachtung eines Winkels zu erörtern, nämlich die, ob schon eine Konstruktionsaufgabe hier anzuknüpfen möglich ist. Praktisch läfst sich diese Frage bejahen, wenn man den Transporteur schon in

Gebrauch genommen hat; streng wissenschaftlich allerdings kann die Konstruktion eines Winkels, der einem gegebenen gleich ist, erst auf die Behandlung der Kongruenzsätze folgen, nachdem die Aufgabe gelöst ist, aus drei gegebenen Strecken ein (das) Dreieck zu konstruieren. Aber gerade dieser Übelstand lässt die Frage in den Vordergrund treten, ob nicht schon hier die Eindeutigkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten erörtert werden könnte, an die sich dann die Konstruktion eines einem gegebenen Winkel gleichen Winkels als direkte Anwendung ausschliefsen würde. Die Beantwortung dieser Frage möchte ich vorläufig noch offen lassen.

Hiermit dürfte die Behandlung der Lehre von einem Winkel erschöpft sein, und wir können nun zur Betrachtung zweier Winkel in ihren gegenseitigen Beziehungen übergehen.

§ 2. Zwei Winkel (Winkelpaare).

A. An einem Scheitel.

Da durch unsre Disposition schon eine bestimmte Voraussetzung, nämlich über die Lage der beiden Winkel, gemacht ist, so kann es sich bei den folgenden Untersuchungen nur noch um Gröfsenbeziehungen handeln. Hier ist sofort die merkwürdige Thatsache zu konstatieren, dafs nur eine Gröfsenbeziehung in Betracht gezogen worden ist. Weder Winkel, die sich — bei der vorausgesetzten Lage — zu einem[1]) Richtwinkel ergänzen, noch solche, die gemeinsam einen Vollwinkel bilden, haben besondre Beachtung gefunden und einen besondren Namen erhalten. Dafs man für das Winkelpaar, das sich zu einem Flachwinkel ergänzt, einen eigenen Namen aufgestellt, mag hauptsächlich seinen Grund in der Wichtigkeit des Flachwinkels bei der Dreieckslehre haben, obwohl es sich auch da weniger um das vorliegende Winkelpaar handelt als um die später zu erörternden Supplementwinkel.

Hat man zwei Winkel an einem Scheitel, die sich zu einem Flachwinkel ergänzen, so führen sie den Namen „Neben-

[1]) Hier ist es selbstverständlich gestattet, den unbestimmten Artikel zu gebrauchen (analog wie man auch von einer Geraden spricht). —

winkel". Es ist also von vornherein zu betonen, dafs wir bei diesen Winkeln auf Lage und Gröfse zu achten haben und dafs sie nur paarweis zu denken sind.[1]) Es lassen sich nun gleich eine grofse Reihe von Übungen an die Erklärung anknüpfen. Diese Übungen zerfallen in zwei völlig getrennte Klassen, in zeichnerische und rechnerische. Dabei bietet sich zugleich willkommene Gelegenheit, die Benennungen der Einzelwinkel gehörig zu wiederholen. Man wähle alle möglichen Winkel, Spitzwinkel, Richtwinkel, Stumpfwinkel und lasse dazu die Nebenwinkel zeichnen und sie klassifizieren. Dabei tritt dann sofort in Evidenz, dafs die Zeichnung des Nebenwinkels auf doppelte Art möglich ist, je nachdem man den einen oder den andern Schenkel über den Scheitel hinaus verlängert. Dafs diese beiden möglichen Nebenwinkel eines Gegenwinkels einander gleich sind, geht aus der Natur der Zeichnung und Erklärung hervor. Noch intensiver aber prägt sich dies ein, wenn man nach den Zeichenübungen — denn ich halte es für besser, erst diese anzustellen — zu Rechenübungen übergeht. Es wird ein Winkel gegeben — auch hier wieder von allen möglichen Klassen — und die Aufgabe gestellt, den Nebenwinkel zu berechnen. So wird es auch klar, dafs man von dem Nebenwinkel eines Winkels spricht, was bei der Möglichkeit der zweifachen Zeichnung dem Schüler vielleicht als merkwürdig auffällt. Von besonderm Interesse ist natürlich der Fall, wo die beiden Nebenwinkel einander gleich sind, also jeder ein Richtwinkel ist. Auf diesen Fall

---

[1]) Wenn wir also Sätze als Lehrsätze finden, wie „die Summe zweier Nebenwinkel beträgt $2R$", so ist das geradezu ein Nonsens. Nicht ein solcher Satz resultiert aus den Betrachtungen, sondern die Definition geht — abgesehen von der Lage — von dem Gesichtspunkte aus, dafs solche Winkel, welche mit gemeinsamem Scheitel und Schenkel zwei Rechte — oder wie wir lieber sagen, einen Flachwinkel bilden — Nebenwinkel heifsen. Diese inkonsequente Auffassung des eigentlichen Thatbestandes führt zu Weitläufigkeiten und überflüssigen Sätzen, deren Aufstellung vermieden würde, wenn man sich über das Wesentliche vollständig klar wäre. Dafs die Summe zweier Nebenwinkel einen Flachwinkel beträgt, ist nicht eine Eigenschaft der Nebenwinkel, sondern eins der beiden wesentlichen Momente der Definition.

mufs deshalb, und weil er auch sonst von Wichtigkeit ist, mit besonderer Gründlichkeit eingegangen werden.

Schon dadurch, dafs man die in der Zeichnung möglichen beiden Nebenwinkel konstruiert hat, ist man zu einem neuen Gebilde gekommen — für das ein früherer Schriftsteller den Namen „Kreuz“ vorgeschlagen hat —, an dem man nun die Beziehungen des durch die beiden Verlängerungen entstandnen Winkels mit dem ursprünglichen in Betracht ziehen mufs. Dafs dies Gebilde mit zwei sich schneidenden Geraden identisch ist, wird jedem Schüler von selbst klar sein; dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, besonders darauf hinzuweisen. Der Name des neuen Winkelpaares „Scheitelwinkel“ mufs natürlich mitgeteilt werden.[1]) Die Beziehungen des Scheitelwinkels zum gegebenen Winkel aber — sowohl der Gröfse wie der Lage nach — mufs der Schüler selbst finden. Ich bemerke übrigens ausdrücklich, dafs es mir ganz wunderbar erscheint, dafs kein Lehrbuch für die Gleichheit der Scheitelwinkel einen andern Beweis zu erbringen weifs, als mit Hülfe der Nebenwinkel. Und doch ist, wenn man unsere Winkeldefinition zu Grunde legt, kein einfacherer, natürlicherer Beweis denkbar als der folgende. Man lasse die eine Gerade sich um ihren Scheitelpunkt drehen. Sowie sie dann mit der andern noch einen zweiten Punkt gemeinsam hat, fällt sie mit dieser völlig zusammen. Die beiden Scheitelwinkel erfordern also dieselbe Drehung — resp. entstehen durch dieselbe Drehung —, so dafs sie nach unserer Erklärung eo ipso auch als gleich erkannt werden. Soweit ich mich erinnere, habe ich diesen höchst einfachen, anschaulich evidenten Beweis für die Gleichheit der Scheitelwinkel nirgends gefunden.

Auch jetzt müssen wieder Zeichen- und Rechenübungen

---

[1]) Bei den Scheitelwinkeln liegt die Sache ganz anders wie bei den Nebenwinkeln. Hier ist nur Voraussetzung die besondre Lage, der Satz über die Gröfsenbeziehung zwischen den Elementen eines Scheitelwinkelpaares ergiebt sich als eine Eigenschaft, ist nicht konstituierendes Moment. Für diese Eigenschaft mufs also ein Beweis geliefert werden. Die Verwechslung der konstituierenden Eigenschaften und den Folgeeigenschaften ist leider eine sehr verbreitete und trägt die gröfste Schuld an Unklarheiten über geometrische Begriffe.

angestellt werden, die dann Sätze liefern, wie die folgenden: „Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel", „Gleiche Winkel haben gleiche Scheitelwinkel" und deren Umkehrungen. Ich halte es für wichtig, schon bei diesen einfachen Sätzen auf die Umkehrungen zu achten, deren Bedeutung für die Ausbildung des folgerichtigen Denkens mir noch nicht hinreichend gewürdigt zu sein scheint. Meistens wird aber auf Umkehrungen erst bei schwierigeren Sätzen eingegangen, wo die wesentliche Beziehung, die Vertauschung von Voraussetzung und Folge, durch Schwierigkeiten andrer Art verdeckt oder wenigstens in den Hintergrund geschoben wird. Stellt man dagegen derartige Übungen schon bei den einfachsten Sätzen an, so wird der Schüler über das Wesen der Umkehrung völlige Klarheit erlangen und ein richtiges Urteil über die Möglichkeit von Umkehrungen und über ihre Gültigkeit gewinnen, was ihm dann später zu grofsem Vorteil gereichen wird. Ich halte, wie gesagt, gerade die Übungen im Umkehren für aufserordentlich wichtig zur Ausbildung eines folgerichtigen Denkens und Urteilens.

Dafs die beiden — konstruktiv möglichen — Nebenwinkel eines Winkels ihrerseits wieder ein Paar Scheitelwinkel bilden, darf natürlich nicht unerwähnt bleiben.

Hiermit ist die Betrachtung von Winkelpaaren an einem Scheitelpunkt erledigt: wir haben gesehen, dafs sich schon reiches Material zu Übungen bietet und dafs schon bei diesen einfachen Gebilden Gelegenheit zur Entwicklung von Sätzen und zur Ausbildung des Anschauungs- und Urteilsvermögens ist. Gerade auch der Zusammenhang zwischen Zeichnen und Rechnen, der hier hervortritt, hat wesentliche Bedeutung.

Noch eins gilt es hier zu erörtern, das ist die Addition und Subtraktion von Winkeln. Rechnerisch hat das ja gar keine Schwierigkeiten, zeichnerisch mufs aber wohl der Lehrer den richtigen Weg erst finden lassen. Wie bei der Addition von Strecken darauf zu achten ist, dafs die Strecken einen gemeinsamen Punkt haben, so auch hier die Winkel; aber damit ist es nicht genug, die beiden Winkel müssen aufser dem gemeinsamen Scheitel auch einen Schenkel gemeinsam haben. Wie die Strecken müssen sie in einer Ebene liegen,

bei der Addition nebeneinander, bei der Subtraktion aufeinander. Hier zeigt sich, dafs es gut ist, wenn man den Schüler mit dem Begriffe der negativen Winkel verschont hat. Denn derartige Beziehungen würden ihn nur irre machen. Wir betrachten eben den Winkel als ein vollendetes Gebilde in diesen Fällen ohne Rücksicht auf die Bewegung, aus der er hervorgegangen.[1])

Die hier angedeuteten Übungen im Addieren und Subtrahieren von Winkeln müssen in ausreichendem Mafse angestellt werden, um den Schüler völlig vertraut mit dieser Sache zu machen. Ihr Zusammenhang mit den Übungen bei Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln ist übrigens gehörig zu betonen.

Wir gehen nun über zu

b. An zwei Scheiteln.

Bei der Betrachtung der Winkel an zwei Scheiteln müssen wir nun unterscheiden die Berücksichtigung der Lage und der Gröfse. Wir wollen zunächst nur die Gröfse in Betracht ziehen. Es handelt sich dann um folgende Arten von Winkeln: „Komplementwinkel“ und „Supplementwinkel“; ferner gehört hierher die Vergleichung zweier Winkel hinsichtlich ihrer Gröfse. Kommt dann die Berücksichtigung der Lage in Betracht, so bieten sich der Betrachtung dar die gleichliegenden, halbgleichliegenden und ungleichliegenden an den Schnittpunkten zweier Geraden mit einer Transversalen.

Der erste Begriff aber, den wir hier zu erörtern haben, ist derjenige der „Komplementwinkel“. Man versteht darunter zwei Winkel, welche ohne jegliche Rücksicht auf ihre Lage genommen gleich dem Richtwinkel sind. Nur auf die Gröfse der Winkel kommt es an. Es ist merkwürdig, dafs wir für den Fall, dafs auch die Lage mit gemeinsamem Scheitel und Schenkel in Betracht kommt, hier keinen besondren Namen haben. Ich habe weiter oben schon auf den

[1]) Ich will übrigens nicht unerwähnt lassen, dafs noch weitere Betrachtungen möglich sind, aus denen z. B. Sätze gewonnen werden wie: „Die Halbierungslinien eines Nebenwinkelpaares bilden einen Richtwinkel.“ „Die Halbierungslinien eines Scheitelwinkelpaares bilden eine Gerade.“

vermutlichen Grund hingewiesen. Die besondre Lage am gemeinsamen Scheitel gilt aber hier nur als ein unwichtiger Spezialfall. Es wird sich empfehlen, bei der Erörterung der Winkelbeziehungen hierauf mit Nachdruck aufmerksam zu machen.

Als zweiter neuer Begriff ist derjenige der „Supplementwinkel“ zu erörtern. Winkel, deren Summe gleich einem Flachwinkel ist, führen diesen Namen. Nebenwinkel sind also eine besondre Art von Supplementwinkeln. Doch ist hier, ebenso wie bei den Komplementwinkeln, hervorzuheben, daſs die Zahl der Winkel ganz unwesentlich ist: es können so viele sein, wie sie wollen, wenn nur ihre Summe den Flachwinkel beträgt, so heiſsen sie Supplementwinkel, wie dort, wo ihre Summe gleich dem Richtwinkel ist, der Name Komplementwinkel üblich ist. Auch dieser Punkt ist als wesentlich besonders zu betonen, schon deshalb, weil wir gleich bei der Winkelsumme im Dreieck mehr als zwei Winkel als konstituierende Elemente des Flachwinkels haben. Überhaupt ist es auffallend, daſs zwar alle Lehrbücher die Erklärung des Begriffes Supplementwinkel bringen, im weiteren Verlauf der Darstellung aber gar keinen Gebrauch davon machen. Vielleicht ist der Grund hierfür darin zu suchen, daſs nicht genügend in Berücksichtigung gezogen wird, daſs es bei diesem Begriffe auf die Anzahl der Winkel gar nicht ankommt.

Die Einübung der beiden Begriffe, das wirkliche Verständnis für ihr Wesen wird auch hier am besten mit Hülfe des Transporteurs geschehen. Reichliche Übungen müssen den Schüler mit den beiden neuen Begriffen vertraut machen und die geschickte Wahl geeigneter Beispiele wird dem Lehrer besonders angelegen sein müssen.

Wir kommen nun zur Vergleichung zweier auseinander liegender Winkel hinsichtlich ihrer Gröſse. Zum erstenmal tritt die Forderung an uns heran, zwei Gebilde mit einander zu vergleichen, bei denen die Sache komplizierter liegt, wie bei der Vergleichung zweier Strecken. Das Hauptmoment aller Vergleichung tritt in den Vordergrund, nämlich die Voraussetzung resp. die Annahme, daſs wir ein Gebilde bewegen als Ganzes, so daſs es durch die Bewegung keinerlei Ver-

änderung als solches oder in seinen wesentlichen Bestandteilen erleidet. Die Annahme, daſs eine solche Veränderung überhaupt möglich ist, wenn wir bestimmte konstituierende Elemente des Gebildes als unveränderlich voraussetzen, scheint mir das eigentliche Wesen der Kongruenzlehre zu bilden. Nicht erst das Aufeinanderlegen, nein, diese Voraussetzung bildet das charakteristische Merkmal der sogenannten Kongruenz. Ich werde darauf noch später eingehend zurückkommen. Nehmen wir also an, daſs wir einen Winkel bewegen können, ohne daſs er dabei eine Veränderung seiner Gröſse erleidet, so ist es uns möglich, Winkel hinsichtlich ihrer Gröſse miteinander zu vergleichen, auch wenn sie uns nicht als benannte Zahlen, sondern zeichnerisch gegeben sind. Den Ausgangspunkt dieser Betrachtungen muſs der Fall geben, daſs uns Aussagen über die Gröſse der Winkel vorliegen. Hier sind nun wieder drei Fälle möglich:

$$1)\ \hat{A} > \hat{B}$$

$$2)\ \hat{A} = \hat{B}$$

$$3)\ \hat{A} < \hat{B}.$$

Diese Anordnung scheint mir, wie auch bei den Strecken, die richtige zu sein. Der zweite Fall muſs als ein ganz spezieller, als ein Grenzfall in gewissem Sinne, in den Rahmen der ganzen Anordnung sich einfügen. Auf keinen Fall dürfen wir von ihm ausgehen, wofür ich den Grund schon gelegentlich der Streckenvergleichung angeführt habe.

Bringen wir nun zwei Winkel mit Scheitelpunkten und einem Schenkelpaar zur Drehung, so wissen wir schon aus den Übungen beim Addieren und Subtrahieren zweier Winkel, daſs noch zwei Lagen möglich sind: nämlich so, daſs die Winkel nebeneinander und aufeinander liegen. Für unsere vorliegende Betrachtung kommt nur der letztere zur Berücksichtigung. Legen wir demgemäſs in der beschriebenen Weise den gröſseren Winkel auf den kleineren, so überragt er den kleineren um einen Winkel, oder wie wir uns auch ausdrücken können, der zweite Schenkel (die Benutzung der Worte „Anfangsschenkel“ und „Endschenkel“ würde vielleicht wegen der Analogie mit dem „Anfangspunkt“ und „Endpunkt“ einer

Strecke zu empfehlen sein) liegt aufserhalb des kleineren Winkels. Im zweiten Fall wird auch das zweite Schenkelpaar sich decken, im dritten liegt der Endschenkel des zweiten Winkels zwischen den Schenkeln des ersten. Von diesen drei Fällen ist natürlich der wichtigste der zweite, wo die beiden gleichen Winkel sich völlig decken, mit Scheiteln und Schenkeln aufeinander fallen.

Die folgerichtigen Umkehrungen führen uns dann weiter dazu, aus der Art des Aufeinanderliegens auf die Gröfsenbeziehungen der beiden Winkel Schlüsse ziehen zu können. Vor allen Dingen wichtig ist wiederum die Umkehrung des zweiten Falles, die uns lehrt, dafs Winkel, die sich in der angegebenen Weise decken, gleich sind.

Die hier angestellten Betrachtungen im Verein mit den analogen bei der Strecke (vgl. Kap. I, § 3) geben uns das nötige Material an die Hand, Figuren überhaupt durch Aufeinanderlegen miteinander zu vergleichen. So lange also, wie die Kongruenzsätze eine hervorragende Rolle in der Elementarplanimetrie spielen, werden die gewonnenen Resultate als eigentliche notwendige und ausreichende Hülfssätze — in Verbindung mit ihren Umkehrungen — für die Kongruenzlehre gelten dürfen.[1]) Dafs das eigentliche Wesen der Kongruenz, meiner Ansicht nach, darin liegt, dafs wir die Annahme machen, Figuren ohne Veränderung bewegen zu können, sobald wir gewisse konstituierende Elemente als unverändert annehmen, will ich auch an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich hervorheben. Eine genaue Untersuchung und Darstellung über diesen Punkt wird auch das Kapitel „Geometrische Hülfsbegriffe“, das ich mir für den nächsten Band vorbehalten mufs, bringen.

Doch läfst sich die vorliegende Untersuchung nicht ab-

---

[1]) Es ist von Wichtigkeit, gleich hier am Anfang auf die Bedeutung der Hülfssätze „Gleiche Strecken etc. . . . .“ und „Gleiche Winkel etc. . . . .“ aufmerksam zu machen und ihren wesentlichen Unterschied zu beleuchten. Ich will das hier nur kurz andeuten, indem ich darauf hinweise, das Zusammenfallen von Punkten ist die Folge von gleichen Strecken, das Zusammenfallen von Geraden hat seinen Grund in Gleichheit von Winkeln.

schliefsen, ohne dafs wir noch — vorgreifender Weise — die drei Begriffe Ähnlichkeit, Gleichheit, Kongruenz in Hinsicht auf Strecken und Winkel etwas näher betrachten.

So wenig die Strecken hinsichtlich ihrer Gestalt irgend ein unterscheidendes Merkmal darbieten — denn sie sind Teile der qualitativ eindeutigen Geraden —, so sehr kann man bei der Betrachtung der Winkel über diesen Punkt im Zweifel sein. Dem natürlichen anschaulichen Denken wird beispielsweise ein Spitzwinkel und der Richtwinkel oder Flachwinkel durchaus nicht gleichgestaltig erscheinen: und doch handelt es sich hier um etwas ganz anderes, als was wir sonst unter verschiedener Gestalt verstehen. Die Gestalt des Winkels ist nämlich allein abhängig von seiner Gröfse, nichts anderes mengt sich ein. Wenn wir daher von ähnlichen Winkeln sprechen wollten, so könnte darunter nichts anderes verstanden werden, als gleiche Winkel. Ähnlichkeit und Gleichheit sind hier identisch. Und da die Kongruenz zweier Gebilde von der Gestalt und der Gröfse abhängt, so ist ferner keine andere Auffassung möglich, als dafs ähnliche Winkel kongruent sind (unter Kongruenz die Möglichkeit des völligen Aufeinanderlegens zu verstehen). In der That tritt infolgedessen beim Winkel, ebenso wie bei der Strecke — wo dieselben Verhältnisse vorliegen — der Begriff der Ähnlichkeit völlig in den Hintergrund: und der Begriff der Gleichheit deckt sich vollständig mit dem der Kongruenz.

Bürklen äufsert sich zu dieser Frage in seiner öfters zitirten Schrift p. 5 so: „Die Gröfse ist freilich diejenige Seite am Winkel, auf die man am meisten zu sehen hat; aber so wenig die Gröfsenmessung die alleinige Aufgabe der Geometrie bedeutet, so wenig ist das Wesen eines Gebildes ausschliefslich an seine Gröfse gebunden.“ Hierzu mufs ich schon hier bemerken, dafs es in der Geometrie eben Gebilde giebt, bei denen dies doch zutrifft, nämlich Strecke und Winkel. Er fährt dann fort: „Auch wird bei den Definitionen andrer Gebilde, z. B. des Dreiecks, Dreikants, nirgends die Gröfse mit in die Definition gezogen, obwohl z. B. dem Dreikant ebenso eine Gröfse zukommt wie dem Winkel, deren Mafszahl sich ıch, und zwar völlig unabhängig vom sphärischen Dreieck,

gewinnen läſst (Mack, Die Lehre vom Dreikant 1868). Dies ist nicht zufällig oder willkürlich. Beim Dreieck oder Dreikant ist bei gleicher Gröſse eine verschiedene Gestalt möglich; die gleiche Gestalt des Dreiecks läſst noch die Fälle der Kongruenz und Ähnlichkeit auseinander halten, weil bei gleicher Gestalt noch verschiedener Inhalt möglich; beim Dreikant kann Kongruenz von Ähnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, weil bei gleicher Gestalt immer auch der Inhalt gleich; beim Winkel ist bei gleicher Gröſse keine verschiedene Gestalt möglich und es kann Kongruenz von Ähnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, es ist bei gleicher Gestalt immer auch gleiche Gröſse vorhanden."

„Gröſse und Gestalt bedingen sich also, mit Ausnahme des Winkels, nicht gegenseitig und eindeutig."

Die vorliegenden Beobachtungen mögen genügen, um auf die Sonderstellung des Winkels (Strecke) hinsichtlich der Begriffe Ähnlichkeit, Gleichheit, Kongruenz aufmerksam gemacht zu haben. Im Unterricht darf es jedenfalls nicht versäumt werden, derartige Betrachtungen anzustellen, wenn auch auf dieser Stufe nicht der mathematische Begriff der Ähnlichkeit, sondern nur der des gewöhnlichen Lebens zur Grundlage genommen werden kann.

Auch an diesen Abschnitt Übungen mit dem Transporteur anzuschliessen, möchte ich als vorteilhaft empfehlen, ebenso wie bei der Addition und Subtraktion von Winkeln.

Bis hierher nahmen unsere Betrachtungen zweier Winkel an verschiedenen Scheiteln nur Bezug auf die Gröſse. Ich gehe nun über zu demjenigen Teil dieses Abschnittes, der auch die Lage zum Gegenstand der Erörterung macht. Den Ausgangspunkt und die Grundlage für diese Betrachtungen bildet das durch drei Gerade dargestellte Gebilde, an dem wir vorläufig nur die zwei Schnittpunkte, die eine der Geraden mit den beiden andern bildet, in Erwägung ziehen.

Betrachten wir das Gebilde, so bieten sich acht Winkel zur Untersuchung dar, an jedem Scheitel vier. Wie wir die an einem Scheitel liegenden Winkel paarweise zusammenfassen, ist schon erörtert, doch gilt es noch eins nachzutragen, nämlich die Erörterung, wie viele Nebenwinkelpaare an einem

Scheitel liegen und ebenso wie viele Paare Scheitelwinkel. Es ist diese Untersuchung wegen der folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit. Es leuchtet nun ohne weiteres ein, dafs vier Nebenwinkelpaare und zwei Scheitelwinkelpaare an jedem Scheitel unterschieden werden können. Das sind die Beziehungen zwischen den Winkeln an einem Scheitelpunkt. Gehen wir nun über zu der Betrachtung der Winkelpaare, die an verschiedenen Scheiteln liegen, so kann jeder Winkel des einen Scheitels mit jedem Winkel des andern kombiniert werden; so ergeben sich 16 Winkelpaare. Als Typus genügt es, einen Winkel des einen Scheitels mit den vier Winkeln des andern Scheitels zu kombinieren. Als charakterisierendes Merkmal bestimmen wir die Lage gegen die Geraden, die wir der bequemeren Darstellung halber so unterscheiden wollen, dafs wir zwei der drei Geraden als geschnittene ansehen, die dritte als die Schneidende (Transversale). Die erste Klasse von Winkelpaaren umfafst dann diejenigen, welche an den verschiedenen Scheiteln gleiche Lage haben sowohl gegen die Geschnittnen, wie gegen die Schneidenden. Ich schlage dafür vor, den Namen gleichliegende Winkel zu gebrauchen, da uns so der Name gleich den wahren Zusammenhang zwischen den Elementen des Winkelpaares lehrt. Die zweite und dritte Klasse der Winkelpaare werden gebildet von Winkelpaaren, deren Elemente in Bezug auf die eine Art der Geraden gleich liegen, in Bezug auf die andre ungleich. Also gleich gegen die Schneidende, aber ungleich gegen die Geschnittenen, oder ungleich gegen die Schneidende, aber gleich gegen die Geschnittenen. Diese Winkelpaare dürften passend den Namen halbgleichliegende erhalten. Die vierte Klasse wird dann gebildet von den Winkelpaaren, deren Elemente sowohl gegen die Schneidende, wie gegen die Geschnittenen ungleich liegen und daher Ungleichliegende genannt werden mögen. Bisher hatte sich eine sichere Bezeichnung dieser Winkelpaare eigentlich nur für die letzte Klasse ausgebildet, sie hiefsen allgemein Wechselwinkel. Bei den andern aber variierte die Bezeichnung gar mannigfaltig, ja für die dritte Klasse war ein besonderer Name gar nicht eingeführt, sie wurde überhaupt t durchgängig mit Stillschweigen übergangen. Ich werde

weiter unten auf verschiedene hierhergehörige Arbeiten in Hoffmanns Zeitschrift zurückkommen. Zu jeder der vier Klassen gehören vier Winkelpaare, da wir jeden Winkel mit den vier Winkeln am andern Scheitel kombinieren können, wie ich schon oben bemerkte. Wir haben also 16 Winkelpaare, die nun in folgendem Zusammenhang stehen. Nehmen wir von irgend einem Paar eine gewisse Voraussetzung an, so resultieren für die übrigen 15 auch ganz bestimmte Beziehungen.

Setzen wir z. B. voraus, dafs die Elemente eines gleichliegenden Winkelpaares gleich sind, so folgt, dafs dies für alle gleichliegenden gilt, ebenso für die ungleichliegenden, während die Elemente der halbgleichliegenden Winkelpaare Supplementwinkel sind. Dieser letztere Umstand hatte dazu geführt, der zweiten Klasse den Namen „Ergänzungswinkel" zu geben, was ich deshalb nicht für richtig halte, da dieser Name von einer aus einer bestimmten Voraussetzung resultierenden Eigenschaft hergenommen ist; ferner bildet die Rücksicht auf die Gröfse den Grund der Benennung, während doch das eigentlich Wesentliche die Lage ist. Der gröfseren Deutlichkeit halber will ich die Beziehungen zwischen den Winkelpaaren noch in einem ausführlicheren Schema darstellen.

Dies dürfte folgende Form haben:

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten und es sind:

1) zwei gleichliegende gleich,
   so sind a) je zwei gleichliegende gleich[1]),
   b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
   c) je zwei ungleich liegende gleich;
2) zwei halbgleichliegende supplementär,
   so sind a) je zwei gleichliegende gleich,
   b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
   c) je zwei ungleichliegende gleich;
3) zwei ungleichliegende gleich,
   so sind a) je zwei gleichliegende gleich,
   b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
   c) je zwei ungleichliegende gleich.

[1]) Die gewöhnliche Form dieses Satzes, „so sind alle gleichliegenden Winkel gleich" scheint mir entschieden falsch zu sein.

Die Beweise für diese Sätze beruhen auf den Sätzen über Nebenwinkel und Scheitelwinkel, sowie auf den beiden oben gefundenen Sätzen „Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel“ und „Gleiche Winkel haben gleiche Scheitelwinkel“, wozu weiter der Grundsatz kommt „Sind zwei Gröfsen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.“[1]) Ein näheres Eingehen auf die Beweise kann ich mir ersparen, nur das mufs erwähnt werden, dafs man darüber im Zweifel sein kann, ob man alle Sätze auf die eine Voraussetzung zurückführt, oder ob man die schon gewonnenen Resultate benutzt und auf ihnen weiter baut. Hat man Zeit, so ist das erstere Verfahren als das gründlichere vorzuziehen, weil es zugleich reichliche Gelegenheit giebt, das von den Neben- und Scheitelwinkeln Gelernte anzuwenden und im Gedächtnis zu befestigen. Immerhin ist aber nicht zu verkennen, dafs die Beweise dadurch weitläufiger werden. Es mufs auch auf der andern Seite zugestanden werden, dafs weder wissenschaftlich noch methodisch irgend ein Bedenken vorliegt, gewonnene Resultate zum Ausgangspunkt für die Auffindung neuer Wahrheiten zu machen. Vielleicht wird es sich empfehlen, mit den beiden Verfahren beim ersten Durchnehmen und bei der Wiederholung abzuwechseln. Wie man aber auch vorgeht, jedenfalls ist daran festzuhalten, dafs man die Beziehungen zwischen den Winkelpaaren durch besonders reichliche Übungen zu vollkommner Klarheit bringen mufs und dafür zu sorgen hat, dafs die Schüler die Wahrheiten und ihre Beweise völlig zu ihrem geistigen Eigentume machen. Auch hier dürften sich wieder Übungen mit dem Transporteur anschliefsen. Hat man nicht schon früher darauf hingewiesen, so mufs jedenfalls jetzt die wichtige Wahrheit gelehrt werden, dafs diese praktischen Übungen nicht etwa eine Kontrolle für die Richtigkeit der Sätze abgeben sollen, sondern dafs umgekehrt unsere Beobachtungen am Transporteur durch die als wahr erkannten Sätze kontrolliert werden. So lernt der Schüler auch, Wert

---

[1]) Die Beweise sind natürlich auch in arithmetischer Form einzuüben. Hierbei ist ganz besonders auf eine korrekte Darstellung zu ·lten. — Man vergl. A. Sickenberger, Mathematische Orthographie. H. Z. IV. p. 379—391.

auf genaue Beobachtung zu legen, und lernt ferner, dafs alle unsere Beobachtungen (sinnlichen Wahrnehmungen) von vielen Zufälligkeiten abhängen, wie z. B. unzureichenden Instrumenten, schlechter Zeichnung etc. Dem gegenüber lernt er dann den Wert einer absolut sicheren Erkenntnis und wahrer wissenschaftlicher Strenge erkennen und schätzen.

Es ist ferner darauf aufmerksam zu machen, dafs wenn eine der 16 Bedingungen eintritt, überhaupt nur zwei verschiedene Arten von Winkeln hinsichtlich der Gröfse vorkommen, und zwar allgemein vier untereinander gleiche Spitzwinkel und vier untereinander gleiche Stumpfwinkel. Wird einer der Winkel — immer unter der angenommenen Voraussetzung — ein Richtwinkel, so sind alle acht Richtwinkel. Auch dieser besondre Fall verdient besonders erwähnt zu werden. Natürlich müssen die Schüler diesen Satz selbst finden, der Lehrer mufs sie nur darauf führen durch die Frage, wie es wird, wenn ein Winkel ein Richtwinkel ist.

Es müfste sich nun der Satz anschliefsen: „Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten und es tritt eine der 16 Bedingungen ein, so bestehen die 16 Gleichungen für jede beliebige Transversale.“

Dafs dieser Satz richtig ist, ist anschaulich evident; ein strenger Beweis ist aber erst nach Absolvierung des folgenden Paragraphen möglich. Man möge also einstweilen auf diesen Satz hinweisen, indem man auch hier wieder die Schüler ihn finden läfst durch die Frage, wie steht es bei einer beliebigen andern Transversale; mufs aber bemerken, dafs man später noch einmal darauf zurückkommen werde, um ihn streng zu beweisen.

Schon in der Disposition hatte ich darauf hingewiesen, dafs die gleichliegenden Winkel als identische an zwei Scheiteln aufgefafst werden können, halbgleichliegende als Nebenwinkel an zwei Scheiteln, ungleichliegende als Scheitelwinkel an zwei Scheiteln. Aus unsern Betrachtungen geht hervor, dafs diese Auffassung natürlich nur dann gültig ist, wenn eine der 16 Gleichungen zur Voraussetzung gemacht wird.[1])

---

[1]) Man vergl. das Zitat aus Petersen, p. 314.

Ist man so weit vorgeschritten, so ist es nun an der Zeit, auf den Zusammenhang der Untersuchungen mit dem Parallelismus einzugehen. Es ist zunächst zu zeigen, dafs die beiden Geschnittnen im betrachteten Falle parallel sind und dann als Umkehrung zu lehren, dafs also bei Parallelen die 16 Gleichungen gelten: oder man zeigt zunächst, dafs bei Parallelen die 16 Gleichungen gelten und dafs folglich umgekehrt die von uns betrachteten Geraden parallel sind. Im letzteren Falle denkt man sich z. B. zwei Abstände gezeichnet, die nach unsrer Definition gleich sind. Verbindet man dann zwei gegenüberliegende Ecken (zieht eine Diagonale), so läfst sich die Gleichheit der ungleichliegenden Winkel leicht mit Hülfe der beiden kongruenten Dreiecke zeigen — wobei man allerdings den (vierten) Kongruenzsatz als richtig vorläufig annehmen mufs. Ich fürchte, dafs man gegen dieses Verfahren Einwendungen machen wird, doch glaube ich, dafs wirklich ernstliche Bedenken kaum berechtigt sein dürften, da die Lehre von der Kongruenz sich ja unmittelbar anschliefst und man dann Gelegenheit hat, auf diesen Punkt zurückzukommen. Noch einfacher gestaltet sich die Darstellung, wenn man die Symmetrie zu Hülfe nimmt.

Sind die Beziehungen der Winkelpaare an zwei Schnittpunkten gehörig durchgenommen und durch reichliche Übungen eingeprägt, so wird die Behandlung des Zusammenhangs mit den Parallelen keine besonderen Schwierigkeiten bieten. Es wird sich Gelegenheit finden, bei der Besprechung einschlägiger Arbeiten hierauf noch näher einzugehen. Wir betrachten nun den Fall, dafs keine der 16 Gleichungen statthat und kommen damit zu

§ 3. Drei (und mehr) Winkel.

Hiermit sind wir zu dem berühmten 11. Axiom gelangt. Ich halte es im Schulunterricht für ganz unbedenklich, dieses Axiom als anschaulich evident darzustellen.[1]) Kein Schüler wird daran zweifeln, dafs die Geraden, die von einer dritten

[1]) Man vergleiche noch zu diesem Punkte Hoffmann, die Prinzipien des I. Buches von Euklids Elementen; H. Z. III, p. 136 ff.

geschnitten werden, sich auf der einen Seite selbst schneiden, nämlich da, wo die Summe zweier inneren halbgleichliegenden — und zwar solcher, die auf einer Seite der Transversalen liegen — kleiner als ein Flachwinkel ist. Damit sind wir dann zu drei Schnittpunkten gekommen, die Figur des Dreiecks bietet sich uns dar und es gilt nun, diese Figur auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Entsprechend dem Gange, den unsere Untersuchungen bis hierher genommen haben, handelt es sich natürlich nur um die Winkelbeziehungen beim Dreieck. Trotzdem sind hier die Bezeichnungen für die Stücke des Dreiecks anzugeben. Die Ecken werden mit grofsen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die entsprechendeu Winkel mit den entsprechenden grofsen lateinischen Buchstaben mit einem Dächelchen, die Seiten mit kleinen lateinischen Buchstaben und zwar so, dafs eine Seite den gleichen Buchstaben hat, wie die gegenüberliegende Ecke.[1]) Auch pflege ich daran festzuhalten, dafs die Bezeichnung der Figuren so eingerichtet wird, dafs die Fläche der Figur zur linken Hand liegt, wenn man in alphabetischer Reihenfolge von Ecke zu Ecke sich bewegt. Den Aufsenwinkel von $\hat{A}$ pflege ich mit $\hat{A}_1$ bezeichnen zu lassen, führe überhaupt von Anfang an eine konsequente Anwendung der Buchstaben durch, wie sie sich in der analytischen Geometrie als so sehr vorteilhaft erwiesen hat. Den Beweis für die Winkelsumme des Dreiecks nehme ich nach Thibaut durch, ein Beweis, der dem jugendlichen Geist ganz besonders einleuchtend erscheint. Doch gehe ich, wenn irgend möglich, gern noch weiter und dehne diesen Beweis auf jedes mögliche Vieleck aus. Die Thatsache, dafs die Summe der Aufsenwinkel bei den ebenen Figuren ganz unabhängig ist von der Anzahl der Ecken, dafs sie überhaupt einen konstanten Wert hat, ist leicht begreiflich und giebt den Schülern ein leichtes Mittel an die Hand, die Winkel-

---

[1]) Die Bezeichnung der Punkte mit grofsen lateinischen Buchstaben, der Strecken mit kleinen lateinischen, der Winkel mit kleinen griechischen rührt von Euler her, wie Kober in seiner Besprechung des Ziegler'schen Lehrbuches in H. Z. Bd. I bemerkt. — Man vergl. Wiečorek-Wiečorekewič, Zur mathematischen Orthographie in H. Z. IV, p. 429.

summe jedes beliebigen Vielecks zu bestimmen. So viel Flachwinkel, als die Figur Ecken hat, weniger der konstanten Summe der Aufsenwinkel = zwei Flachwinkel, dies scheint mir der einfachste und leichteste Weg, die Winkelsumme der Vielecke zu lehren. Nimmt man das Axiom, das dem Thibaut'schen Beweis zugrunde liegt, einmal als wahr an, so ist seine Gültigkeit von der Anzahl der Ecken ganz unabhängig und die Verallgemeinerung des Thibaut'schen Beweises auf alle Vielecke völlig zuläfsig. Merkwürdigerweise ist diese Verallgemeinerung weder von Thibaut, noch — soweit meine Kenntnisse reichen — von irgend einer andern Seite bisher vorgeschlagen.[1]) Es ist übrigens zu empfehlen, daneben auch den üblichen Euklidischen Beweis zu geben. Aber auch hier möchte ich für eine kleine Änderung eintreten. Meiner Meinung nach ist nämlich der einzig richtige Ausgangspunkt der vom Aufsenwinkel. Erst wird mit Hülfe einer parallelen Hülfslinie bewiesen, dafs der Aufsenwinkel gleich der Summe der von ihm getrennt liegenden[2]) Innenwinkel ist, daran schliefst sich dann als Folgesatz die Lehre von der Summe der Winkel im Dreieck an. Schlägt man nämlich den gewöhnlichen Weg ein, so stehen diese beiden so eng zusammenhängenden Sätze ganz unvermittelt nebeneinander, was doch gewifs nicht zur klaren Auffassung der vorliegenden Verhältnisse beiträgt.

---

[1]) Man vergl. J. H. T. Müller, Über die Summe der Winkel in ebenen geradlinigen Vielecken. — Gr. Arch. II, p. 106. Heinen, Über die Summe der Winkel im Vielecke. — Gr. Arch. 29, p. 474.

[2]) Dies ist die einzig zulässige Bezeichnung statt der üblichen „gleich der Summe der gegenüberliegenden"; von einem Gegenüberliegen ist gar keine Rede. Im Viereck giebt es gegenüberliegende Winkel, aber dieses Beispiel zeigt uns auch zugleich recht deutlich, wie unpassend diese Bezeichnung für die Lage eines Aufsenwinkels und den von ihm getrennt liegenden Innenwinkel beim Dreieck ist. Man vergl. Meutzner, Zum Kapitel Inkorrektheiten, in H. Z. 13, p. 25: „In vielen Lehrbüchern der Geometrie kommt folgender Satz vor: „Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel". Dieser Satz findet sich unzählige Male in dieser Fassung auch sonst. Ist es aber gerechtfertigt, aus Furcht vor einem negativen Begriffe („der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel") etwas entschieden Sinnloses zu sagen?"

Nicht unerwähnt darf natürlich bleiben, dafs an jeder Ecke zwei Aufsenwinkel gezeichnet werden können, die aber als Scheitelwinkel einander gleich sind, so dafs bei Gröfsenbetrachtungen nur einer von ihnen berücksichtigt zu werden braucht. Sehr empfehlenswert ist, sich bei diesen Untersuchungen eines beweglichen Drahtmodelles zu bedienen, so dafs man die Veränderungen der Winkel ad oculos demonstrieren kann. Es ist sogar möglich, auf diese Weise eine Art von Beweis für die Winkelsumme des Dreiecks vorzuführen. Läfst man nämlich zwei Winkel immer kleiner werden, so wird dabei der dritte Winkel stetig gröfser und er wird in dem Augenblick ein Flachwinkel, wo die beiden andern Nullwinkel werden.

So weit möchte ich jetzt die Betrachtungen ausdehnen[1]) und wende mich nun zunächst wieder zu den Aufsätzen in H. Z., die mit dem Thema des vorliegenden Kapitels in loserem oder engerem Zusammenhang stehen. Gleich Bd. I (p. 272) enthält in dem Aufsatze Sturm's „Über einige Inkorrektheiten, die sich in der Sprache, besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben“, eine Arbeit, die nicht nur wegen ihrer allgemeinen Bedeutung Beachtung verdient, sondern auch gerade einige hierher gehörige Fragen erörtert. Nur erwähnen will ich die Verurteilung des unbestimmten Artikels bei eindeutig bestimmten Gebilden, es mufs korrekt heifsen z. B.: „Durch einen Punkt die Parallele ziehen.“[2]) Sturm selbst sagt p. 273: „Der unbestimmte Artikel wird natürlich im systematischen Gange bei solchen Aufgaben bleiben müssen, von denen noch nicht erkannt worden ist, dafs nur ein einziges Gebilde existiert, welche also erst selber diese Erkenntnis bewirken sollen, aber auch bei solchen Aufgaben, bei

---

[1]) Doch mache ich darauf aufmerksam, dafs sich analoge Betrachtungen für Vieleckswinkel (reguläre Polygone) und die Winkel im und am Kreis leicht und natürlich ausschliefsen lassen und man auf diese Weise dann noch einen weit tiefern Schritt in das planimetrische Gebiet hineinthun kann, ohne irgendwie Fremdartiges in die Untersuchung mischen zu müssen.

[2]) Man vergl. H. Z. 17, p. 433—435. — 18, p. 113—118. — 19, p. 576—582.

denen der Lage nach unendlich viele, wenn auch untereinander kongruente Lösungen möglich sind, und bei denen man auch zu sagen pflegt, es gebe nur eine Lösung. Es tritt hier zu der Notwendigkeit, dafs doch logisch richtig gesprochen werden mufs, noch der wichtige Umstand, dafs, wenn der richtige Ausdruck vom Lehrer und Lehrbuch angewandt und vom Schüler gefordert wird, derselbe sich immer wieder der Erkenntnis, dafs es in den betr. Fällen nur ein Gebilde giebt, bewufst wird, ein Umstand, der doch gewifs nicht ohne Wert ist.“ Neben einer Reihe weiterer Inkorrektheiten aus der Winkellehre z. B. $\hat{A} = \hat{B}$ als Scheitelwinkel; $\hat{A} + \hat{B} = 2R$ als Nebenwinkel[1]), kommt Sturm auf die Benennungen der Winkel bei einer Transversalen durch zwei Parallelen. Er sagt p. 277:

„Die Parallelitätssätze erinnern mich an eine Konfusion der Benennungen, deren baldige Abschaffung von uns Mathematikern auch nun einmal ins Auge gefafst werden und vielleicht nicht zu schwer ins Werk zu setzen sein möchte: Die Winkel, welche von zwei Geraden derselben Ebene mit einer sie schneidenden (Geraden) gebildet werden, haben in den verschiedensten Gegenden Deutschlands die verschiedensten Benennungen.“

Sturm ist für die Namen „entsprechende Winkel“, „Wechselwinkel“, „entgegengesetzte Winkel“, findet aber sofort einen Gegner in dem Herausgeber der H. Z., der sich für die Snell'sche Bezeichnung ausspricht. Da wir selbst positive Vorschläge in Bezug auf die Benennung der Winkelpaare gemacht haben, so können wir auf die betreffende Stelle verweisen.

J. C. Becker bemerkt in Bd. II der H. Z. zu demselben Thema (p. 91): „Was speziell die Benennung der Winkelpaare betrifft, welche zwei Geraden einer Ebene mit einer dritten bilden, so möchte ich die sehr verbreitete Bezeichnungsweise empfehlen, wonach jeder einzelne dieser Winkel als innerer oder äufserer bezeichnet wird, je nachdem er zwischen den geschnittenen Geraden liegt, oder nicht, und jedes Paar als

[1]) Man vergl. Sturm, Zum Kapitel der Inkorrektheiten; H. Z. III. p. 20.

Gegen- oder Wechselwinkelpaar, je nachdem beide Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, oder der eine links, der andere rechts von derselben. Man hat danach innere, äufsere und gemischte Gegen- oder Wechselwinkel zu unterscheiden. Weil aber die gemischten Gegenwinkel besser als korrespondierende oder entsprechende (auch gleichliegende) bezeichnet werden und von gemischten Wechselwinkeln nie die Rede ist, so dürften schliefslich die drei Namen, entsprechende Winkel, Gegenwinkel und Wechselwinkel, vollkommen ausreichen."

Eine weitere Meinungsäufserung über diesen Punkt findet sich in H. Z. III p. 190 in dem Aufsatze Zieglers, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. Ziegler sagt:

„Die Lage der vier Winkel, welche einen gemeinsamen Scheitel haben, läfst sich durch die Gegensätze oben — unten, rechts — links unterscheiden. Nimmt man je zwei Winkel, welche verschiedene Scheitel haben, so erhält man vier Paare mit zweifach übereinstimmender Lage, vier Paare mit zweifach entgegengesetzter Lage und zweimal vier Paare mit halb übereinstimmender Lage. Diese Winkelpaare heifsen am besten gleichliegende, ungleichliegende und halbgleichliegende Winkel, sie verhalten sich beziehungsweise wie kongruente Winkel, Scheitel- und Nebenwinkel. Die Unterscheidung von zweierlei Paaren halbgleichliegender Winkel ist unnötig, sowie der Gebrauch besondrer Kunstwörter. Auf den Gegensatz Innen — Aufsen, welchen Snell zur Unterscheidung benutzt, kommt es gar nicht an, er gebraucht gerade für die gleichliegenden Winkel den schon anderswo nötigen Ausdruck Gegenwinkel. Jeder Lehrer kann die Probe machen, ob die Schüler zu den angegebenen Benennungen die Winkelpaare auffinden."[1])

[1]) Man sieht, Ziegler kommt genau zu denselben Resultaten wie ich. Dieselben Benennungen, die ich vorschlage, hat er schon 1872 vorgeschlagen, ohne Erfolg; aber es ist leicht möglich, dafs der betr. Aufsatz der Aufmerksamkeit der Fachgenossen entgangen ist. Hier möchte ich, was auch in Ziegler's letztem Satze liegt, noch einmal auf den Vorteil der vorgeschlagenen Benennungen hinweisen, der darin liegt, dafs der Name schon auf das Wesen der betrachteten Winkelpaare hindeutet, ein Vorteil, der gewifs doch nicht zu unterschätzen ist.

Unmittelbar mit Ziegler's Aufsatz hängt eine Notiz von J. Kober zusammen in H. Z. V. p. 55: „Die Benennung der Winkel in der Parallelentheorie ist noch ziemlich verschieden. Wechselwinkel[1]) ist so ziemlich allgemein im Gebrauch und dürfte wohl auch keinen Anstofs erregen. Aber Gegenwinkel hat den grofsen Fehler, dafs man dies Wort, analog der Gegenseite, für gegenüberliegende Winkel anwenden möchte, sodafs also Gegenseite und Gegenwinkel einander entsprechen würden.

Der Name „konjugierte Winkel" ist, wie mancher andere vorgeschlagene, zu lang, auch wohl nicht recht anschaulich begründet, die Benennung „innere Winkel" pafst auch für die inneren Wechselwinkel.

Eher möchte ich mich mit Ziegler's Vorschlag einverstanden erklären, nämlich gleichliegende (korrespondierende), ungleichliegende (innere Wechselwinkel) und halbgleichliegende (innere Gegenwinkel und gemischte Wechselwinkel); aber ohne Bedenken ist dieser Vorschlag auch nicht.

Ich glaube fast, es ist nur durch Bildung eines ganz neuen kurzen Wortes zu helfen und erlaube mir, den Kollegen die Frage vorzulegen, ob ein solches, etwa das Wort „Anwinkel"[2]) Zustimmung finden würde."

Die Redaktion bemerkt zu diesem Vorschlag, dafs dieser Ausdruck bereits in Österreich längst gebräuchlich sei und führt zwei Lehrbücher (Gernerth, Moçnik) als Beispiele an. Der Herr Herausgeber fühlt sich auch veranlafst, in demselben Bande V seiner Zeitschrift noch einmal auf die vorliegende Frage zurückzukommen. Der kurze Aufsatz ist überschrieben: „Noch einmal der Anwinkel und die noch immer bestehende Konfusion der Winkelnamen in der Parallelentheorie." Hoffmann macht darin seine — wie mir scheint, völlig gerechtfertigten — Bedenken gegen diese Benennung geltend

---

[1]) Mein Mathematiklehrer, der originelle, an der Nikolaischule zu Leipzig weiland wirkende Lehmann, pflegte für diesen Winkel den Namen „Z-winkel" zu gebrauchen wegen der Ähnlichkeit der inneren Wechselwinkelfigur mit einem gedruckten lateinischen Z.

[2]) Scherling empfiehlt diesen Ausdruck in seiner Besprechung des Kober'schen Leitfadens. H. Z. V. p. 447. — Vergl. auch ebenda p. 450.

und empfiehlt wiederholt — unter alleiniger Ersetzung der „Gegenwinkel" durch „korrespondierende Winkel" — die Snell'sche Terminologie. Die Benennung nach der Lage der Winkel gegen Transversale und geschnittene Gerade wird dann systematisch vorgeführt. Der Aufsatz schliefst mit den Worten: „Wir empfehlen also aufs Neue die Annahme der modifizierten Snell-Schlömilch'schen Bezeichnung, nicht allein weil sie logisch und naturgemäfs ist, sondern auch, weil sie, wie wir aus Erfahrung wissen, von den Schülern leicht behalten wird."

Ich selbst habe dann in Bd. 22 der H. Z. p. 521 in der Rezension des Müller-Zwerger'schen Lehrbuches schon meine auch im vorliegenden Werke ausgesprochene Meinung über die Benennung der fraglichen Winkelpaare und meine Beweggründe dafür ausgesprochen.

Beiläufig möchte ich den Leser noch darauf aufmerksam machen, was ihm vielleicht beim Studium der jetzt vorliegenden vier Kapitel schon selbst aufgefallen ist, dafs die Behandlung der grundlegenden Fragen der Geometrie in den Anfangsjahren der Hoffmann'schen Zeitschrift eine sehr lebhafte war, dafs aber später das Interesse an diesen Prinzipien fast völlig eingeschlafen zu sein scheint, obwohl im Wesentlichen nirgends eine Einigung über die streitigen Punkte erzielt worden ist. Zur Klärung dieser gewifs nicht haltbaren Zustände würde es sich vielleicht empfehlen, den Vorschlag E. Müller's in ernste Erwägung zu ziehen, den er in „Mahnung an die Mathematiker" in H. Z. 6, p. 261—278 macht, eine gemeinschaftliche Revision der Elementarmathematik vorzunehmen. Andere speziell die hier angeregte Frage erörternde Artikel finden sich H. Z. 6, p. 457—458 und 7, p. 45—49.

Schliefslich ist dann noch der Vortrag zu erwähnen, den Prof. Sauer in der math.-naturwiss. Sektion der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wien dieses Jahr gehalten hat, über den das jetzt erschienene Doppelheft der H. Z. berichtet. Es heifst dort p. 529: „Immer noch herrscht Verschiedenheit in betreff der Winkelbenennung, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden. Am glücklichsten gewählt ist der Name Wechselwinkel und über

seine Anwendung sind wohl alle Lehrer einig. Dagegen brauchen einige den Ausdruck Gegenwinkel, wo andre von entgegengesetzten Winkeln sprechen. Besonders aber für zwei Winkel, welche an derselben Seite der schneidenden Linie und an derselben Seite der geschnittenen Linien liegen, gehen die Bezeichnungen sehr auseinander. Ich erwähne die Namen: Korrespondierende Winkel, konjugierte Winkel, innere Winkel, gleichliegende Winkel, Gegenwinkel, endlich das neu gebildete Wort Anwinkel. Die ersten dieser Benennungen sind teils zu lang, teils Fremdwörter und passen deshalb nicht für den ersten Unterricht; Gegenwinkel[1]) paſst besser für die anderweitig entgegengesetzt genannten Winkel. Ich stimme deshalb Kober bei, der meint, es müſste für diesen Begriff ein neues Wort gebildet werden; nur kann mir die Zusammensetzung des Substantivs Winkel mit der Präposition „an" nicht gefallen. Ich möchte einen andern Vorschlag wagen, den ich allerdings im Unterrichte noch nicht erprobt habe. Der Teil der Werke des Aristoteles, der auf seine Physik folgt, heiſst Metaphysik, obgleich nichts von Physik darin steht.[2]) Wäre es nicht angebracht, auch von einem ganz ähnlichen Kennzeichen ausgehend, den Winkel Seitenwinkel zu nennen, weil in der Erklärung sowohl bei den geschnittenen Linien als bei den Schneidenden gleiche Seiten genannt werden. Man hätte somit die gleichmäſsige Reihe: Seitenwinkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel."[3])

Von den Abhandlungen in Grunerts Archiv gehört hierher Matzka, Über geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie. Bd. 8, p. 365—374.

---

[1]) Den leidigen Namen „Gegenwinkel" sollte man ein- für allemal fallen lassen. Er trägt Hauptschuld an der Verwirrung, und so lange er nicht ganz beseitigt ist, wird er weitere Verwirrung verursachen.

[2]) Der logische Zusammenhang ist uns hier nicht klar geworden. Vielleicht ist im Druck etwas versehen, da gerade das eigentliche Gegenteil des nach diesem Satze zu erwartenden folgt.

[3]) Der Referent — Prof. Haas-Wien — bemerkt hierzu schon in einer [illegible], daſs diese Einteilung lückenhaft ist und daſs es vier Arten [illegible]kelpaaren giebt.

Man habe, wie den Kreis für die einfachste krummlinige Figur, das Dreieck für das einfachste geradlinige Raumgebilde gehalten. Statt dessen seien zu setzen:

„1) Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte aufser ihr, und

2) Das System zweier paralleler ganzer Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.“

Verfasser begründet sodann seine Ansicht, dafs diese Raumgebilde einfacher seien, durch den Hinweis auf die Anzahl der Elemente, führt das erstere System auf das zweite zurück. Dieses also legt er seinen Betrachtungen zugrunde gemäfs des von ihm aufgestellten Einteilungsprinzips.

Im zweiten Abschnitt, der von den folgenden Abschnitten für uns allein in Betracht kommt, stellt er die „Grundlinien der Lehre von den Parallelenpaaren“ auf.

1) (§ 7) Erklärungen. Parallelenpaar; Geleise; Streifen; Zwischenlinie (Zwischenstrecke) ist jede von einem Punkte der einen Parallelen zu einem Punkte der andren gehende Strecke.

2) (§ 8) Auf die Parallelentheorie gestützte einfache Sätze. Jede Zwischenlinie ist gegen beide Parallellinien gleich geneigt (Neigungswinkel).

Bes. Anwendung auf die Senkrechte. Eine solche heifse Querlinie.

Alle Querlinien eines Parallelenpaares sind einander gleich.

Daher Querlinie = Höhe (Breite) des Streifens.

3) (§ 9) Kongruenz der Parallelenpaare oder Streifen. Parallelenpaare mit gleicher Querlinie sind kongruent.

4) (§ 10) Ableitung des Satzes, dafs gleichmäfsige Zwischenlinien gleich sind.

Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Zum gröfseren Neigungswinkel gehört eine kürzere Zwischenlinie.

Es folgen dann die Umkehrungen.

5) (§ 11) bringt dann Anwendungen bei der „Vergleichung von zwei Paar Zwischenlinien in zwei Parallelenpaaren“,

woran sich „die Proportionalität der Zwischenlinien in Parallelenpaaren“ anschliefst.

Uns scheint dieser Versuch sehr beachtenswert, er läfst sich übrigens auch bei der von uns vorgeschlagenen Behandlung der ersten Lehren der Planimetrie mit gutem Erfolg verwerten. Dafs er in den Lehrbüchern gar keine Beachtung gefunden hat, erregt mit Recht Verwunderung. Wir möchten hier nochmals mit Nachdruck auf diesen Artikel hinweisen.

Wir sehen, dafs die Literatur zu allen Fragen in Grunerts Archiv eine verschwindende gegen die Hoffmannsche Zeitschrift ist. Im weiteren Fortgang unseres Werkes wird sich dieses Verhältnis zum teil sehr ändern, worauf ich schon an dieser Stelle hingewiesen haben möchte.

Es erübrigt nun noch einen Artikel aus den „Lehrproben und Lehrgängen“ mitzuteilen, dann werden wir einige Programmabhandlungen und einige wenige Lehrbücher in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen haben, da die Behandlung der Parallelenlehre im allgemeinen im dritten Kapitel bei den Zitaten angedeutet worden ist, dann aber auch die Verschiedenheiten in der Einzeldarstellung nicht von wesentlicher Bedeutung sind.

Im 10. Heft (Febr. 1887) der „Lehrproben und Lehrgänge“ findet sich ein Aufsatz von Lackemann „Die Sätze von den Parallelen. (Ein Beitrag zur Methodik des Elementar-Unterrichtes in der Planimetrie.)“

Nach einer kurzen methodischen Einleitung heifst es p. 57:

„Eingeleitet werden die Betrachtungen durch die Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte.“ (Winkel.) Besondere Wichtigkeit der Halbdrehung für die Deckung gleicher Strecken um einen gemeinsamen Endpunkt.

Geg. eine Strecke AB in C halbiert.

„Wir ziehen zunächst von dem Punkte B aus einen Halbstrahl BY und lassen ihn an der halben Drehung teilnehmen. Der Halbstrahl BY soll dabei fest mit CB verbunden bleiben.“ Neue Lage von BY (AX). Gleichheit der Winkel (α u. β).

Umkehrung der geschilderten Betrachtung.

Es wird nun AX über A hinaus verlängert. Beziehungen des neuen Winkels γ zu α und β.

Auch BY wird über B verlängert. Vierter Winkel δ. Seine Beziehungen zu α, β, γ.

Schliesslich wird BA, dann AB verlängert und analoge Betrachtungen wie vorher angestellt. Benennung der Winkelpaare (Wechselwinkel, innere Winkel, Gegenwinkel).

Es werden darauf die Resultate der Untersuchungen in dem Satz zusammengefasst:

„Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so dass zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind (paarweise)[1])

a) auch die übrigen Wechselwinkel gleich,

b) die Gegenwinkel gleich,

c) die inneren Winkel gleich $2R$.[2])

Verfasser betrachtet nun dasselbe Raumgebilde, macht aber seine Beobachtungen unter der Voraussetzung, dass die Beweglichkeit derartig sei, dass nicht nur B nach A, sondern auch A nach B gedreht werde. Dann heisst es:

„Geht man jetzt zu den Parallelensätzen über, so ist im Wesentlichen alles Material für die Beweise zur Hand und die Arbeit der Schüler besteht darin, die ihnen geläufigen einzelnen Teile der Beweise in richtiger Art zu dem vollständigen Beweise zusammenzufügen."

Der erste Satz lautet:

„Zwei Geraden, welche durch eine halbe Drehung um die Mitte einer zwischen ihnen liegenden Strecke ihre Lage vertauschen oder, falls die eine Gerade festgehalten wird, zur Deckung gelangen, haben auch bei unbegrenzter Verlängerung keinen Punkt gemein, d. h. sie sind parallel."

Der Beweis schliesst mit der bekannten Folgerung. Die weitere Behandlung der Parallelensätze ist aus dieser Darstellung wohl von selbst klar, so dass ich auf eine Wiedergabe des Folgenden verzichten kann.

Auch dieser Darstellung der Parallelensätze lässt sich die Anerkennung nicht versagen. Sie würde sich auch leicht mit der Matzka'schen kombinieren lassen. Vor allen Dingen ist die reichliche Verwendung der Bewegung erfreulich.

---

[1]) Dieser Zusatz ist von Wichtigkeit.

[2]) Warum nicht „supplementär"?

Zitate.

Kosack, Beiträge zu einer systemat. Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852.

p. 15: „Es drängt sich hier die Frage auf, wie grofs ein Winkel überhaupt werden könne. Die Drehung kann immer fortgesetzt, aber der Winkel auch ohne alle Grenzen gröfser gedacht werden. Allein wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, nimmt eine Linie ihre ursprüngliche Lage wieder ein, wenn sie sich um einen Winkel von $4R$ gedreht hat. — . . — Hieraus ergiebt sich klar, dafs alle für hier unterscheidbaren Winkelgröfsen in bestimmte Grenzen geschlossen sind, indem wenn ein Winkel mehr als $4R$ beträgt, man immer wieder zu einem Winkel gelangt, welcher mit dem durchaus zusammenfällt, den man als Rest erhält, wenn man den in Rechten ausgedrückten Winkel mit $4R$ dividiert. Man kann also diejenigen Winkel, welche bei dieser Division gleiche Reste geben, als völlig gleich betrachten."

Die hier erörterte Frage der Unendlichkeit des Winkels habe ich auf Seite 123 dieses Bandes ebenfalls in Betracht gezogen. Ich kann mich daher hier auf jene Stelle beziehen.

Nachdem sodann die Neben- und Scheitelwinkel behandelt sind, heifst es p. 17: „Wenn sich drei verschiedene Linien einander schneiden, so finden zwischen den Winkeln, die sie hierbei bilden, gewisse Beziehungen statt, die im Folgenden erörtert werden sollen."

Es wird zunächst zwischen der schneidenden und der Geschnittnen unterschieden und zunächst äufsere und innere Winkel von einander geschieden.

„Ein Paar, dessen beide Winkel an derselben Seite der Schneidenden liegen und von denen der eine ein äufserer, der andere ein innerer ist, ohne dafs beide Nebenwinkel sind, heifsen Gegenwinkel."

Die Bedingung „ohne dafs beide Nebenwinkel sind" hatten wir durch unsre Disposition vermieden; dagegen liegt andrereits in dieser Einschränkung der Hinweis auf denjenigen ısammenhang zwischen den Winkeln an zwei Scheiteln, den

wir auf Seite 338 angedeutet und auf Seite 362 f. ausführlicher dargestellt haben.

„Ein Paar innere Winkel, welche an verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen ohne Nebenwinkel zu sein, heifsen Wechselwinkel.“

Dieser Erklärung folgt drittens: „Ein Paar innerer Winkel, welche auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heifsen innere zugehörige Winkel.“

Mittelst Drehung wird nun zunächst gezeigt, dafs „jeder Aufsenwinkel (der nicht ein Scheitelwinkel von einem inneren ist) so grofs ist, wie die beiden gegenüberliegenden[1]) zusammengenommen“. Hieraus wird dann gefolgert, dafs die Winkelsumme des Dreiecks einen Flachwinkel beträgt.

Es folgen dann die Erörterungen über den Zusammenhang der 16 Winkelgleichungen, nachdem die Gleichheit der Gegenwinkel mit dem gleichen Richtungsunterschied identifiziert worden ist. Hieraus läfst sich dann sofort erkennen, wie der Verfasser den Zusammenhang der behandelten Sätze mit der Parallelenlehre darstellt, zumal wenn man weifs, dafs er die Parallelen als Geraden gleicher Richtung definiert. Hieran schliefsen sich dann die Umkehrungen, deren letzter Satz das elfte Axiom ist.

Friedrich Schmeisser, Bemerkungen zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Lehren der Geometrie. — Frankfurt a. O. 1855.

Der Verfasser sagt p. 18: „Dafs die Theorie jeder Wissenschaft mit den einfachsten Lehren beginnen müsse, versteht sich von selbst. Daher mufs auch der erste Hauptteil der Geometrie

I. Von den Linien und Winkeln nach ihrer Lage und Gröfse handeln.“

Man dürfe aber diese Betrachtungen nicht in die Planimetrie bringen.

---

[1]) Vergl. unsre Fufsnote auf Seite 366.

Es wird dann auf den Zusammenhang des Winkels mit dem Kreise eingegangen.[1])

p. 21 bemerkt Schmeisser: „Dafs die Einteilung des Kreises in 360° nicht aus dem alten Egypten stammt, hat schon Weidler (histor. astron. p. 56) dargelegt. Es ist hinreichend ermittelt, dafs sie aus der Zeit des Eudoxus herrührt und wahrscheinlich von Eratosthenes und Hipparch v. N. verbreitet worden ist. Strabo II. p. 194. 172. Manilius I. 572. Vergl. J. H. Voss zu Vergils Landbau I. 233."

Wir verweisen, was diese Frage betrifft, auf unser Zitat aus Cantor auf Seite 343.

Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie. — Sorau 1860.

Zerlang giebt die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes und geht sofort auf den Zusammenhang des Winkels mit dem Kreise ein. Mit Hülfe des Kreises löst er dann, noch ehe er von der Bezeichnung der Winkel handelt, die Aufgabe, einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen gleich ist. Der Angabe der Namen und der sehr ausführlichen Behandlung des Richtwinkels folgt dann die Aufgabe, zwei gegebene Winkel zu addieren. Es folgen die Betrachtungen über Neben-, Komplement- etc. Winkel und praktische Übungen im Addieren und Subtrahieren von Winkeln. Den rechten Winkel bezeichnet er als Mafseinheit.

Den Linien mit Richtungsunterschied stellt er sodann diejenigen mit gleicher Richtung gegenüber, die parallel heifsen. Auch hier werden die Einzelbeziehungen sehr gründlich erörtert, dann geht der Verfasser zu den Winkelpaaren bei Geraden über und stellt die bekannten Sätze auf, die ihm sofort zur Lösung der Aufgaben dienen, durch einen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen. Als Umkehrung folgt dann der Satz: Werden zwei Parallelen von

[1]) Schmeisser nimmt mit Baroccio an, dafs die Euklidsche [Defin]ition des Winkels κλισις ein Schreibfehler sei, dafs es heifsen müsse [κλασι]ς = fractio.

einer Geraden geschnitten, so etc.[1]) — Der Beweis stützt sich überall hier wie dort auf die Winkeldefinition.

Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck und die zugehörigen Sätze werden natürlich mit Hülfe der parallelen Hülfslinie bewiesen.

Fr. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordordnung I. Hanau, 1870.

Schon oben (p. 339) hatte ich angekündigt, dafs ich auf die duale Behandlung von Strecke und Winkel noch näher eingehen würde.[2]) Hierzu bietet die vorliegende Abhandlung geeignete Veranlassung. Um einigermafsen die leitenden Gedanken des Verfassers der Erkenntnis nahe zu bringen, gebe ich, ehe ich auf den uns hier interessierenden Text eingehe, das Schema der Darstellung.

I. Offne Figuren. Kreis.

1) Punkte und Gerade in gegenseitiger Beziehung.

2) Strecke und gebrochene Linie.

3) a) Kreis. b) Winkel.

1) Zunächst wird auf den Zusammenhang von Winkel und Drehung eingegangen.

Dann folgen die Beziehungen der Winkel, Erklärungen[3]), daran sich anschliefsende Konstruktionsaufgaben und duale Gegenüberstellungen von Winkel- und Bogensätzen. p. 13 folgt 4:

„Strecken und Winkel (Analogieen).

Strecken können nur hinsichtlich ihrer Lage und Gröfse von einander verschieden sein; daher sind gleiche Strecken kongruent.

Winkel können nur hinsichtlich ihrer Lage und Gröfse von einander verschieden sein; daher sind gleiche Winkel kongruent.

---

[1]) Nach der vorhergehenden Anordnung des Verfassers hätte, meiner Meinung nach, dieser Satz der Hauptsatz sein, der erste dagegen als die Umkehrung gelehrt werden müssen.

[2]) Man vergleiche meine Ausführungen p. 120 ff.

[3]) Eine derartige Erklärung ist z. B.: „Die Entfernung zweier gleichweit vom Scheitel eines Winkels abstehenden Schenkelpunkte heifst die Schenkelweite für diesen Abstand.

Vergleichung von Strecken durch Aufeinanderlegen.	Vergleichung von Winkeln durch Aufeinanderlegen.
Summe und Differenz von Strecken.	Summe und Differenz von Winkeln.“

Es läſst sich nicht leugnen, daſs eine derartige duale Behandlung der beiden Elemente Strecke und Winkel von groſsem Vorteil im Unterricht ist. Man sollte nicht versäumen, auf diese Darstellung des Zusammenhangs der beiden Elemente ausführlich einzugehen.

p. 14 folgt 5: „Mehrere Winkel in Beziehung zu einander.“

Hier finden wir die Beziehungen der Nebenwinkel, Scheitelwinkel etc., zum teil allerdings mit Aufstellung sehr überflüssiger Sätze, wie z. B. Lehrsatz: „Alle flachen Winkel sind einander gleich“; dieser Lehrsatz wird mittest Deckung bewiesen.

p. 17 Nr. 6: „Winkelkreuz, Halbierungskreuz, Parallelen, Konvergenten.“

„Erklärung. Zwei Gerade, welche sich schneiden, bilden ein Winkelkreuz (Geradenkreuz, geraden Vierstrahl, vollständiges Winkelgebilde).“

„Ist einer der vier Winkel des Kreuzes ein rechter Winkel, so ist jeder derselben ein rechter[1]); ist dagegen einer kein rechter, so ist keiner ein rechter.“

„Von der Gröſse eines der vier Winkel eines Kreuzes ist die Gröſse der drei übrigen abhängig, d. h. jeder Winkel bestimmt ein ihm zugehöriges Kreuz.“

Hieran schlieſsen sich einige Folgesätze über die Vergleichung zweier Kreuze.

Es heiſst dann p. 18:

„Für eine Gerade giebt es durch einen Punkt auf derselben nur einen Winkel, von dessen Schenkeln jeder für sich	Für einen Winkel giebt es in einer Fläche durch den Scheitel nur eine Gerade, von deren Strahlen jeder für

[1]) Die Hinweisung auf diesen Spezialfall haben wir in unserer Darstellung leider unterlassen; es möge deshalb hier darauf ausdrücklich hingewiesen werden.

mit den Strahlen der Geraden gleiche Winkel bildet. Dieser Winkel ist ein flacher, seine Schenkel stehen senkrecht zu der Geraden.

sich mit den Schenkeln des Winkels gleiche Winkel bildet. Diese Gerade halbiert den Winkel.

oder:

Mit den beiden Strahlen einer Geraden kann nur eine einzige Gerade gleiche Winkel bilden; diese Gerade heifst Senkrechte zur ersten.

Mit den beiden Schenkeln eines Winkels kann nur eine einzige Gerade gleiche Winkel bilden; diese Gerade heifst die Winkelhalbierende.“

p. 19: „Die Winkelhalbierenden eines Kreuzes bilden ein rechtwinkliges Kreuz.“ Folgesätze und Umkehrungen.

„Die beiden Normalen im Scheitel eines Kreuzes zu dessen Geraden bilden ein ihm gleichwinkliges Kreuz (Normalenkreuz).“

Durch den Satz: „Eine Transversale eines Kreuzes, welche nicht durch den Scheitel geht, schneidet entweder nur eine seiner Geraden oder beide“ wird dann die Lehre von den „gleichliegenden“ etc. Winkeln eingeleitet.

Begriffe des ebenbildlichen und des gegenbildlichen Kreuzes. Bei Parallelen haben wir, wenn eine Transversale da ist, ebenbildliche Kreuze resp. wenn die Kreuze ebenbildlich sind, so sind zwei Geraden parallel. Anwendungen. Dann folgt das elfte Axiom resp. dessen Umkehrung. Der folgende Abschnitt bringt dann in analoger Behandlung die Winkellehre beim Dreieck. Besonders ist zu erwähnen, dafs die Seitenbeziehungen und Winkelbeziehungen in dualer Weise dargestellt werden.

Die ganze, durch Originalität und Geist ausgezeichnete Arbeit ist sehr lesenswert.

Polster, Geometrie der Ebne. — Würzburg 1878.

Es wird genügen, wenn ich von dieser Abhandlung die Disposition mitteile.

II. Kapitel.

Winkel an einem Scheitel.

§ 5. Vergleichung zweier Winkel.
(Addition und Subtraktion der Winkel.)

§ 6. Nullwinkel, Vollwinkel, gerade Winkel.

§ 7. Nebenwinkel.

§ 8. Scheitelwinkel.

III. Kapitel.

Theorie der Konvergenz und des Parallelismus.

§ 9. Definitionen (Innere [äufsere] Winkel, Gegenwinkel, Wechselwinkel, korrespondierende Gegenwinkel etc.).

§ 10. Kriterien der Konvergenz (im ganzen zehn).
(Nr. 5 = Elftes Axiom.)

§ 11. Gegenwinkel und Wechselwinkel an Parallelen.
(Erster Lehrsatz: „An parallelen Graden ist jeder Winkel einem gleichliegenden Winkel gleich.“ Beweis indirekt.)

§ 12. Kriterien des Parallelismus (im ganzen vier).

§ 13. Gegenwinkel und Wechselwinkel an konvergenten Geraden.

§ 14. Richtungen von geschnittnen Geraden gegen die Durchschnittslinie.

§ 15. Weitere Sätze über die Parallelen.

§ 16. Parallelwinkel in einer Ebene.

In einem Anhang giebt der Verfasser noch eine „andere Art der Theorie des Parallelismus und der Konvergenz“ und zwar so, dafs der § 10 hinter § 13 folgt; in einem zweiten Anhang findet sich noch eine „dritte Art der Theorie des Parallelismus und der Konvergenz.“ Hier ist die Reihenfolge: § 14 (auf § 9 folgend), § 11, § 12, § 13, § 10.

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879 (Nr. 125).

Die Anordnung des Stoffes ist folgende:

§ 1. Definitionen. — § 2. Winkel (Definition, Benennungen, benannte Zahl; dieser § schliefst mit dem Satze: „Wenn zwei Strahlen mit einer Geraden gleiche Winkel in demselben

Drehungssinne bilden, so haben die Strahlen gleiche Richtung; denn ihre Richtungen weichen gleichviel von einer dritten ab“). — § 3. Zwei Punkte. Der Kreis. — § 4. Kreis und Gerade. — § 5. Drei Punkte. Das Dreieck. — § 6. Zwei Kreise. — § 7. Das gleichschenklige und das rechtwinklige Dreieck. — § 8. Konstruktionen. — § 9. Parallele Geraden (Definition; Sätze). — § 10. Nebenwinkel und Scheitelwinkel. — § 11. Winkel bei Parallelen. — Auf diesen Paragraphen müssen wir näher eingehen.

Es wird zunächst zwischen äufseren und inneren Winkeln unterschieden. Betreffs der Benennung der verschiedenen Winkelpaare bedauert Verfasser die vielen Verschiedenheiten bei den verschiedenen Autoren und fügt hinzu[1]):

„Am konsequentesten scheint mir die Einteilung der betreffenden Winkel von Snell in folgender Weise durchgeführt zu sein:

1) Beide Winkel liegen auf derselben Seite der Transversalen und sind
  a. ein äufserer und ein innerer,
  b. zwei innere,
  c. zwei äufsere.

2) Die Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der Transversalen und sind
  a. ein äufserer und ein innerer,
  b. zwei innere,
  c. zwei äufsere.

Die Winkel 1a) nennt Snell Gegenwinkel.
1b) Innenwinkel.
1c) Aufsenwinkel.
2a) Gegenwechselwinkel.
2b) Innenwechselwinkel.
2c) Aufsenwechselwinkel.

Dr. Joh. Müller (Lehrbuch der elementaren Planimetrie, Bremen 1870) nennt die Winkel an verschiedenen Scheiteln und an derselben Seite der Transversalen Gegenwinkel, an verschiedenen Seiten der Transversalen Wechselwinkel und

---

[1]) Man vergleiche unsere entsprechenden Ausführungen weiter oben.

unterscheidet dann: a. Gemischte Gegenwinkel (ein innerer und ein äufserer); b. Gleichartige Gegenwinkel (zwei innere oder zwei äussere); c. Gemischte Wechselwinkel (ein innerer und ein äufserer); d. Gleichartige Wechselwinkel (zwei innere oder zwei äufsere).

Baltzer (Elemente etc.) kennt nur a. Innere Winkel (auf derselben Seite der Transversalen); b. Gegenwinkel (ein äufserer und ein innerer an derselben Seite der Transversalen); c. Wechselwinkel (zwei innere Winkel an verschiedenen Seiten der Transversalen).

So findet sich fast in jedem Buche leider eine andere Bezeichnung für dieselbe Sache. Übereinstimmung herrscht im allgemeinen nur darin, dafs zwei innere oder äufsere Winkel auf verschiedenen Seiten der Transversalen Wechselwinkel, ein äufserer und ein innerer auf derselben Seite Gegenwinkel oder Korrespondierende Winkel genannt werden. Die Winkel 2a. der Snell'schen Einteilung werden in der Regel gar nicht berücksichtigt oder (Focke und Krafs) mit 1b. und c. vereinigt. In Bezug auf die Winkel, die entweder zwei äufsere oder zwei innere an derselben Seite der Transversalen sind, herrscht die gröfste Verwirrung. Sie heifsen z. B. entgegengesetzte Winkel (Kambly), Ergänzungswinkel (Hub. Müller, Focke und Krafs), Gegenwinkel (Recknagel, NB. dasselbe Wort in anderer Bedeutung, als es die meisten anderen Bücher anwenden!), Anwinkel (Schram; eine Benennung, deren Etymologie mir noch unklar ist) u. s. w."

Der Verfasser selbst giebt folgende nicht üble Erklärung:

„Man kann die betreffenden Winkel dadurch unterscheiden, dafs man ihre Drehungsrichtung von der Transversalen aus ins Auge fafst. Denkt man sich zunächst die geschnittenen Linien mit der Transversalen zusammenfallend und dann um ihre Schnittpunkte beispielsweise den Zeigern der Uhr entsprechend oder entgegengesetzt gedreht, so können wir die Winkel bezeichnen als Winkel von gleicher Drehungsrichtung und Winkel von entgegengesetzter Drehungsrichtung."

Die Winkelsätze bei den Parallelen beweist der Ver-

fasser mit Hülfe von Senkrechten und der dadurch entstandenen kongruenten Dreiecke. Die Umkehrungen ergeben sich von selbst.

A. Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887 (Nr. 638).

Wernicke geht aus von dem Winkelstrahl, über den er eine Reihe von Sätzen aufstellt, z. B.: „Jede Gerade, welche beide Schenkel eines Winkelstrahls trifft, schneidet die Achse desselben.“

„§ 96. Postulat: Jede Strecke und jeder Winkel ist in beliebiger Weise übertragbar, d. h. man darf diese Gebilde, sobald sie irgendwo vollkommen bestimmt sind, an jeder anderen Stelle des Raumes wiederum als gegeben annehmen.“

§ 101 lautet: „Die Methode der Geometrie des Mafses wird dadurch bestimmt, dafs aus einer Strecke und aus einem Winkel bez. zwei Mafse hergestellt werden, welche zunächst eine zahlenmäfsige Vergleichung von Strecken und Winkeln ermöglichen, dann aber auch zu weiteren Messungen führen.“

Der folgende Abschnitt behandelt sodann die „Einführung und Verbindung der beiden Mafse“ und zwar zuerst die Strecke, dann den Winkel (Mafsebene). Hierauf scheidet sich der Stoff so, dafs zuerst die Winkelpaare an einer Geraden bez. an einem Winkelstrahl, sodann die Winkelpaare an zwei sich schneidenden Geraden abgehandelt werden. § 114 bringt Winkelpaare an drei sich schneidenden Geraden. Der erste Lehrsatz, der aufgestellt wird, heifst: „Jeder Aufsenwinkel ist gröfser als ein nichtzugehöriger Dreieckswinkel.“

Im § 115 giebt Wernicke folgendes Schema:

„I. Winkelpaare aus gleichartigen[1]) Elementen.

1) Ohne Überschreitung der Schneidenden: Gleichartige Gegenwinkel (Ergänzungswinkel).

2) Mit Überschreitung der Schneidenden: Wechselwinkel.

---

[1]) Gleichartig werden Winkelpaare genannt, wenn je zwei äufsere oder je zwei innere Winkel die Elemente sind; ungleichartig, wenn je ein äufserer und je ein innerer Winkel zum Paar gehören.

II. Winkelpaare aus ungleichartigen Elementen.

1) Ohne Überschreitung der Schneidenden: Gegenwinkel.

2) Mit Überschreitung der Schneidenden: Ungleichartige Wechselwinkel."

Wir können uns mit diesem Schema völlig einverstanden erklären, besonders erscheint uns die Unterscheidung der gleichartigen und ungleichartigen Elemente recht glücklich; nur der Name „Ergänzungswinkel" erregt Anstofs, da hier in den Namen eine Eigenschaft vornweg genommen ist, die noch dazu nur für einen bestimmten Fall resp. eine bestimmte Voraussetzung existiert. Bei bestimmten Lagen der Geschnittenen werden die Elemente von I, 2 und II, 1 gleich, diejenigen von I, 1 und II, 2 supplementär. Der Verfasser geht dann sofort dazu über zu zeigen, dafs, wenn eine der 16 Gleichungen gilt, alle gelten und dafs dann die geschnittenen keinen Punkt gemeinsam haben. Solche Geraden heifsen parallel.

In den §§ 120—125 spricht sich der Verfasser über „die natürliche Einheit der Winkelmessung" aus. Er wählt zum Mafs den Winkel, der viermal an einander gelegt die Mafsebene ausfüllt, legt also den Richtwinkel der Messung zugrunde, womit wir uns nicht einverstanden erklären können. Die natürliche Mafseinheit ist der Vollwinkel selbst.

Soweit ging die Behandlung des Winkels, nun folgt 3) Beziehungen beider Mafse, der Seiten und Winkel des Dreiecks betrachtet, auf die Kongruenzlehre eingeht, und schliefslich die wichtige Frage erörtert: „Bilden Parallelen mit jeder Schneidenden gleiche Gegenwinkel?" Diese Frage ist identisch mit derjenigen: „Wie viel Parallelen können durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden?" Die Antwort kann nur mit Hülfe eines Axioms gegeben werden; setzen wir die Anzahl auf eins fest, so wird auch die erste Frage bejaht und damit zugleich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck entschieden.

H. Müller, Uber den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889 (Nr. 68).

Die Abhandlung bringt im zweiten Abschnitt die „Lehre

von den Winkeln“, und zwar behandelt § 4 „Begriff des Winkels. Allgemeine Winkelsätze,“ § 5 „Winkel bei Parallelen.“

Schon daraus, dafs diesen beiden Paragraphen 16 Quartseiten gewidmet sind, kann man ersehen, wie ausführlich die vorliegende Darstellung ist und wie eingehend die Untersuchungen geführt werden. Der Verfasser geht aus von den drei möglichen Lagen zweier Geraden — die nebenbei gesagt in völlig unsystematischer Weise aufgezählt werden — und definiert sodann den Winkel als Ebenenteil. Es folgen die Erklärungen über Bezeichnung und Benennung; dann der mit der Definiton nicht zu vereinbarende Satz, dafs die Gröfse des Winkels von der Länge der Schenkel unabhängig sei, wobei der Verfasser natürlicherweise die Drehung mit heranziehen mufs. Bei der vom Verfasser gegebenen Definition müfste gesagt werden, die Schenkel sind immer als vollkommene Strahlen zu denken, wenn sie auch nur zum teil gezeichnet werden.

An die Relation des Winkels mit der Drehung schliefst sich unmittelbar die Gröfsenvergleichung durch Aufeinanderlegen, daran die Benennung der verschiedenen Winkelarten. Durch Zerlegung des flachen Winkels kommt man auf die Nebenwinkel.

Der Mafsstab, um einen Winkel seiner Gröfse nach genau angeben zu können, ist der flache Winkel (Gradeinteilung) — der selbst doch erst ein abgeleiteter ist. Der Winkelmesser wird zu Hülfe genommen und mit ihm Übungen im Antragen und Abtragen von Winkeln vorgenommen. Verfasser schildert eingehend sein Verfahren und giebt Beispiele von Aufgaben.

p. 18: „Sind die bisher besprochenen Ubungen in hinreichendem Mafse vorgenommen und dadurch Begriff und Anschauung des Winkels zu dauerndem Eigentum geworden, so kann der Schüler zur Bildung der einfachsten Lehrsätze über die Winkel geführt werden. Er weifs bereits,

dafs alle flachen Winkel gleichgrofs sind,
dafs die Gröfse eines flachen Winkels $2R$ beträgt,
dafs die Gröfse eines rechten Winkels gleich $1R$ ist und
dafs folglich alle rechten Winkel gleichgrofs sind.

Er kennt ferner die Erklärung für die Nebenwinkel und

weifs, dafs zwei Nebenwinkel die Teile eines flachen Winkels sind, dafs also durch Addition zweier Nebenwinkel ein flacher Winkel gebildet wird; es bedarf demnach keines Beweises mehr für den

„Lehrsatz 1: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt $2R$.“ Allerdings bedarf der Schüler keines Beweises für diesen Satz, weil er eben gar kein Lehrsatz ist. Man vergleiche hierzu unsre Ausführungen in der Fufsnote auf Seite 351 und Seite 352, besonders die letztere. Was sind es aber überhaupt für „Lehrsätze,“ die der Verfasser aufstellt!

„Die Gröfse eines rechten Winkels ist gleich $1R$.“ (!!) Was soll man zu einer solchen Verirrung sagen.

Der zweite Lehrsatz ist der von den Scheitelwinkeln, der mit Hülfe der Nebenwinkel unmittelbar aus der Anschauung gewonnen wurde. Hiermit dürfe man sich aber nicht begnügen.

„Aus diesem Grunde halte ich einen Beweis des ausgesprochenen Lehrsatzes für durchaus erforderlich; zugleich aber benutze ich die Gelegenheit, um den Schüler mit verschiedenen Beweisformen bekannt zu machen, deren Kenntnis ihm nicht minder notwendig ist, wie dem Arbeiter die Kenntnis seines Handwerkszeuges. Beim ersten Beweisverfahren stützen wir uns auf den Satz, dafs kongruente Winkel gleich grofs sind und nehmen, indem wir die Winkel zur Deckung bringen, die Anschauung zu Hülfe: Durch vier vollkommen gleiche dünne Stäbe stellen wir zwei sich schneidende Paare von Geraden dar, die im Schnittpunkte, ihrem Mittelpunkte, derart aneinander befestigt werden, dafs sie um denselben gedreht werden können. Die Stellung der beiden ersten Geraden zu einander wird als unveränderlich angenommen, während das zweite Paar beweglich bleiben soll. Nun legen wir das bewegliche Paar so auf das erste, dafs die Schnittpunkte sich decken und eine der Geraden des zweiten Paares mit einer Geraden des ersten Paares zusammenfällt; drehen wir dann die zweite Gerade des zweiten Paares, bis sie ganz auf der zweiten Geraden des ersten liegt, so bedecken sich die beiden Paare vollständig und die acht Winkel um die beiden Schnittpunkte erweisen sich als paarweis kongruent. Wird jetzt das zweite Paar von

dem ersten abgenommen, ohne Änderung an der gegenseitigen Lage der Geraden in der Luft halb herumgedreht und dann wieder auf das erste gelegt, so bedecken sich die beiden Paare von neuem und die Winkel des zweiten Paares fallen vollständig auf die Schtw zu denjenigen Winkeln des ersten Paares, zu denen sie vor der halben Umdrehung kongruent gewesen waren. Jeder Winkel des zweiten Paares kann also zwei Winkel des ersten Paares vollständig bedecken und von ihnen vollständig bedeckt werden; das ist aber nur möglich, wenn die beiden Winkel selber kongruent, also gleich sind."

Als zweites Verfahren schildert Verfasser dann das rechnerische. Bei der Aufstellung der dazu nötigen Grundsätze müsse man sparsam sein, da sie auswendig gelernt werden müfsten. Sie seien durch Beispiele genügend einzuprägen. Bei dieser Gelegenheit spricht sich Verfasser dafür aus, den Beweis von der ganzen Klasse „durch Zusammensprechen" vortragen zu lassen, ein Verfahren, dessen Vorzüge ich nicht einsehen kann, das ich sogar für entschieden falsch halte. Solche Methode gehört nicht in den mathematischen Unterricht.

Zur weiteren Befestigung des Gelernten läfst Müller dann die beiden Sätze entwickeln: „Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel[1]) stehen senkrecht auf einander" und „Die Halbierungslinie eines Winkels halbiert auch seinen Scheitelwinkel."

Bemerkenswert ist Seite 21: „Zu einer schönen Übung veranlassen auch die vier Lösungen der Aufgabe einen Winkel α in einem Punkte P einer Geraden AB an dieselbe anzutragen."

Der Gedanke und seine Ausführung haben mir sehr gefallen. Hierbei kommt der Verfasser auf die indirekte Beweisform zu sprechen.

Dann geht er über zu Winkeln an zwei Scheiteln und entwickelt die Sätze über Supplementwinkel und derartige Sätze wie: „Sind zwei Winkel einander gleich, so ist jeder von ihnen gleich dem Scheitelwinkel des andern." Dazu giebt er arithmetische Beweise.

§ 5 überträgt nun die letzten Betrachtungen auf den Fall,

---

[1]) Besser eines Paares von Nebenwinkeln.

dafs zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden. Natürlich ist, dafs auch Müller sich über die Verwirrung in der Bezeichnung der Winkelpaare ausläfst. Er sagt:

„Eine Übereinstimmung in der Wahl der Bezeichnungen wird man in den verschiedenen planimetrischen Lehrbüchern vergeblich suchen. Während die meisten nur drei Arten von Winkelpaaren unterscheiden und ihnen häufig ungeschickte, weil zu wenig charakteristische Benennungen geben, weisen andere, wie der Leitfaden von Feld und Serf nicht weniger als sechs verschiedene Arten von Winkelpaaren auf und erzwingen die Genauigkeit der Bezeichnungen durch eine Anhäufung des Memorierstoffes, die um so weniger auf Billigung rechnen darf, als sie recht gut vermieden werden kann. Unterscheidet man nämlich bei den schneidenden Geraden eine rechte und eine linke Seite (resp. ein oben und unten) und bei den geschnittenen Geraden ein oben und unten (resp. rechte und linke Seite), so sind nur drei wesentlich von einander verschiedene Arten von Winkelpaaren denkbar, je nachdem die Winkel

1. beide auf derselben Seite der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Graden,

2. beide auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Graden,

3. entweder auf derselben Seite der schneidenden aber auf verschiedenen Seiten der geschnittenen, oder auf verschiedenen Seiten der schneidenden aber auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen. Den ersten Paaren kommt die Bezeichnung gleichliegende oder korrespondierende Winkel zu und die zweiten Paare werden durch die Benennung Wechselwinkel treffend charakterisiert, während für die Paare der dritten Abteilung, so viel mir bekannt ist, keine Bezeichnung existiert, die ihre gegenseitige Lage genau bestimmte. Bei der Schwierigkeit, das gemeinsame und das verschiedene in der Lage durch ein Wort auszudrücken, ist das vollkommen erklärlich. Es empfiehlt sich daher, von einer aus der Lage abgeleiteten Benennung dieser Winkel vollständig abzusehen und einen Namen zu wählen, welcher eine in zahlreichen Fällen auftretende Eigenschaft dieser Paare zum Aus-

druck bringt, nämlich den Namen Ergänzungswinkel. Hiernach hat sich der Schüler die folgenden Erklärungen genau einzuprägen:

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen an den Schnittpunkten acht Winkel, von denen je zwei an verschiedenen Schnittpunkten liegende Winkel einen gemeinsamen Namen führen.

1. Die Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen korrespondierende Winkel (Korr. W.).

2. Die Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auch auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen Wechselwinkel (W. W.).

3. Die Winkel, welche entweder auf derselben Seite der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen, — oder auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen Ergänzungswinkel (Erg. W.)."

In höchst ausführlicher Weise werden sodann die Beziehungen der 16 Winkelpaare erörtert.

Schon die Zusammenstellung dieser wenigen Bearbeitungen der Winkellehre hat gezeigt, dafs die Behandlung eine mannigfaltige sein kann. Meine ursprüngliche Absicht, auch noch aus verschiedenen Lehrbüchern Zitate mitzuteilen, habe ich mich entschlossen aufzugeben; einerseits weil die Zitate doch nicht ganz vollständig gegeben werden können, trotzdem aber einen übermäfsigen Raum in Anspruch nehmen; dann, weil es sich hier nicht um eine prinzipielle Frage handelt, deren Erledigung die Wichtigkeit für sich in Anspruch nehmen kann, wie die Erörterung der Grundbegriffe.

Erwähnen möchte ich noch als beachtenswert wegen origineller oder besonders ausführlicher Behandlung folgende Lehrbücher:

J. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

J. Helmes, Die Elementar-Mathematik. II. — Hannover 1874.

Hub. Müller, Leitfaden d. eb. Geometrie. I. — Leipzig 1874.
Kruse, Geometrie d. Ebene. — Berlin 1875.
Henrici u. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Leipzig 1881.
Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.
Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

Hiermit will ich das vorliegende Kapitel schliefsen, da § 3, der drei oder mehr Winkel behandelt, von keiner besondern Bedeutung erscheint, teils aber auch darin Fragen zur Erledigung kommen, die an anderer Stelle erörtert werden können. Sie sollen daher im dritten Bande erledigt werden.

Alphabetisches Verzeichnis der zitierten Werke.

Seite

I. Kapitel. 3

Richtung und Abstand. Lagen- und Maſsuntersuchungen.

§ 1. **Richtung** 4

Adam, W., Lehrbuch d. eb. u. körp. Geometrie. — Berlin 1869 . 27
Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840. 19
August, E. F., Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852 24
Baltzer, Elemente. — Leipzig 1874 30
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 23
Bartholomäi, Philos. d. Math. — Jena 1860. 26
Becker, J. K., Lehrbuch d. Elem.-Math. — Berlin 1877 33
Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869 28
Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888 38
Beyersdorff, Die Raumvorstellungen. — Leipzig 1880 36
Bolzano, Betrachtung über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804 16
Brockmann, Lehrb. d. Elem.-Geometrie. — Leipzig 1871 28
Dauber, A., Die Grundlagen der Mathematik. — Helmstedt 1871. 29
Develey, E., Anfangsgründe der Geometrie. — Stuttgart 1818 . . 17
Fabian-Zmurko, Lehrbuch der Geometrie. — Lemberg 1876 . . 33
F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik II. — Leipzig 1887 . 37
Focke und Kraſs, Lehrbuch der Geometrie. — Münster 1878 . . 33
Frantz, Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842 20
Fresenius, Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur. — Frankfurt a. M. 1853 24
Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Wiesbaden 1868 27
Fries, Die mathematische Naturphilosophie. — Heidelberg 1822 . 18
Gilles, Lehrbuch der eben. Geometrie. — Heidelberg 1877 . . . 33
Hablützel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875 32
Hartmann, Genetischer Leitfaden für den Unterricht in d. Planimetrie. — Bautzen 1872 30

Seite

v. Heidenreich, Die Elemente d. niedr. Geometrie. — Leipzig 1859 26
Helmes, Die Elementarmathematik etc. — Hannover 1874 30
Henrici und Treutlein, Lehrbuch d. Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881 36
Hoch, Lehrbuch d. eb. Geometrie. — Halle 1884 37
Hoffmann, Vorschule der Geometrie. — Halle a. S. 1874 30
Kant, Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum. — 1768 15
Koch, Bemerkungen über d. Elementarplanimetrie. — Budissin 1842 21
Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879 36
Krause, Kant u. Helmholtz etc. — Lahr 1878 34
Ley, Lehrbuch der Geometrie. — Bonn 1858 25
Müller, J. H. T., Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844 21
Müller, E., Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869 28
Müller, Joh., Lehrbuch d. elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 28
Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878 33
Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890 39
Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887 38
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 37
Salomon, Lehrbuch der reinen Elementar-Geometrie. — Wien 1847 22
Schindler, Die Elemente d. Plan. — Berlin 1883 37
Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel 1879 35
v. Schmidt, Euklid's 11. Axiom. — Moskau 1891 39
Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 34
Schram u. Schüssler, Vorschule d. Mathematik. — Wien 1889 39
Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808 16
Simon, M., Zu den Grundlagen der Nicht-Euklidischen Geometrie. Strafsburg 1891 40
Snell, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1857 24
Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865 27
Steffenhagen, Kompendium der Planimetrie. — Parchim 1847 21
Stumpf, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. — Leipzig 1873 30
Teirich, Lehrbuch d. Geometrie. — Wien 1868 27
Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822 17
Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836 18
Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874 31
Waitz, Lehrbuch der Psychologie. — Braunschweig 1849 22
Worpitzky, Elemente der Mathematik III. — Berlin 1874 31
dler, Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis. — ien 1889 39

Seite

Im Text verarbeitete (oder erwähnte) Abhandlungen resp. Werke.

Adrian, Zentralorgan f. d. I. d. Realschulwesens XVIII. 13
Becker, H. Z. II. 12
Bolzano, Betrachtungen etc. 4
Bolze, H. Z. II. 9 12
Ciala, H. Z. II. 12
Germar, Grunerts Archiv XV. 13
J. C. V. Hoffmann, H. Z. III. 7
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XXI. 12
Kober, H. Z. I. 11
Kober, H. Z. III. 12
Lindenthal, Zeitschrift f. d. Realschulwesen 6
Mauritius 8
v. Pfeil, Grunerts Archiv IL. 14
Thaer 7

§ 2. **Abstand.** 40

Adam, Lehrb. d. eb. u. körperl. Geometrie. — Berlin 1869. . . . 52
Arneth, System d. Geometr. — Stuttgart 1840 48
August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852 52
Bartholomäi, Geometrie. — Jena 1851 49
Bartholomäi, Philosophie d. Math. — Jena 1860 52
Becker, J. K., Die Elemente d. Geom. a. n. Gr. — Berlin 1877 . 55
Becker, J. K., Lehrbuch d. Elementar-Geometrie. — Berlin 1877. 56
Bretschneider, Lehrgeb. d. nied. Geometrie. — Jena 1844 . . . 48
Fabian-Zmurko, Lehrb. d. Math. — Lemberg 1876. 55
Fischer, F., Anfangsgründe d. Math. — Leipzig 1887 57
Förstemann, Lehrb. d. Geom. — Danzig 1827 48
Hablüzel, Lehrb. d. synthet. Geometrie. — Leipzig 1875 54
Haller v. Hallerstein, Lehrbuch d. Elem.-Math. — Berlin 1890 60
Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872 53
Hauff, Lehrbegriff d. r. Elem.-Math. — Frankfurt a. M. 1803 . . 46
Heinze, Die Elem.-Geometrie — Berlin 1877 56
Helmes, Die Elem.-Mathematik. — Hannover 1874 53
Kuntze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 51
Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881 57
Müller, E., Elemente der Geometrie II. — Braunschweig 1869 . . 53
Müller, H., Leitfaden der eb. Geom. — Leipzig 1874 54
Nagel, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Ulm 1873 53
Recht, Die Elemente d. Geom. — München 1844 48
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 57
Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883 57
Schmitz-Dumont, Zeit und Raum. — Leipzig 1875 54
Schmitz-Dumont, Die math. Elem. d. Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 57
Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847 49

Seite
Waitz, Lehrbuch der Psychologie. — Braunschweig 1849 49
Weissenborn, Die Elemente d. Planimetrie. — Halle 1864 . . . 52
Zindler, Beiträge zur Theorie d. math. Erkenntnis. — Wien 1889 58

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen (oder Werke).

Bolzano, Die Drei Probleme etc. 42
Günther, Der Thibautsche Beweis 43
Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe 41 43
Kerry, Viertelsjahrschrift f. wiss. Pil. IX. f. 42
F. Klein, Math. Ann. IV. 41
Simon, Zu den Grundlagen 43 44

§ 3. Lagen- und Mafsuntersuchungen 60

Arneth, System d. Geometrie. — Stuttgart 1840 88
August, Lehrbuch d. Mathematik. — Berlin 1852 90
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 89
Frankenbach, Lehrbuch d. Mathematik. — Liegnitz 1889 . . . 93
Gernerth, Grundlehren d. eb. Geometrie. — Wien 1857. 90
Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877 . . . 91
Müller, E. E., Versuch einer organischen Entwickelung d. Geom. vermittelst etc. — 1877 91
Müller, J. H. T., Lehrbuch d. Geom. — Halle 1844 88
Müller, Hubert, Leitfaden d. eb. Geom. — Leipzig 1874 90
Müller, Hubert, Leitfaden. — Leipzig 1889 90
Schindler, Die Elemente d. Planimetrie. — Berlin 1883 93
Schlegel, Lehrbuch d. element. Mathem. II. — Wolfenbüttel 1879 93

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen etc.

Bartholomäi, Planimetrie 65
J. K. Becker, Elem. d. Geom.. 79
Ciala, H. Z. II.. 73
Dieckmann, H. Z. XXIV. 85
Fresenius, H. Z. II. 73
Gille, Lehrproben und Lehrgänge. 32. Heft 61 83
Hoppe, H. Z. III. 73
Kiessling, H. Z. I. 86
Kober, H. Z. I. 73
Kober, H. Z. III.. 73
Lindenthal 79
Matzka, Gr. Arch. VIII. 87
E. Müller 60
J. H. T. Müller, Lehrb. d. Geometrie 69
Reidt, H. Z. II. 73
Sturm, H. Z. I. 66 73 86
Sturm, H. Z. II. 73
haer 61

Seite

II. Kapitel 94

Der Winkel.

Adam, Lehrbuch der eb. u. körperl. Geom. — Berlin 1869 . . . 149
Arneth, System d. Geometrie. — Stuttgart 1840 133
August, Lehrb. d. Mathematik. — Berlin 1852 143
Baltzer, Die Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874 155
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 140
Beck, Die ebene Geom. nach Legendre. — Bern 1842 134
Becker, F., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870 150
Becker, F. W., Lehrbuch d. Elementargeometrie. — Oppenheim a. R. 1859 145
J. K. Becker, Lehrbuch d. Elem.-Geom. — Berlin 1877 159
J. K. Becker, Die Elemente d. Geom. auf neuer Grundlage. — Berlin 1877 160
J. K. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. — Berlin 1888 169
Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869 149
Beez, Über Euklidische und nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888. 173
Bertrand, Elémens de Géométrie. — Paris 1812. 124
Behl, Die Darstellung der Planimetrie. — Hildesheim 1877 . . . 161
Bézout, Cours des Mathématiques. — Paris 1812 125
Blasche, Grundrifs d. Elementar-Geom. — Reval 1819 128
Boymann, Lehrbuch der Mathematik I. — Köln 1877 161
Bretschneider, Lehrgebäude d. niedern Geom. — Jena 1844 . . 135
Brewer, Lehrbuch der Geometrie. — Düsseldorf 1822 128
Brockmann, Lehrbuch der elementaren Geom. — Leipzig 1871 152
Crelle, Über Parallelen-Theorien. — Berlin 1816. 126
Crelle, Lehrbuch der Elemente d. Geom. — Berlin 1826 129
Crelle, Zur Theorie d. Ebene. Journal 1834 132
Develey, Anfangsgründe d. Geometrie. — Stuttgart 1818. . . . 127
Dronke, Die Elemente der ebn. Geometrie. — M.-Gladbach 1864 147
Ebensperger, Gemeinfafsliche Geometrie. — Nürnberg 1850 . . 139
Erb, Die Probleme d. geraden Linie etc. — Heidelberg 1846 . . 138
Euklid, Elemente. — Halle 1840. 133
Féaux, Lehrbuch der elem. Planimetrie. — Paderborn 1882 . . 168
Feld und Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Wiesbaden 1888 173
Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892. 182
Fischer, E., Die Geometrie. — Berlin 1891 180
Fischer, E. G., Lehrb. d. eb. Geom. — Berlin 1833 132
Fischer, F., Anfangsgründe der Mathematik II. — Leipzig 1887. 171
Focke und Krafs, Lehrbuch der Geometrie. — Münster 1878. . 163

Seite

Förstemann, Lehrbuch d. Geom. — Danzig 1827 131
v. Forstner, Grundrifs d. Elemente d. r. Math. — Berlin 1826 . 129
Francoeur, Vollständiger Lehrkurs d. reinen Math. — Bern 1843 134
Franke, Die Elemente der eb. Geom. — Hannover 1860 146
Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik 1. — Liegnitz 1889 . 174
Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik d. Natur. — Frankfurt a. M. 1853 144
Frischauf, Elemente d. Geom. — Graz 1870 150
Funck, Das Euklidische System d. Geom. d. Ebene. — Berlin 1864 148
Gauss, Die Hauptsätze etc. I. — Bunzlau 1885 170
Gernerth, Grundlehren der ebenen Geom. — Wien 1857 144
Giffhorn, Leitfaden der ebenen Geom. etc. — Braunschweig 1862 147
Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877 . . 161
Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenburg 1870 150
Hablützel, Lehrbuch d. synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875 . 158
Haller von Hallerstein, Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. — Berlin 1890 176
Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872 153
Hauff, Lehrbegriff d. reinen Mathematik. — Frankfurt a. M. 1803 124
Heger, Leitfaden für den geometr. Unterricht. — Breslau 1882 . 168
Heidenreich, Die Elemente d. nied. Geom. — Leipzig 1859 . . 146
Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877 162
Heis und Eschweiler, Lehrbuch d. Geom. — Köln 1870 . . . 151
Helmes, Planimetrie. — Hannover 1874. 156
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881. 166
Hercher, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1893 183
Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872. 153
Hočevar, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1891 181
Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884 169
Holl, Lehrbuch der Geometrie. — Stuttgart 1891 181
Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873 154
Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1879. . . 164
Kambly, Die Elementar-Mathematik. — Breslau 1884 170
Knorr, Elemente d. Geometrie. — Kiew 1849 139
Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874 156
Koch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ravensburg 1889 . . 175
Köberlein, Lehrbuch d. Elementar-Geom. — Sulzbach 1824 . . 129
Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geom. — Tübingen 1882 168
Koppe, Planimetrie. — Essen 1885 170
Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879 164
Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwickelung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852 142
Kries, Lehrbuch d. reinen Math. — Jena 1817. 127
Kröger, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1876. 159

Seite

Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875 158
Kunze. Lehrbuch d. Geometrie. — Jena 1851 142
Legendre, Elemente d. Geom. — Berlin 1844. 137
Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879 164
Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1858. 145
Lieber und Lühmann, Planimetrie. — Leipzig 1887 171
Löser, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Weinheim 1882. . . 168
Lübsen, Ausführliches Lehrbuch d. Elementar-Geom. — Hamburg 1850. 140
Mahistre, Lehrbuch d. vergl. Geom. — Weimar 1845 137
Martus, Raumlehre I. — Bielefeld 1890. 176
Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881 167
Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881 167
Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879 165
Moroff, Das Winkelfeld. — Hof 1890. 176
Müller, Hubert, Leitfaden der eb. Geom. — Leipzig 1874. . . 156
Müller, H., Über den ersten planimetr. Unterricht. — Berlin 1889 175
Müller, H., Die Elementar Planimetrie. — Berlin 1891 181
Müller, J. H. T., Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844. . . 137
Müller, Joh., Lehrbuch d. elementaren Planimetrie. — Bremen 1870 151
Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890 177
v. Münchow, Grundlehren d. Trigonometrie. — Bonn 1826 . . . 130
Nagel, Lehrbuch der ebenen Geom. — Ulm 1878 154
Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890 . . 176
Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823 129
Petersen, Lehrbuch d. elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881 167
Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827 . 131
Polster, Geometrie d. Ebene. — Würzburg 1877/78 162
Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890 177
Rausenberger, Die Elementargeometrie. — Leipzig 1887 . . . 171
Recht, Die Elemente d. Geom. — München 1844 137
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 170
Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888 174
Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890 179
Rosmanith, die Elemente der Geometrie. — Wien 1891 182
Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888 174
Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869 149
Sadebeck, Elemente d. eben. Geom. — Breslau 1872 153
Salomon, Reine Elementargeometrie. — Wien 1847 138
Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883 . . . 169
Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872 154
Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879 165
Schlömilch, Geometrie des Mafses. — Leipzig 1874 157
v. Schmidt, Euklid's 11. Axiom. — Moskau 1891 182

Seite

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente d. Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 163
Scholim, Lehrbuch d. Geom. — Kreuzburg O. S. 1890 179
Schram und Schüssler, Vorschule der Math. — Wien 1889 . . 175
Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876 159
Schweder, Lehrbuch der Planimetrie. — Riga 1879 166
Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808 124
Seeger, Die Elemente der Geom. — Wismar 1887 172
Simon, Die Elemente der Geom. — Strassburg 1890 179
Snell, Lehrbuch der geradlinigen Planimetrie. — Leipzig 1857 . 144
Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865 148
Sonnenburg, Ebene Geometrie. — Bremen 1868 148
Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873 155
Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888 174
Steffenhagen, Kompendium d. Planimetrie. — Parchim 1847. . 138
Stegmann, Die Grundlehren d. eb. Geom. — Kempten 1886 . . 171
van Swinden, Elemente d. Geom. — Jena 1834 132
Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868 149
Tellkampf, Vorschule d. Mathematik. — Berlin 1847 138
Thibaut, Grundriſs d. reinen Math. — Göttingen 1822 128
Ulrich, Lehrbuch d. reinen Math. — Göttingen 1836 133
Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851 142
Unverzagt, Der Winkel etc. — Wiesbaden 1878 163
Uth, Leitfaden der Planimetrie. — Kassel 1889 176
Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874 . . 158
Weissenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864 . . 148
Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie — Braunschweig 1887 172
Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863 147
Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877 162
Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830 131
Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874 158
Wunder, Die Elemente d. eb. Geom. — Leipzig 1840 134
Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwickelung der Planimetrie. — Sorau 1860 147
Zmurko-Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876 . 159

Im Text verarbeitete (oder erwähnte) Abhandlungen etc.

B. Becker, Über die Methode etc. . . . . 10[illegible]
Becker, H. Z. II. . . . . 95 10[illegible]
Becker, Elemente auf neuer Grundlage 95 97
Bertrand . . . . 11[illegible]
Bürklen, Korrespondenzblatt 1891 . . . . 95 108 11[illegible]
Fresenius, Grundlagen etc. . . . . 11[illegible]
Gerlach, H. Z. XXII. . . . . 11[illegible]

Seite

Hankel, Theorie der kompl. v. Zahlen 96
Hertter, H. Z. XIX. 94
J. C. V. Hoffmann, H. Z. III. 108 114
J. C. V. Hoffmann, H. Z. IV. 103
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XVI 100
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XIX. 94
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XX. 98
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XXI. 116
Moroff, Das Winkelfeld 111
E. Müller, Flemente d. Geometrie 100 102
Rouché 102
Schmitz, H. Z. XXII. 120
Schotten, H. Z. XX. 94 123
M. Simon. 114
Thaer 111
Wimmenauer, H. Z. XIX. 94
Wundt, Logik 96

III. Kapitel 183

Die Lehre vom Parallelismus.

Adam, Lehrbuch d. eb. u. körperl. Geometrie. — Berlin 1869. . 294
Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840 278
August, Lehrbuch d. Mathematik. — Berlin 1852 289
Baltzer, Die Elemente der Mathem. — Leipzig 1874. 300
Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851 288
Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842. . . . 280
Becker, F., Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870 295
Becker, F. W., Lehrbuch der Elementargeometrie. — Oppenheim 1859 291
J. K. Becker, Lehrbuch d. Elem.-Geom. — Berlin 1877. 306
J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877 305
J. K. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. — Berlin 1883 317
Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869 295
Beez, Über Euklidische u. nicht-Euklidische Geom. — Plauen 1888 256
Behl, Die Darstellung d. Planimetrie. — Hildesheim 1877 . . . 320
Bertrand, Elémens de Géométrie. — Paris 1812. 266
Bézout, Cours des Mathématiques, Paris 1812 267
Blasche, Grundrifs d. Elementar-Geom. — Reval 1819 272
Boymann, Lehrbuch d. Mathematik I. — Köln 1877 307
Bretschneider, Lehrgebäude d. niedern Geometrie. — Jena 1844 281
Brewer, Lehrbuch d. Geometrie. — Düsseldorf 1822 272

Seite

Brockmann, Lehrbuch d. elementaren Geom. — Leipzig 1871 . 298
Bürger, Theorie der Parallellinien. — Heidelberg 1833 275
Crelle, Über Parallelen-Theorie. — Berlin 1816 268
Crelle, Lehrbuch der Elemente d. Geometrie — Berlin 1826 . . 274
Dauber, die Grundlagen d. Mathematik. — Helmstedt 1871 . . 245
Develey, Anfangsgründe d. Geometrie. — Stuttgart 1818 . . . 309
Dronke, Die Elemente d. ebenen Geom. — M.-Gladbach 1864 . 293
Dudeck, Versuch etc. — Hohenstein 1847. 233
Ebensperger, Gemeinfaſsliche Geometrie. — Nürnberg 1850 . . 288
Euklid, Elemente. — Halle 1840 279
Féaux, Lehrbuch d. elementaren Planimetrie. — Paderborn 1882 315
Feld u. Serf, Leitfaden für d. geom. Unterricht. — Wiesbaden 1888 322
Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892 329
E. Fischer, Die Geometrie. — Berlin 1891 328
E. G. Fischer, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1833. 276
F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik II. — Leipzig 1887 . 320
Focke u. Krass, Lehrbuch d. Geometrie. — Münster 1878 . . . 310
Förstemann, Lehrbuch d. Geometrie. — Danzig 1827 274
v. Forstner, Grundriſs d. Elemente d. r. Math. — Berlin 1826 . 274
Francoeur, Vollständiger Lehrkurs d. reinen Math. — Bern 1843 281
Franke, Die Elemente d. eb. Geom. — Hannover 1860 292
Frankenbach, Lehrbuch d. Math. I. — Liegnitz 1889 323
Frantz, Die Philosophie d. Math. — Leipzig 1842 280
Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. — Frankfurt a. M. 1853 290
Fresenius, Die psych. Grundlagen etc. — Wiesbaden 1868 . . 244
Frischauf, Elemente d. Geom. — Graz 1870 296
Funk, Das Euklidische System d. Geom. d. Ebene. — Berlin 1864 293
Gauss, Die Hauptsätze etc. I. — Bunzlau 1885 319
German, Studien etc. — Ehingen 1872 246
Gernerth, Grundlehren d. eb. Geom. — Wien 1857 291
Giffhorn, Leitfaden d. eb. Geom. etc. — Braunschweig 1862. . 292
Gilles, Lehrbuch d. eb. Geom. — Heidelberg 1877 307
Grunert, Lehrbuch d. eb. Geom. — Brandenburg 1870 296
Günther, Der Thibaut'sche Beweis etc. — Ansbach 1877 249
Hablützel, Lehrbuch d. synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875 304
Haller v. Hallerstein, Lehrbuch d. Elementar-Math. — Berlin 1890 325
Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872 298
Hauff, Lehrbegriff d. reinen Mathematik. — Frankfurt a. M. 1803 266
Heger, Leitfaden für den geometr. Unterricht. — Breslau 1882 . 316
Heidenreich, Die Elemente d. niedr. Geom. — Leipzig 1859. . 291
Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877 308
Heis u. Eschweiler, Lehrbuch d. Geom. — Köln 1870 297
Helmes, Planimetrie. — Hannover 1874. 302
Henrici u. Treutlein, Lehrbuch d. Elementar-Geom. — Leipzig 1881 313

Seite

Hercher, Lehrbuch d. Geometrie. — Leipzig 1893 331
Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872 299
Hočevar; Lehrbuch d. Geometrie. — Wien 1891 328
Hoch, Lehrbuch d. Geometrie — Stuttgart 1891 318
Holl, Lehrbuch der Geometrie. — Stuttgart 1891 328
Horn, Parallelenproblem. — Glückstadt 1837 226
Jacobi, De undecimo etc. — Jenae 1824 221
Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1878 299
Junghans, Lehrbuch d. eb. Geometrie. — Berlin 1879 310
Kambly, die Elementar-Math. — Breslau 1884 319
Knorr, Elemente der Geometrie. — Kiew 1849. 287
Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874 303
Koch, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Ravensburg 1889 323
Köberlein, Lehrbuch d. Elem.-Geometrie. — Sulzbach 1824 . . 273
Komerell-Fink, Lehrbuch d. ebenen Geometrie. — Tübingen 1882 316
Koppe, Planimetrie. — Essen 1885 319
Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879 311
Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852 290
Kries, Lehrbuch d. reinen Mathematik. — Jena 1817 271
Kröger, Leitfaden für den Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1876 320
Krüger, Über die Lehre v. d. Parallelen. — Bromberg 1852 . . 235
Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875 305
Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851 289
Leesekamp, Die Elemente d. eb. Geom. — Kassel 1879 311
Legendre, Elemente der Geometrie. — Berlin 1844 282
Leinemann, Die Theorie der Parallelen. — Münster 1874 . . . 247
Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1859. 291
Lieber u. Lühmann, Planimetrie. — Leipzig 1887 321
Lindemann, Über d. Hyp. d. Geom. — Königsberg 1891. . . . 258
Löser, Lehrbuch d. eb. Geometrie. — Weinheim 1882 317
Lotz, Über die Theorie der Parallelen. — Fulda 1862 237
Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geom. — Hamburg 1850 288
Märcker, Theorie der Parallelen. — Meiningen 1846 229
Mahistre, Lehrbuch d. vergl. Geom. — Weimar 1845 286
Martus, Raumlehre I. — Bielefeld 1890. 325
Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881 314
Metternich, Vollständige Theorie d. Parallellinien. — Mainz 1815 268
Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881 314
Mill, J. St., Logik. — Leipzig 1884 228
Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879 312
Montanus, Handbuch der Geometrie. — Berlin 1822 272
Most, Neue Darlegung etc. — Coblenz 1883 253

Seite

Hubert Müller, Leitfaden d. ebenen Geometrie. — Leipzig 1874 und 1889 . . . . 303 324
H. Müller, Über den ersten planimetr. Unterricht. — Berlin 1889 324
H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. — Berlin 1891 328
Müller, J. H. T., Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844 . . . 285
Müller, Joh., Lehrbuch d. elementaren Plamimetrie. — Bremen 1870 297
Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890 326
Nagel, Lehrb. der eb. Geom. — Ulm 1873 300
Noack, Leitfaden d. Elementar-Mathematik. — Berlin 1890 . . . 326
Paucker, Die eb. Geometrie. — Königsberg 1823 273
Petersen, Lehrbuch d. elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881 314
Polster, Geometrie d. Ebene. — Würzburg 1877/78 308
Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890 326
Rausenberger, die Elementargeometrie. — Leipzig 1887. . . . 321
Recht, Die Elemente d. Geometrie. — München 1844 286
Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885 319
Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888 322
Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890 327
Rosmanith, Die Elemente der Geometrie. — Wien 1891 329
Rottock, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888 322
Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869 295
Sadebeck, Elemente d. eb. Geometrie. — Berlin 1872 299
Salomon, Reine Elementargeometrie. — Wien 1847 286
Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883 . . . 318
Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872 299
Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879 312
Schlömilch, Geom. des Mafses. — Leipzig 1874 304
Schmeisser, Kritische Betrachtung etc. — Frankfurt a. O. 1851 233
v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891 329
Schmitz, Aus dem Gebiete etc. — Neuburg a. D. 1884 254
Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878 310
Scholim, Lehrbuch der Geometrie. — Kreuzburg O. S. 1890 . . 328
Schram u. Schüssler, Vorschule der Math. — Wien 1889 . . . 325
Schulz, Theorie d. Parallelen. — Königsberg 1846 230
Schulz, Theorie d. Parallelen. — Königsberg 1854 236
Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876 305
Schweder, Lehrbuch der Planimetrie. — Riga 1879 312
Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808 266
Seeger, Die Elemente der Geometrie. — Wismar 1887 322
Simon, Zu den Grundlagen etc. — Strassburg 1891 263
Snell, Lehrbuch d. geradlinigen Planimetrie. — Leipzig 1857 . . 291
Sonnenburg, Ebene Geometrie. — Bremen 1868 294

Seite
Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865. 293
Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873 300
Steffenhagen, Kompendium d. Planimetrie. — Parchim 1847 . 287
Spitz, Lehrbuch d. eb. Geometrie. — Leipzig 1888 323
Stegmann, Die Grundlehren d. eb. Geometrie. — Kempten 1886 320
van Swinden, Elemente der Geometrie. — Jena 1834 276
Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868 294
Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847. 287
Thibaut, Grundriſs d. reinen Mathematik. — Göttingen 1822. . 273
Thiermann, Geometr. Abh. — Göttingen 1862 242
Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836 . . 277
Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851 289
Uth, Leitfaden der Planimetrie. — Kassel 1889 325
Vering, Über die Definitionen etc. — Neuss 1872 246
Vogt, der Grenzbegriff etc. — Breslau 1855 255
Wagner, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Hamburg 1874 304
Weissenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864 . . 293
Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie. — Braunschweig 1887 256
Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863 292
Witte, Die Parallelentheorie etc. — Wolfenbüttel 1867 244
Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877 309
Wolf, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830. 275
Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874 304
Wunder, Die Elemente der eb. Geometrie. — Leipzig 1840 . . . 280
Ziegler, Grundriſs der eb. Geometrie. — Landshut 1881 315
Zmurko-Fabian, Lehrbuch d. Mathematik. — Lemberg 1876 . 305

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen (resp. Werke).

Baltzer, Über die Hypothesen etc. Crelles' J. 85 252
Battaglini, Giorn. d. mat. 255
J. C. Becker, H. Z. II. 195
Becker, Die Elem. auf neuer Grundlage 251
Beez, Math. Ann. VII. 255
Behn, Dissertatio etc. 228
Beltrami, Annal. scient. VI. 255
Beltrami, Saggio di J. d. G. N. — Napoli 1868. 265
Bertrand, Développement etc. — Genève 1778 297
Betazzi, I postulati etc. — Roma 265
Bézout, C. d. m. 222
Bitonto, Vitr. Giord. da 228
Bolyai 209
Bolyai, La science absolue etc. — Paris 1868 265
Bolze, H. Z. II. 196

Seite

Borellius 242
Boscowich, Elem. an. math. 225
Camus, Élémens etc. 225
Carbonelle, Les incertitudes etc. Revue d. qu. sc. 14 265
Cataldo, Opusculum etc. 223
Clairaut, Elementa geometrica 225
Clavius 223
Dadgson, Curiosa math. — London 264
Duchemin, Des parallèles etc. 264
Duchemin, Théorie d. p. 264
Erdmann 251 252
W. Fischer, Gr. Arch. XXVIII 214
E. G. Fischer 236
Fischer-Schröder, Lehrb. d. Planim. — Nürnberg 1870 252
Fresenius, H. Z. II 198
Fries, Logik 233
Frischauf, Abs. Geometrie. — Leipzig 1872 265
Gauss 189
Gauss, Gött. Anz. 1822 251
Geminus 234
Genocchi, Bull. de l'acad. Belg. XXXI 252
Germar, Gr. Arch. XV 212
Gilles, H. Z. XI 205
Grafsmann 250
Grunert, Gr. Arch. 183
Grunert, Gr. Arch. XXXXVII 216
Grunert, Lehrbuch 228 252
Günther-Sparagna, Battagnis Giorn. XI 251
Günther, Ziele und Resultate etc. — Erlangen 1876 251
Günther, Kritik etc. — Zeitschrift f. d. Realschw. I. 252
Hanke, Principia etc. 223
Hankel, Die Entwickelung etc. 251
Hauff, Crelle's Journal IX 225
Hausen, Elementa math. 225
Helmholtz, Über die Thatsachen etc. 252
Hörlych, Gr. Arch. XVIII 214
J. C. V. Hoffmann, H. Z. XXIII 202
J. C. V. Hoffmann, H. Z. IV 204
J. C. V. Hoffmann, H. Z. III 252
J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallelen 234
Hofmann 225
Hoüel-Lobatschewsky, Études géometriques 217
Hoüel, Essai critique etc. 217
Hoüel, Note etc. — Bordeaux 1869 252
Kaestner, Anfangsgründe 225

Seite

Kant, Kritik d. r. Vernunft 233
Karsten 225
Killing, Über einige Bedenken etc. H. Z. VIII. 252
A. Kircher, Nouvelle théorie etc. 223
Klein, Math. Ann. IV. VI. VII. 255
Kluegel, Conatuum etc. recensio 222
Klügel 184
Kober, H. Z. I. 194
Kober, H. Z. III. 204
Koenig, Élémens d. Géom. etc. 224
Koppe 236
Kosack. 236
Kunze 236 251
Lacroix, Élémens etc. 225
Lambert, Leipziger Magazin 1786 . . . . 221 225
Legendre 209
Legendre, Mémoires de l'Académie XII. 218
Legendre, Élémens de Géométrie 218
Legendre, Réflexions etc. 251
Liard, Des Déf. géom. — Paris 265
Lindemann, Vorlesungen II. 209
Lobatschewsky, Theorie der Parallellinien. — Berlin 1887 . . . 265
Lorenz, Grundrifs 224
Lüdicke, Versuch 223
Magnus, Aufgabensammlung 185
Malezien, Élémens de Géométrie 225
Mansion, Revue de l'instruction etc. 1870. 251
Matzka, Gr. Arch. VIII. 211
Metternich. 219 223
Hub. Müller, H. Z. XII.. 206
C. R. Müller, Theorie der Parallelen 220 224
J. W. Müller, Ausführl. evid. Theorie d. Parallelen 222
Nagel 236
Nassaradinus 225
Ouvrier, Theorie der Parallelen 223
Pardies, Élémens etc. 225
Petersen, Math. Ann. 29 327
Petersen, Tidskrift for Math. 265
Pietzker, H. Z. VII. 251
Pietzker, H. Z. XXIII 264
Poincarré, Sur les hypoth. — S. M. F. Bull. XV. 265
Polster, Versuch einer Parallelentheorie. Bair. Blätter 1877 . . 252
Proklus 224
Ramus-Schoner 222
Rausenberger, Euklids Elemente 212/13

Seite

Rouché et Comberousse 265
Saccherius, Euklides ab etc. 225
Saccherius 243
Sannia, Elementi d. G. — Napoli 265
Sauveur, Géométrie élémentaire 225
Scherling, H. Z. III. 201
Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872 252
Schlömilch, Geometrie des Mafses 207
Schmidt, Anfangsgründe 225
Schotten 209
Schwab 219
Schwab, Tentamen etc. 224
Schweikart, Die Theorie der Parallelen 223 226
Segner, Elementa 225
Simon 209
M. Simon, Die Elem. d. Geometrie. — Strafsburg 1890 265
R. Simson 223
Snell 236
Sohnke 235
Steiner, Systemat. Entwicklung 190
Sturm, H. Z. I. 192
Sturm, H. Z. II. 197
Taquet, Elem.-Geom. — Rom 1745 276
Taquet, Elementa etc. 222
Tellkampf, Vorschule 228
Thibaut, Grundrifs 225
Thibaut 249
Tilly, de, Reponse etc. Bull. de l'acad. B. XXXI. 252
Vavignon, Élémens etc. 224
Voitius, Percursio 222
Wahl, Dissertatio math. etc. 222
Wallisius, Opera 225
Wehr, Die Subjekt. d. Raumes u. d. 11. Axiom. — Wien . . . 265
Wolf, Anfangsgründe 225
v. Wolf, Anfangsgründe etc. — Halle 1710 252
Wolfius, Elementa etc. 222
Worpitzky, Gr. Arch. LV. 218
Zerlang, H. Z. III. 197
Ziegler, H. Z. III. 204 207

Seite

IV. Kapitel 333

Anwendungen zur Winkel- und Parallelenlehre.

Fr. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870 379
Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempten 1879 382
Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwickelung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852 376
H. Müller, Über d. ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889 386
Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878 381
Fr. Schmeisser, Bemerkungen zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Lehren der Geometrie. — Frankfurt a. O. 1855 . . 377
Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887 385
Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwickelung der Planimetrie. — Soiau 1860 378

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen.

Barroccio 378
J. C. Becker, H. Z. II p. 91 368
Bürklen, Zur Lehre v. Winkel, Korr.-Bl. f. d. Gel. u. Real. schulw. 1891 . . . . 340 345 347 348 358
M. Cantor, Zeit und Zeitrechnung. Heidelberger Jahrbücher 1892 343
Euler 365
Formaleoni 344
Hankel, Gesch. d. Math.. 345
Heinen, Gr. Arch. 29. p. 474 366
Helmes, Die Elem.-Math. 1874 391
Henrici u. Treutlein, Lehrb. d. Geometrie 345 392
J. C. V. Hoffmann, H. Z. 18. p. 344 347
J. C. V. Hoffmann, H. Z. III. p. 136 364
J. C. V. Hoffmann, H. Z. V. 370
Kaltenbrunner, Wien. Akad. 87 343
Kober, H. Z. I. 365
Kober, H. Z. V. p. 55 370
Kober 371
Kruse, Geometrie d. Ebene. 1875 392
Lackemann, Lehrpr. u. Lehrg. 10. Heft 374
Manilius 378
Matzka, Gr. Arch. 8. p. 365—374 372
Meutzner, H. Z. 13 p. 25 366
E. Müller, H. Z. 6. p. 261 371
Hub. Müller, Leitfaden. — Leipzig 1874 392

Seite
J. Müller, Lehrbuch. — Bremen 1870 . . . . 383 391
Müller-Zwerger 371
J. H. T. Müller, Gr. Arch. II. p. 106 366
Oppelt 344
Petersen 363
Rausenberger, Die Elementargeometrie 1887 392
Sänger u. Sonne, Math. Repet.-Hefte 334
Sauer, H. Z. 24. p. 529 371
Scherling, H. Z. V. p. 447 370
Schindler, Die Elemente d. Pl. 1883 392
Schotten, H. Z. 24. p. 228 346
Schotten, H. Z. 22. p. 531 371
Sickenberger, Math. Orthographie. H. Z. 4. p. 379—391 . . . 362
Snell 383
Stieve, Bair. Akad. 15 343
Strabo 378
Sturm, H. Z. I. p. 272 367
Sturm, H. Z. III. p. 20 368
Thibaut 365
Thieme, Vortrag 346
J. H. Voss, Verg. Landbau I. 233 378
Weidler, hist. astronom. 378
Wernicke, Die Grundlagen etc. — Braunschweig 1887 339
Wiečorek-Wiečorekewič, H. Z. IV. p. 429 365
Ziegler, H. Z. I. 365
Ziegler, H. Z. III p. 190 369

Klussmann, Dr. **Rudolf,** systematisches Verzeichnis der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämtlicher an dem Programmtausche teilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Nebst zwei Registern. Zweiter Band: 1886—1890. [VII u. 285 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 5.—
Der I. Band: 1876—1885 (n. ℳ 5.—) erschien 1889.

Kraft, Ferdinand, Privatdozent an der Universität Zürich, Abrifs des geometrischen Kalkuls. Nach den Werken des Professors Dr. Hermann Günther Grassmann bearbeitet. Mit in den Text gedruckten Figuren. [XII u. 255 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 6.—

Kronecker, Leopold, Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. In 5 Bänden. I. Band: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der mehrfachen Integrale. Herausgegeben von Dr. Eugen Netto, Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. [X u. 346 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 12.—

Kröhnke, G. H. A., Königl. Preufs. Regierungs- und Baurat in Frankfurt a/O., Handbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs sorgfältigste berechnet. 12. Aufl. Mit einer Figurentafel. [VIII u. 164 S.] 16. 1893. In Leinwand geb. n. ℳ 1.80.

Legendre, Adrien-Marie, Zahlentheorie. Nach der dritten Ausgabe ins Deutsche übertragen von H. Maser. 2 Bände. Zweite wohlfeile Ausgabe. gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 12.—
Einzeln, jeder Band n. ℳ 6.—
I. Band. [XVIII u. 442 S.] II. Band. [XII u. 453 S.]

Lie, Sophus, Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Privatdocent an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. [XV u. 810 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 24.—

——— Theorie der Transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel bearbeitet. [XXVII u. 831 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 26.—
Der I. Abschnitt (n. ℳ 18.—) erschien 1888, der II. (n. ℳ 16.—) 1890.

Neumann, Dr. **Carl,** Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction. Mit Figuren im Text. [IX u. 314 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 10.—

——— die Haupt- und Brenn-Punkte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Möbius, Gauss und Bessel begründeten Theorie. Mit Figuren im Text. Zweite Auflage. [VIII u. 42 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 1.2(

HS

